

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

1. Flächen von Lagen

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

rentialgleichungen dieser Bahnen können geschrieben werden in der Form der r Gleichungen:

$$d(\sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q) = \frac{\partial ds}{\partial p_e} ,$$

welche man aus 186 oder aus 160 erhält, indem man bedenkt, daß für die gewählten Koordinaten die sämtlichen Größen p_{e_q} gleich Null sind.

- 199 3. Zuzolge derselben Bemerkung erhält man für die Variation der Länge einer Bahn, welche den vorstehenden Differentialgleichungen genügt, also der Länge einer geodätischen Bahn, aus 184:

$$\delta \int ds = \sum_1^r \left[\frac{\partial ds}{\partial p_e} \delta p_e \right]_0 ,$$

oder unter Berücksichtigung von 92:

$$\delta \int ds = \sum_1^r \left[\sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q \delta p_q \right]_0 ,$$

in welchen Gleichungen also die δp_e die Variationen der Koordinaten der Endlage, und die $\cos s, p_e$ die Richtungscosinus der Endelemente der betrachteten geodätischen Bahn bezeichnen.

I. Flächen von Lagen.

- 200 **Definition.** Unter einer Fläche von Lagen verstehen wir im allgemeinen ein stetig zusammenhängende Gesamtheit von Lagen. Im besonderen aber soll hier unter einer Fläche eine Gesamtheit möglicher Lagen eines holonomen Systems verstanden sein, welche dadurch charakterisiert ist, daß die Koordinaten der ihr angehörigen Lagen einer einzigen endlichen Gleichung unter sich genügen.

Die Gesamtheit der Lagen, welche gleichzeitig zweien

oder mehr Flächen angehören, bezeichnen wir auch als den Durchschnitt jener zwei oder mehr Flächen.

Anmerkung 1. Durch jede Lage einer Fläche kann eine unendliche Mannigfaltigkeit von Bahnen gezogen werden, deren sämtliche Lagen der Fläche angehören. Wir sagen von diesen Bahnen, daß sie der Fläche angehören, oder in der Fläche liegen; wir brauchen die gleiche Ausdrucksweise für die Elemente der Bahnen und für unendlich kleine Verrückungen überhaupt. 201

Anmerkung 2. Eine Bahn, welche nicht einer Fläche angehört, hat mit dieser im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lagen gemeinsam. 202

Denn die Bahn wird analytisch dargestellt durch $r - 1$ Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Lagen, die Fläche durch eine einzige Gleichung. Nach Voraussetzung sind erstere Gleichungen unabhängig von der letzteren. Alle zusammen bilden sie daher r Gleichungen für die r Koordinaten der gemeinsamen Lagen, welche Gleichungen im allgemeinen keine oder eine endliche Zahl reeller Lösungen zulassen.

Anmerkung 3. Aus jeder Lage einer Fläche ist eine $(r - 1)$ -fache Mannigfaltigkeit unendlich kleiner Verrückungen in der Fläche möglich. 203

Denn von den r unabhängigen Änderungen der Koordinaten, welche die Verrückung charakterisieren, können $r - 1$ willkürlich angenommen werden, die r te ist dann dadurch bestimmt, daß die Verrückung der gegebenen Fläche angehören soll.

Lehrsatz 1. Es ist stets eine, und im allgemeinen nur eine Richtung anzugeben möglich, welche auf $r - 1$ verschiedenen unendlich kleinen Verrückungen eines Systems (197) aus derselben Lage senkrecht steht. 204

