

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

Gleichungen eine der Größen  $p'_e$  mit Hilfe von Gleichung a) durch die übrigen aus, so sind die Verhältnisse zwischen den letzteren nun völlig willkürliche Größen. Der Koeffizient jeder einzelnen dieser Größen muß also für sich verschwinden. Wir erhalten so als notwendige Folge unserer Annahme im ganzen  $(r-1)^2$  Gleichungen zwischen den  $r$  Funktionen  $p_{1e}$  und ihren  $r^2$  partiellen ersten Differentialquotienten. In besonderen Fällen können diese Gleichungen sämtlich befriedigt sein, denn sie sind befriedigt, wenn die Gleichung a) integrabel ist. Aber im allgemeinen haben wir kein Recht, die Funktionen  $p_{1e}$  auch nur einer einzigen Bedingung unterworfen vorauszusetzen, und im allgemeinen war also unsere Annahme unzulässig. Damit ist die Behauptung erwiesen.

**Ergebnis (190 bis 195).** In holonomen Systemen decken 196 sich die Begriffe der geradesten und der geodätischen Bahnen dem Inhalt nach vollständig; in nichtholonomen Systemen schließt keiner dieser Begriffe den andern ein, sondern beide haben im allgemeinen vollständig verschiedenen Inhalt.

## Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen.

### Vorbemerkungen.

1. In diesem Abschnitt soll nur von holonomen Systemen 197 die Rede sein und unter einem System schlechthin also ein holonomes verstanden werden. Es kann daher, und es soll vorausgesetzt werden, daß die benutzten Koordinaten  $p_e$  des Systems sämtlich freie Koordinaten sind. Die Zahl dieser Koordinaten ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, also unabhängig von unserer Willkür; wir bezeichnen sie dauernd mit  $r$ .

2. Geradeste und geodätische Bahnen fallen in diesem Abschnitt zusammen (196), und die gemeinsamen Diffe-

rentialgleichungen dieser Bahnen können geschrieben werden in der Form der  $r$  Gleichungen:

$$d(\sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q) = \frac{\partial ds}{\partial p_e} ,$$

welche man aus 186 oder aus 160 erhält, indem man bedenkt, daß für die gewählten Koordinaten die sämtlichen Größen  $p_{e_q}$  gleich Null sind.

- 199 3. Zuzolge derselben Bemerkung erhält man für die Variation der Länge einer Bahn, welche den vorstehenden Differentialgleichungen genügt, also der Länge einer geodätischen Bahn, aus 184:

$$\delta \int ds = \sum_1^r \left[ \frac{\partial ds}{\partial p_e} \delta p_e \right]_0 ,$$

oder unter Berücksichtigung von 92:

$$\delta \int ds = \sum_1^r \left[ \sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q \delta p_e \right]_0 ,$$

in welchen Gleichungen also die  $\delta p_e$  die Variationen der Koordinaten der Endlage, und die  $\cos s, p_e$  die Richtungscosinus der Endelemente der betrachteten geodätischen Bahn bezeichnen.

### I. Flächen von Lagen.

- 200 **Definition.** Unter einer Fläche von Lagen verstehen wir im allgemeinen ein stetig zusammenhängende Gesamtheit von Lagen. Im besonderen aber soll hier unter einer Fläche eine Gesamtheit möglicher Lagen eines holonomen Systems verstanden sein, welche dadurch charakterisiert ist, daß die Koordinaten der ihr angehörigen Lagen einer einzigen endlichen Gleichung unter sich genügen.

Die Gesamtheit der Lagen, welche gleichzeitig zweien



oder mehr Flächen angehören, bezeichnen wir auch als den Durchschnitt jener zwei oder mehr Flächen.

**Anmerkung 1.** Durch jede Lage einer Fläche kann eine unendliche Mannigfaltigkeit von Bahnen gezogen werden, deren sämtliche Lagen der Fläche angehören. Wir sagen von diesen Bahnen, daß sie der Fläche angehören, oder in der Fläche liegen; wir brauchen die gleiche Ausdrucksweise für die Elemente der Bahnen und für unendlich kleine Verrückungen überhaupt. 201

**Anmerkung 2.** Eine Bahn, welche nicht einer Fläche angehört, hat mit dieser im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lagen gemeinsam. 202

Denn die Bahn wird analytisch dargestellt durch  $r - 1$  Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Lagen, die Fläche durch eine einzige Gleichung. Nach Voraussetzung sind erstere Gleichungen unabhängig von der letzteren. Alle zusammen bilden sie daher  $r$  Gleichungen für die  $r$  Koordinaten der gemeinsamen Lagen, welche Gleichungen im allgemeinen keine oder eine endliche Zahl reeller Lösungen zulassen.

**Anmerkung 3.** Aus jeder Lage einer Fläche ist eine  $(r - 1)$ -fache Mannigfaltigkeit unendlich kleiner Verrückungen in der Fläche möglich. 203

Denn von den  $r$  unabhängigen Änderungen der Koordinaten, welche die Verrückung charakterisieren, können  $r - 1$  willkürlich angenommen werden, die  $r$ te ist dann dadurch bestimmt, daß die Verrückung der gegebenen Fläche angehören soll.

**Lehrsatz 1.** Es ist stets eine, und im allgemeinen nur eine Richtung anzugeben möglich, welche auf  $r - 1$  verschiedenen unendlich kleinen Verrückungen eines Systems (197) aus derselben Lage senkrecht steht. 204

Es sei  $d_\tau p_e$  die Änderung der Koordinate  $p_e$  für die  $\tau$ te jener  $r - 1$  Verrückungen; es sei  $\delta p_e$  die Änderung der Koordinate  $p_e$  für eine weitere Verrückung. Soll die letztere auf jenen senkrecht sein, so ist notwendig und hinreichend, daß  $r - 1$  Gleichungen der Form (58)

$$\sum_{\rho}^r \sum_{\sigma}^r a_{\rho\sigma} d_{\tau} p_{\rho} \delta p_{\sigma} = 0$$

erfüllt seien. Dies sind aber  $r-1$  nicht homogene, lineare Gleichungen für die  $r-1$  Verhältnisse der  $\delta p_{\rho}$  unter sich; sie können also stets, und zwar im allgemeinen nur durch ein Wertsystem dieser Verhältnisse befriedigt werden. In Ausnahmefällen kann Unbestimmtheit eintreten; solche muß z. B. dann eintreten, wenn irgend drei der  $r-1$  Verrückungen so gewählt sind, daß jede Verrückung, welche auf zwei von ihnen senkrecht ist, auch auf der dritten senkrecht steht.

205 **Lehrsatz 2.** Steht eine Richtung senkrecht auf  $r-1$  verschiedenen Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, so steht sie senkrecht auf jeder Verrückung, welche der Fläche in dieser Lage angehört.

Die Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, sind dadurch charakterisiert, daß die entsprechenden  $dp_{\rho}$  einer einzigen homogenen linearen Gleichung unter sich genügen, der Gleichung nämlich, welche durch Differentiation der Gleichung der Fläche erhalten wird. Genügen nun die  $r-1$  Wertsysteme der  $d_{\tau} p_{\rho}$  jener Gleichung, so genügen auch die Größen

$$dp_{\rho} = \sum_{\tau}^{r-1} \lambda_{\tau} d_{\tau} p_{\rho}$$

derselben, worin die  $\lambda_{\tau}$  willkürliche Faktoren bezeichnen. Die  $dp_{\rho}$  gehören also einer beliebigen Verrückung in der Fläche an, und zwar kann jede Verrückung der Fläche in dieser Form dargestellt werden, da die rechte Seite der Gleichung eine  $(r-1)$ fache willkürliche Mannigfaltigkeit enthält.

Nach Voraussetzung ist nun (204):

$$\sum_{\rho}^r \sum_{\sigma}^r a_{\rho\sigma} d_{\tau} p_{\rho} \delta p_{\sigma} = 0 \quad ;$$

durch Multiplikation dieser Gleichungen mit den  $\lambda_{\tau}$  und Addition folgt:



$$\sum_1^r \sum_1^r a_{\rho\sigma} dp_\rho \delta p_\sigma = 0 \quad ,$$

welches die Behauptung ist (58).

**Definition.** Eine Verrückung aus einer Lage einer Fläche 206 heißt senkrecht auf der Fläche, wenn sie senkrecht steht auf jeder Verrückung, welche in der gleichen Lage der Fläche angehört.

**Folgerung 1.** In jeder Lage einer Fläche gibt es stets 207 eine, und im allgemeinen nur eine Richtung, welche senkrecht auf der Fläche steht.

**Folgerung 2.** In jeder Lage einer Fläche ist stets eine, 208 und im allgemeinen nur eine geradeste Bahn auf der Fläche senkrecht zu errichten möglich.