Es sei $d_\tau p_e$ die Änderung der Koordinate p_e für die τ te jener $r - 1$ Verrückungen; es sei δp_e die Änderung der Koordinate p_e für eine weitere Verrückung. Soll die letztere auf jenen senkrecht sein, so ist notwendig und hinreichend, daß $r - 1$ Gleichungen der Form (58)

$$\sum_{\rho}^r \sum_{\sigma}^r a_{\rho\sigma} d_{\tau} p_{\rho} \delta p_{\sigma} = 0$$

erfüllt seien. Dies sind aber $r-1$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r-1$ Verhältnisse der δp_{ρ} unter sich; sie können also stets, und zwar im allgemeinen nur durch ein Wertsystem dieser Verhältnisse befriedigt werden. In Ausnahmefällen kann Unbestimmtheit eintreten; solche muß z. B. dann eintreten, wenn irgend drei der $r-1$ Verrückungen so gewählt sind, daß jede Verrückung, welche auf zwei von ihnen senkrecht ist, auch auf der dritten senkrecht steht.

205 **Lehrsatz 2.** Steht eine Richtung senkrecht auf $r-1$ verschiedenen Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, so steht sie senkrecht auf jeder Verrückung, welche der Fläche in dieser Lage angehört.

Die Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, sind dadurch charakterisiert, daß die entsprechenden dp_{ρ} einer einzigen homogenen linearen Gleichung unter sich genügen, der Gleichung nämlich, welche durch Differentiation der Gleichung der Fläche erhalten wird. Genügen nun die $r-1$ Wertsysteme der $d_{\tau} p_{\rho}$ jener Gleichung, so genügen auch die Größen

$$dp_{\rho} = \sum_{\tau}^{r-1} \lambda_{\tau} d_{\tau} p_{\rho}$$

derselben, worin die λ_{τ} willkürliche Faktoren bezeichnen. Die dp_{ρ} gehören also einer beliebigen Verrückung in der Fläche an, und zwar kann jede Verrückung der Fläche in dieser Form dargestellt werden, da die rechte Seite der Gleichung eine $(r-1)$ fache willkürliche Mannigfaltigkeit enthält.

Nach Voraussetzung ist nun (204):

$$\sum_{\rho}^r \sum_{\sigma}^r a_{\rho\sigma} d_{\tau} p_{\rho} \delta p_{\sigma} = 0 \quad ;$$

durch Multiplikation dieser Gleichungen mit den λ_{τ} und Addition folgt:

$$\sum_1^r \sum_1^r a_{\rho\sigma} dp_\rho \delta p_\sigma = 0 \quad ,$$

welches die Behauptung ist (58).

Definition. Eine Verrückung aus einer Lage einer Fläche 206 heißt senkrecht auf der Fläche, wenn sie senkrecht steht auf jeder Verrückung, welche in der gleichen Lage der Fläche angehört.

Folgerung 1. In jeder Lage einer Fläche gibt es stets 207 eine, und im allgemeinen nur eine Richtung, welche senkrecht auf der Fläche steht.

Folgerung 2. In jeder Lage einer Fläche ist stets eine, 208 und im allgemeinen nur eine geradeste Bahn auf der Fläche senkrecht zu errichten möglich.

Definition 1. Schar von Flächen nennen wir eine Ge- 209 samtheit von Flächen, deren Gleichungen (200) sich nur unterscheiden durch den Wert einer in ihnen vorkommenden Konstanten.

Bezeichnung. Jede Schar von Flächen kann analytisch 210 dargestellt werden durch eine Gleichung der Form:

$$R = \text{constans} \quad ,$$

welche nämlich erhalten wird durch Auflösung der Gleichung einer der Flächen nach der variierenden Konstanten, und in welcher die rechte Seite die möglichen Werte eben dieser Konstanten, die linke Seite aber eine Funktion der Koordinaten p_ρ bezeichnet. Jeder Fläche jener Schar entspricht ein bestimmter Wert der rechts stehenden Konstanten, also ein bestimmter Wert der Funktion R . Solche Flächen, für welche die Werte der Funktion R nur unendlich kleine Unterschiede dR zeigen, nennen wir Nachbarflächen.

Definition 2. Senkrechte Trajektorie einer Schar von 211 Flächen nennen wir eine Bahn, welche die Schar senkrecht durchschneidet, d. h. welche auf jeder Fläche der Schar in den gemeinsamen Lagen (202) senkrecht steht.