**Definition 1.** Schar von Flächen nennen wir eine Ge- 209 samtheit von Flächen, deren Gleichungen (200) sich nur unterscheiden durch den Wert einer in ihnen vorkommenden Konstanten.

**Bezeichnung.** Jede Schar von Flächen kann analytisch 210 dargestellt werden durch eine Gleichung der Form:

$$R = \text{constans} \quad ,$$

welche nämlich erhalten wird durch Auflösung der Gleichung einer der Flächen nach der variierenden Konstanten, und in welcher die rechte Seite die möglichen Werte eben dieser Konstanten, die linke Seite aber eine Funktion der Koordinaten  $p_\rho$  bezeichnet. Jeder Fläche jener Schar entspricht ein bestimmter Wert der rechts stehenden Konstanten, also ein bestimmter Wert der Funktion  $R$ . Solche Flächen, für welche die Werte der Funktion  $R$  nur unendlich kleine Unterschiede  $dR$  zeigen, nennen wir Nachbarflächen.

**Definition 2.** Senkrechte Trajektorie einer Schar von 211 Flächen nennen wir eine Bahn, welche die Schar senkrecht durchschneidet, d. h. welche auf jeder Fläche der Schar in den gemeinsamen Lagen (202) senkrecht steht.

212 **Lehrsatz.** Damit eine Bahn senkrechte Trajektorie der Schar

$$\text{a) } R = \text{constans}$$

sei, ist hinreichende und notwendige Bedingung, daß sie in jeder ihrer Lagen  $r$  Gleichungen der Form

$$\text{b) } \sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q = f \frac{\partial R}{\partial p_e}$$

genüge, in welchen die  $s, p_e$  die Neigungen der Bahn gegen die Koordinaten  $p_e$  bezeichnen, und in welchen  $f$  eine für alle  $r$  Gleichungen identische, übrigens mit der Lage sich ändernde Funktion der  $p_e$  ist.

Wir konstruieren von der betrachteten Lage der Bahn aus eine unendlich kleine Verrückung, deren Länge  $\delta\sigma$  sei, bei deren Durchlaufung sich die  $p_e$  um  $\delta p_e$  und  $R$  um  $\delta R$  ändern möge, welche endlich mit der betrachteten Bahn den Winkel  $s, \sigma$  bilden möge. Multiplizieren wir die Gleichungen **b)** der Reihe nach mit den  $\delta p_e$  und addieren, so folgt (78a und 85):

$$\text{c) } \delta\sigma \cos s, \sigma = \sum_1^r e f \frac{\partial R}{\partial p_e} \delta p_e = f \delta R .$$

Gehört nun die Verrückung  $\delta\sigma$  einer Fläche der Schar **a)** an, nämlich derjenigen Fläche, welche die betrachtete Lage mit der Bahn gemeinsam hat, so ist  $\delta R = 0$ , also  $s, \sigma = 90^\circ$ . Die Richtung der Bahn steht daher senkrecht auf der durchschnittenen Fläche (206), und die Gleichungen **b)** bilden die hinreichenden Bedingungen dafür, daß dies in jeder Lage eintrete. Sie bilden aber auch die notwendigen Bedingungen hierfür, da, von Ausnahmefällen abgesehen, in jeder Lage nur eine einzige Richtung der gestellten Forderung genügt.

213 **Zusatz 1.** Der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen der betrachteten Schar in irgend einer Lage ist gleich

$$f dR .$$



Denn lassen wir die Verrückung  $\delta\sigma$  des vorigen Beweises nach Richtung und Länge jetzt zusammenfallen mit dem Teil der senkrechten Trajektorie, welcher zwischen beiden Flächen liegt, so fällt  $\delta\sigma$  zusammen mit dem betrachteten Abstand, der Winkel  $s, \sigma$  aber wird Null, und so folgt aus Gleichung 212 c die Behauptung.

**Zusatz 2.** Die in den Gleichungen der senkrechten Trajektorien auftretende Funktion  $f$  wird erhalten als Wurzel der Gleichung: 214

$$\frac{1}{f^2} = \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir die Werte der  $r$  Richtungscosinus nach 212 b einsetzen in die Gleichung 88, welcher sie genügen müssen. Welche Wurzel zu wählen sei, hängt davon ab, ob wir die Richtung der Trajektorie nach wachsenden Werten von  $R$  oder nach abnehmenden als positiv rechnen.

## 2. Geradeste Entfernung.

**Definition.** Geradeste Entfernung zweier Lagen eines homonomen Systems heißt die Länge einer sie verbindenden geradesten Bahn. 215

**Anmerkung.** Zwei Lagen können mehr als eine geradeste Entfernung haben. Unter diesen finden sich die Längen der kürzesten Bahnen zwischen beiden Lagen, also auch die Länge der absolut kürzesten Bahn. Wenn von der geradesten Entfernung zweier Lagen als einer eindeutig bestimmten gesprochen wird, so soll von dieser letzteren die Rede sein. 216

**Analytische Darstellung.** Die geradeste Entfernung zweier Lagen kann als Funktion der Koordinaten dieser Lagen dargestellt werden. Diejenige Lage, welche als Ausgangslage betrachtet wird, werde dauernd mit 0, ihre Koordinaten mit  $p_0$  bezeichnet; diejenige Lage, welche als Endlage betrachtet 217



wird, werde dauernd mit 1, ihre Koordinaten mit  $p_{e_1}$  bezeichnet, so daß die Richtung der geradesten Bahn stets positiv gerechnet ist von 0 gegen 1. Die geradeste Entfernung ist alsdann eine für alle Wertsysteme der  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$  definierte Funktion dieser 2r. Größen. Den analytischen Ausdruck der geradesten Entfernung, ausgedrückt in eben diesen Variablen, bezeichnen wir durch  $S$ , und nennen diesen analytischen Ausdruck auch kurz die geradeste Entfernung des Systems.

218 **Anmerkung 1.** Die Funktion  $S$  ist im allgemeinen eine mehrdeutige Funktion ihrer Unabhängigen. Von den Zweigen dieser Funktion verschwindet einer und nur einer zugleich mit verschwindendem Unterschiede zwischen den  $p_{e_1}$  und  $p_{e_0}$ . Von diesem Zweig ist (216) die Rede in solchen Aussagen, in welchen von  $S$  als von einer eindeutig bestimmten Funktion gesprochen wird.

219 **Anmerkung 2.** Die Funktion  $S$  ist symmetrisch in Hinsicht der  $p_{e_1}$  und  $p_{e_0}$  in dem Sinne, daß  $S$  seinen Wert nicht ändert, wenn die  $p_{e_1}$  und  $p_{e_0}$  für alle Werte des  $\rho$  gleichzeitig miteinander vertauscht werden.

Denn mit dieser Vertauschung vertauschen wir nur die Anfangs- und die Endlage.

220 **Bemerkung.** Wenn die geradeste Entfernung eines Systems in irgend welchen freien Koordinaten desselben gegeben ist, so sind damit die sämtlichen geradesten Bahnen des Systems in eben diesen Koordinaten gegeben, ohne daß eine weitere Kenntnis darüber nötig wäre, in welcher Weise die Lage der einzelnen materiellen Punkte des Systems von jenen Koordinaten abhängt.

Denn die geradeste Entfernung irgend zweier unendlich benachbarter Lagen des Systems ist zugleich die Länge der unendlich kleinen Verrückung zwischen ihnen; läßt sich aber diese letztere durch die gewählten Koordinaten darstellen, so trifft die Behauptung zu nach 163.

221 **Aufgabe.** Aus der geradesten Entfernung eines Systems den Ausdruck für die Länge seiner unendlich kleinen Verrückungen abzuleiten.

In  $S$  setzen wir für die  $p_{e_0}$  jetzt  $p_e$ , für die  $p_{e_1}$  jetzt  $p_e + dp_e$ , und lassen alsdann die  $dp_e$  sehr klein werden. Wir wissen bereits (57d), daß sich alsdann die Entfernung der beiden Lagen als Quadratwurzel einer homogenen quadratischen Funktion der  $dp_e$  darstellt.  $S$  selbst läßt sich also nicht in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der  $dp_e$  entwickeln, wohl aber  $S^2$ , und in dieser Entwicklung müssen die quadratischen Glieder die ersten sein, welche nicht verschwinden. Drücken wir also durch einen übergesetzten Strich aus, daß in der betreffenden Funktion die  $p_{e_0} = p_{e_1} = p_e$  gesetzt werden sollen, so erhalten wir für die Entfernung der beiden Lagen, also für die Größe der Verrückung:

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{e_1} \partial p_{e_1}} dp_e dp_e$$

und es wird also die Funktion  $a_{e\sigma}$ :

$$a_{e\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{e_1} \partial p_{e_1}}$$

Mit gleichem Rechte wird auch erhalten:

$$a_{e\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{e_0} \partial p_{e_0}}$$

Diese Werte der  $a_{e\sigma}$  kann man benutzen, um indirekt von der Funktion  $S$  zu den geradesten Bahnen zu gelangen. Die folgenden Lehrsätze bieten einen direkteren Weg zu dem gleichen Ziele dar.