212 **Lehrsatz.** Damit eine Bahn senkrechte Trajektorie der Schar

$$\text{a) } R = \text{constans}$$

sei, ist hinreichende und notwendige Bedingung, daß sie in jeder ihrer Lagen r Gleichungen der Form

$$\text{b) } \sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q = f \frac{\partial R}{\partial p_e}$$

genüge, in welchen die s, p_e die Neigungen der Bahn gegen die Koordinaten p_e bezeichnen, und in welchen f eine für alle r Gleichungen identische, übrigens mit der Lage sich ändernde Funktion der p_e ist.

Wir konstruieren von der betrachteten Lage der Bahn aus eine unendlich kleine Verrückung, deren Länge $\delta\sigma$ sei, bei deren Durchlaufung sich die p_e um δp_e und R um δR ändern möge, welche endlich mit der betrachteten Bahn den Winkel s, σ bilden möge. Multiplizieren wir die Gleichungen **b)** der Reihe nach mit den δp_e und addieren, so folgt (78a und 85):

$$\text{c) } \delta\sigma \cos s, \sigma = \sum_1^r e f \frac{\partial R}{\partial p_e} \delta p_e = f \delta R .$$

Gehört nun die Verrückung $\delta\sigma$ einer Fläche der Schar **a)** an, nämlich derjenigen Fläche, welche die betrachtete Lage mit der Bahn gemeinsam hat, so ist $\delta R = 0$, also $s, \sigma = 90^\circ$. Die Richtung der Bahn steht daher senkrecht auf der durchschnittenen Fläche (206), und die Gleichungen **b)** bilden die hinreichenden Bedingungen dafür, daß dies in jeder Lage eintrete. Sie bilden aber auch die notwendigen Bedingungen hierfür, da, von Ausnahmefällen abgesehen, in jeder Lage nur eine einzige Richtung der gestellten Forderung genügt.

213 **Zusatz 1.** Der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen der betrachteten Schar in irgend einer Lage ist gleich

$$f dR .$$

Denn lassen wir die Verrückung $\delta\sigma$ des vorigen Beweises nach Richtung und Länge jetzt zusammenfallen mit dem Teil der senkrechten Trajektorie, welcher zwischen beiden Flächen liegt, so fällt $\delta\sigma$ zusammen mit dem betrachteten Abstand, der Winkel s, σ aber wird Null, und so folgt aus Gleichung 212 c die Behauptung.

Zusatz 2. Die in den Gleichungen der senkrechten Trajektorien auftretende Funktion f wird erhalten als Wurzel der Gleichung: 214

$$\frac{1}{f^2} = \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir die Werte der r Richtungscosinus nach 212 b einsetzen in die Gleichung 88, welcher sie genügen müssen. Welche Wurzel zu wählen sei, hängt davon ab, ob wir die Richtung der Trajektorie nach wachsenden Werten von R oder nach abnehmenden als positiv rechnen.

2. Geradeste Entfernung.

Definition. Geradeste Entfernung zweier Lagen eines homonomen Systems heißt die Länge einer sie verbindenden geradesten Bahn. 215

Anmerkung. Zwei Lagen können mehr als eine geradeste Entfernung haben. Unter diesen finden sich die Längen der kürzesten Bahnen zwischen beiden Lagen, also auch die Länge der absolut kürzesten Bahn. Wenn von der geradesten Entfernung zweier Lagen als einer eindeutig bestimmten gesprochen wird, so soll von dieser letzteren die Rede sein. 216

Analytische Darstellung. Die geradeste Entfernung zweier Lagen kann als Funktion der Koordinaten dieser Lagen dargestellt werden. Diejenige Lage, welche als Ausgangslage betrachtet wird, werde dauernd mit 0, ihre Koordinaten mit p_0 bezeichnet; diejenige Lage, welche als Endlage betrachtet 217