**Lehrsatz.** Eine Fläche, deren sämtliche Lagen gleiche geradeste Entfernung haben von einer festen Lage, wird senkrecht durchschnitten von allen geradesten Bahnen, welche durch jene feste Lage gehen.

Es seien die  $p_{e_0}$  die Koordinaten der festen Lage, die  $p_{e_1}$  die Koordinaten einer Lage der Fläche. Wir gehen von der letzteren zu einer anderen Lage der Fläche über, für



welche die  $p_{e_i}$  sich geändert haben um  $dp_{e_i}$ . Dabei hat sich die geradeste Entfernung von der festen Lage 0 nach der Voraussetzung um Nichts geändert; nach 199 aber hat sie sich geändert um  $\sum_1^r \sqrt{a_{ee_i}} \cos s, p_{e_i} dp_{e_i}$ , wenn  $s, p_{e_i}$  den Winkel bezeichnet, welchen die geradeste Bahn in 1 mit der Richtung von  $p_e$  bildet. Es ist also:

$$\sum_1^r \sqrt{a_{ee_i}} \cos s, p_{e_i} dp_{e_i} = 0 \quad ,$$

und diese Gleichung sagt aus, daß die geradeste Bahn auf der Verrückung der  $dp_{e_i}$  senkrecht steht (85 und 78a). Da dies gilt für jede beliebige Verrückung, welche in 1 der Fläche angehört, so folgt (206) die Behauptung.

223 **Folgerung 1.** Die geradesten Bahnen, welche durch eine feste Lage hindurch gehen, sind die senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche der Bedingung genügen, daß die sämtlichen Lagen einer jeden gleiche geradeste Entfernung von jener festen Lage haben.

224 **Folgerung 2.** Die sämtlichen geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage 0 hindurch gehen, genügen den  $r$  Gleichungen:

$$a) \quad \sqrt{a_{ee_i}} \cos s, p_{e_i} = \frac{\partial S}{\partial p_{e_i}} \quad ,$$

in welchen die  $p_{e_i}$  als die Koordinaten der variablen Lage der Bahn und die  $\cos s, p_{e_i}$  als die Richtungscosinus der Bahn in dieser Lage zu betrachten sind.

Denn die Gleichungen a) sind die Gleichungen der senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche durch die Gleichung

$$b) \quad S = \text{constans}$$

dargestellt wird. Wäre nämlich  $S$  eine beliebige Funktion

der variablen Koordinaten  $p_{e_1}$ , so wären nach 212 die Gleichungen der senkrechten Trajektorien:

$$\sqrt{a_{qq_1}} \cos s, p_{q_1} = f \frac{\partial S}{\partial p_{e_1}}, \quad \text{e)}$$

und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen wäre gleich  $f dS$ . Nach der besonderen Natur unserer Funktion  $S$  (217, 222) ist aber dieser Abstand gleich  $dS$  selbst, also folgt

$$f = 1, \quad \text{d)}$$

und die allgemeinen Gleichungen e) nehmen die besondere Form a) an.

**Anmerkung 1.** Die Gleichungen 224a, welche Differentialgleichungen erster Ordnung sind, können auch angesehen werden als die Gleichungen geradester Bahnen in endlicher Form, sobald wir nämlich in denselben die  $p_{e_0}$  als die Variablen, die  $2r$  Größen  $p_{e_1}$  und  $s, p_{e_1}$  aber als Konstanten betrachten.

Denn bestimmen wir aus jenen Gleichungen eine Reihe von Lagen 0 in solcher Weise, daß bei festgehaltenen Werten der  $p_{e_1}$  auch die Werte der  $s, p_{e_1}$  unverändert bleiben, so erhalten wir solche Lagen 0, von welchen aus die nach der Lage 1 gezogenen geradesten Bahnen in dieser Lage 1 eine feste Richtung haben. Da nun aber nur eine einzige geradeste Bahn von dieser Eigenschaft möglich ist, so müssen alle so bestimmten Lagen 0 dieser einen Bahn angehören, ihre Gesamtheit bildet diese Bahn, und diese letztere wird also selbst dargestellt durch die Gleichungen 224a.

**Anmerkung 2.** Im Beweise des Lehrsatzes 222 hätten wir mit gleichem Rechte die Lage 1 als die feste, die Lage 0 als die variable Lage einführen können. Anstatt zu den Gleichungen 224a wären wir alsdann gelangt zu den Gleichungen:

$$\sqrt{a_{qq_0}} \cos s, p_{q_0} = - \frac{\partial S}{\partial p_{e_0}}. \quad \text{a)}$$



Der Unterschied im Vorzeichen der rechten Seite erklärt sich daraus, daß nunmehr das Fortschreiten von der festen Lage aus nach 217 als Fortschreiten in negativer Richtung zu bezeichnen ist. Wie die Gleichungen 224a stellen auch die Gleichungen 226a geradeste Bahnen dar. Es sind Differentialgleichungen erster Ordnung aller geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage der  $p_{e_1}$  hindurchgehen, und zugleich die endlichen Gleichungen der einen bestimmten Bahn, welche durch die Lage der  $p_{e_0}$  hindurchgeht und in dieser mit den Koordinaten die Winkel  $s, p_{e_0}$  bildet.

227 **Folgerung 3.** Die geradeste Entfernung  $S$  eines Systems genügt als Funktion der  $p_{e_0}$  der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\text{a) } \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma_0} \frac{\partial S}{\partial p_{e_0}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_0}} = 1 \quad ,$$

und ebenso als Funktion der  $p_{e_1}$  der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\text{b) } \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma_1} \frac{\partial S}{\partial p_{e_1}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_1}} = 1 \quad .$$

Denn beide Gleichungen folgen aus 214 und 224d; sie werden auch unmittelbar erhalten, indem man die Richtungs-cosinus einer geradesten Bahn, ausgedrückt durch  $S$  nach 224a oder 226a, einsetzt in die Gleichung 88, welcher die Winkel einer jeden beliebigen Richtung mit den Koordinaten genügen.

228 **Lehrsatz.** Errichtet man in allen Lagen einer beliebigen Fläche geradeste Bahnen senkrecht zur Fläche, und trägt auf allen die gleiche Länge ab, so wird die so erhaltene neue Fläche von jenen geradesten Bahnen ebenfalls senkrecht durchschnitten.

Die Lagen der ursprünglichen Fläche seien mit 0, die der neu konstruierten mit 1 bezeichnet. Es seien die  $s, p_{e_0}$  bez.  $s, p_{e_1}$  die Winkel, welche eine bestimmte der geradesten Bahnen an der ersten bez. an der zweiten Fläche mit den

Koordinaten bildet. Gehen wir von dieser geradesten Bahn zu irgend einer benachbarten über, so ändert sich die Länge der Bahn nach 199 um

$$\sum_1^r \sqrt{a_{q_1}} \cos s, p_{q_1} dp_{q_1} - \sum_1^r \sqrt{a_{q_0}} \cos s, p_{q_0} dp_{q_0} ,$$

wenn die  $dp_{q_1}$  und  $dp_{q_0}$  die Änderungen der  $p_e$  in den Lagen 1 und 0 bezeichnen. Nach der Konstruktion ist aber diese Änderung gleich Null, und ebenso ist nach der Konstruktion

$$\sum_1^r \sqrt{a_{q_0}} \cos s, p_{q_0} dp_{q_0} = 0 ,$$

da ja die Bahn auf der ursprünglichen Fläche senkrecht steht. Daher ist nun auch

$$\sum_1^r \sqrt{a_{q_1}} \cos s, p_{q_1} dp_{q_1} = 0 ,$$

und da die  $dp_{q_1}$  jede beliebige Verrückung in der Fläche der Lagen 1 bezeichnen können, so ist damit die Behauptung erwiesen.

**Folgerung 1.** Die senkrechten Trajektorien einer beliebigen Schar von Flächen, von welchen jede in allen ihren Lagen denselben senkrechten geradesten Abstand von ihren Nachbarflächen hat, sind geradeste Bahnen. 229

**Folgerung 2.** Ist  $R$  eine Funktion der  $r$  Koordinaten  $p_e$  von solcher Beschaffenheit, daß die Gleichung 230

$$R = \text{constans} \quad \text{a)}$$

eine Schar von Flächen darstellt, deren jede von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand  $dR$  hat, so sind die Gleichungen:

$$\sqrt{a_{qq}} \cos s, p_q = \frac{\partial R}{\partial p_e} \quad \text{b)}$$



die Gleichungen der senkrechten Trajektorien, also die Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind diese Gleichungen Differentialgleichungen erster Ordnung für jene Bahnen.

Denn wäre  $R$  eine ganz beliebige Funktion der  $p_e$ , so stellten die Gleichungen 212b die senkrechten Trajektorien der Schar a) vor, und es wäre nach 213 der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen gleich  $f dR$ . Nach unserer besonderen Voraussetzung ist aber dieser Abstand konstant und gleich  $dR$ , also ist  $f=1$ , und es gehen daher die Gleichungen 212b in die obigen Gleichungen b) über.

231 **Folgerung 3.** Stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, daß jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand  $dR$  hat, so genügt die Funktion  $R$  der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r e \sum_1^r \sigma b_{e\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_e} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt aus 214 und 230; sie wird auch unmittelbar erhalten, wenn wir die Richtungscosinus einer geradesten Bahn nach 230b einsetzen in die Gleichung 88, welcher die Winkel einer jeden Richtung mit den Koordinaten genügen.

232 **Lehrsatz 1. (Umkehrung von 231.)** Genügt die Funktion  $R$  der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r e \sum_1^r \sigma b_{e\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_e} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

so stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, daß

jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen gleichen senkrechten geradesten Abstand hat, und zwar einen Abstand, welcher durch die Änderung von  $R$  gemessen wird.

Denn wäre  $R$  eine ganz beliebige Funktion, so wären die senkrechten Trajektorien der Schar gegeben durch Gleichungen der Form 212b, und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen in jeder Lage wäre  $f dR$ . Aus der besonderen Voraussetzung, welcher wir die Funktion  $R$  unterwarfen, folgt aber nach 214:  $f = 1$ , und also die Behauptung.

**Lehrsatz 2.** Ist die Funktion  $R$  der  $p_e$  eine beliebige 233  
Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad , \quad \text{a)}$$

so sind die Gleichungen

$$\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos s, p_\rho = \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \quad \text{b)}$$

Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind es Differentialgleichungen erster Ordnung der durch sie dargestellten geradesten Bahnen.

Der Satz folgt unmittelbar aus 230 und 232.

**Anmerkung.** Obwohl jede Bahn, welche durch die Gleichungen 233b dargestellt wird, eine geradeste ist, so läßt sich doch nicht umgekehrt allgemein jede geradeste Bahn in dieser Form darstellen. Die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen, welche in der gegebenen Form enthalten sind, hängt vielmehr ab von der Mannigfaltigkeit, welche die Funktion  $R$  als Lösung der Differentialgleichung besitzt, d. h. von der Zahl ihrer willkürlichen Konstanten. 234

Ist aber im besondern  $R$  eine vollständige Lösung, enthält also  $R$   $r$  willkürliche Konstanten  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ , von welchen die erste die notwendig vorhandene additive Konstante bezeichne, so lassen sich alle geradesten Bahnen des Systems in der Form 233b darstellen. Denn die rechten Seiten dieser  $r$  Gleichungen (von welchen nur  $r-1$  unabhängig voneinander



sind) enthalten dann  $r-1$  Konstanten, welche hinreichen, um der dargestellten Bahn in einer willkürlichen Lage eine durch  $r-1$  unabhängige Richtungscosinus bestimmte willkürliche Richtung zu erteilen. Können wir aber eine Lage der dargestellten Bahn und ihre Richtung in dieser Lage willkürlich wählen, so können wir alle geradesten Bahnen darstellen.

235 **Lehrsatz 3.** (JACOBI'S Satz.) Es bezeichne  $R$  eine vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$\text{a) } \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

und es seien ihre willkürlichen Konstanten, von der additiven abgesehen,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ . Es geben alsdann die  $r-1$  Gleichungen

$$\text{b) } \frac{\partial R}{\partial \alpha_\tau} = \beta_\tau \quad ,$$

in welchen die  $\beta_\tau$   $r-1$  neue willkürliche Konstanten sind, die Gleichungen der geradesten Bahnen des Systems in endlicher Form.

Zum Beweise zeigen wir, daß die Bahnen, welche durch die Gleichungen **b)** dargestellt werden, senkrechte Trajektorien der Schar

$$\text{c) } R = \text{constans}$$

sind; alsdann folgt die Behauptung nach 232 und 229.

Um nun erstens die Richtung der dargestellten Bahn zu finden, differenzieren wir die Gleichungen **b)** in Richtung derselben, d. h. wir bilden jene Gleichungen für zwei um  $ds$  entfernte Lagen der Bahn, in welchen sich die  $p_\rho$  um die  $dp_\rho$  unterscheiden, subtrahieren, und dividieren durch  $ds$ . Wir erhalten so  $r-1$  Gleichungen der Form:

$$\sum_1^r \frac{\partial^2 R}{\partial p_\rho \partial \alpha_\tau} \frac{dp_\rho}{ds} = 0 \quad ,$$

oder, wenn wir in dieselben nach 79 und 78 die Richtungs- (235)  
cosinus des betrachteten Bahnelementes einführen:

$$\sum_1^r \sqrt{a_{\rho q}} \cos s, p_q \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \quad \text{d)}$$

welche Gleichungen nunmehr  $r-1$  nicht homogene, lineare Gleichungen für die  $r-1$  Verhältnisse der Richtungs-  
cosinus untereinander bleiben.

Zweitens bemerken wir, daß die Gleichung a) für alle  
Werte der Konstanten  $\alpha_\tau$  gilt; wir können sie also nach diesen  
Größen differenzieren, und indem wir dies tun, erhalten wir  
 $r-1$  Gleichungen, welche sich schreiben lassen in der Form:

$$\sum_1^r \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \quad \text{e)}$$

und welche Beziehungen darstellen, welchen die partiellen Diffe-  
rentialquotienten von  $R$  zufolge unserer besonderen Voraus-  
setzungen über diese Funktion genügen müssen.

Stellen wir nun die Gleichungen b) für die gerade betrach-  
teten Werte der  $\alpha_\tau$  und  $\beta_\tau$  überhaupt eine bestimmte Bahn  
vor, so müssen aus den Gleichungen d) eindeutig bestimmte  
Werte für die Verhältnisse der Richtungs-  
cosinus zu einem unter ihnen folgen. Ganz dieselben eindeutig bestimmten  
Werte müssen dann aber auch aus den Gleichungen e) für  
die Verhältnisse der Größen  $\partial R / \partial p_\rho$  zu einer unter ihnen  
sich ergeben. Ist also  $f$  ein noch zu bestimmender Faktor,  
so muß sein:

$$\sqrt{a_{\rho q}} \cos s, p_q = f \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \quad .$$

Demnach ist nach 212 die betrachtete Bahn die senkrechte  
Trajektorie der Schar e), was wir beweisen wollten. Der  
Faktor  $f$  wird gleich der Einheit gefunden.

Die Voraussetzung, daß die  $r-1$  Gleichungen b) für  
bestimmte Werte der  $\alpha_\tau$  und  $\beta_\tau$  eine bestimmte Bahn be-



zeichnen, würde nur dann nicht zutreffen, wenn diese Gleichungen nicht unabhängig voneinander wären. Dann aber wären auch die willkürlichen Konstanten nicht voneinander unabhängig und die Lösung wäre keine vollständige Lösung, was wir doch voraussetzen.

236 **Aufgabe.** Aus einer beliebigen vollständigen Lösung  $R$  der Differentialgleichung 235a die geradeste Entfernung  $S$  des Systems zu ermitteln.

Unter  $S$  ist also wieder zu verstehen die geradeste Entfernung zweier Lagen 0 und 1 mit den Koordinaten  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$ . In den  $r-1$  Gleichungen 235b setzen wir für die  $p_e$  das eine Mal die  $p_{e_0}$ , das andere Mal die  $p_{e_1}$ . Aus den entstehenden  $2r-2$  Gleichungen eliminieren wir die  $\beta_r$  und stellen die  $\alpha_r$  als Funktionen der  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$  dar. Diese Funktionen werden symmetrisch in bezug auf  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$ , sie geben diejenigen Werte, welche die  $\alpha_r$  haben müssen, damit die durch sie bezeichneten Bahnen durch bestimmte Lagen 0 und 1 hindurchgehen.

Wir haben nun erstens für irgend eine Lage 1 nach 224a und 233b:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{e_1}} = \left( \frac{\partial R}{\partial p_e} \right)_1$$

und zweitens für irgend eine Lage 0 nach 226a und 233b:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{e_0}} = - \left( \frac{\partial R}{\partial p_e} \right)_0$$

Setzen wir in den rechten Seiten dieser Gleichungen für die  $\alpha_r$  ihre Werte in den  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$  ein, und die  $p_e$  selbst in der ersten gleich  $p_{e_1}$ , in der zweiten gleich  $p_{e_0}$ , so erhalten wir die ersten Differentialquotienten von  $S$  nach den sämtlichen unabhängigen Variablen ausgedrückt als Funktionen dieser Variablen.  $S$  kann also dann durch einfache Integrationen gefunden werden.