Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen

urn:nbn:de:bsz:31-288857

ziehungen gewonnen werden. Für jede dieser Gleichungen, von welchen eine den Index λ haben möge, wird dann:

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\lambda\varrho}}{\partial p_\sigma} = 0 \quad .$$

Es verschwinden dann also die entsprechenden Größen π_λ aus den Gleichungen **185a**, und alle p_ϱ'' und $\pi_\varkappa'$ sind bereits eindeutig bestimmt durch die $k - l$ Werte der übrigen $\pi_\varkappa$. Im ganzen also behalten wir noch übrig $2r - 2l$ willkürliche Bestimmungsstücke; zwei sind für jede endliche Gleichung verloren gegangen.

Übrigens genügen diese $2r - 2l$ willkürlichen Konstanten immer noch, wie es sein muß, um jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Denn bestehen zwischen den p_ϱ l endliche Gleichungen, so genügt es, die Bahn so zu führen, daß zwei ihrer Lagen mit den gegebenen Lagen je $r - l$ Koordinaten gemein haben; die Übereinstimmung in Hinsicht der übrigen wird alsdann von selbst statthaben.

3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen.

190 **Lehrsatz.** In einem holonomen System ist jede geodätische Bahn eine geradeste Bahn und auch umgekehrt jede geradeste eine geodätische Bahn.

Benutzen wir für den Beweis rechtwinklige Koordinaten. Ist das System ein holonomes, so läßt sich den i Bedingungsgleichungen desselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in geeigneter Ordnung eine solche Form geben, in welcher jede derselben ohne weiteres integrierbar ist, in welcher nämlich die linke Seite einer jeden mit dem exakten Differentiale eines der i Integrale der Gleichungen zusammenfällt. Für jedes Wertsystem der ι, μ, ν ist alsdann:

a) $$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad ,$$

und die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen werden alsdann nach **181a**:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota' = 0 \quad . \tag{b}$$

Dieselben unterscheiden sich offenbar nur in der Bezeichnung von den Gleichungen der geradesten Bahnen (**155d**):

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad , \tag{c}$$

da weder die ξ_ι noch die Ξ_ι in den übrigen zu befriedigenden Gleichungen vorkommen. Jede mögliche Bahn, welche nach geeigneter Bestimmung der ξ_ι den ersten dieser Gleichungen genügt, genügt den zweiten, indem man setzt $\Xi_\iota = \xi_\iota'$, und nicht minder ist jede Lösung der zweiten zugleich eine Lösung der ersten. Die Befriedigung der Gleichungen **b)** und **c)** ist aber schon hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn eine geodätische, bez. eine geradeste sei.

Folgerung 1. In einem holonomen System ist aus einer möglichen Lage in einer möglichen Richtung nur eine einzige geodätische Bahn möglich (**161**). **191**

Folgerung 2. In einem holonomen System ist zwischen irgend zwei möglichen Lagen immer mindestens eine geradeste Bahn möglich (**173**). **192**

Lehrsatz. Ist in einem materiellen System jede geodätische Bahn zugleich eine geradeste Bahn, so ist das System ein holonomes. **193**

Denn von jeder möglichen Lage aus ist in gegebener Richtung nach **161** nur eine einzige geradeste, also nach Voraussetzung nur eine einzige geodätische Bahn möglich. Gleichwohl ist nach **173** jede mögliche Lage durch eine dieser Bahnen zu erreichen. Es ist also die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems gleich der Zahl seiner unabhängigen Koordinaten, also nach **146** das System ein holonomes.

194 **Folgerung.** In einem System, welches kein holonomes ist, ist im allgemeinen eine geodätische Bahn nicht zugleich eine geradeste Bahn.

Dies geht übrigens schon daraus hervor, daß in jeder Richtung nur eine geradeste, aber viele geodätische Bahnen möglich sind (**161** und **187**).

195 **Bemerkung.** In einem Systeme, welches kein holonomes ist, ist eine geradeste Bahn im allgemeinen nicht zugleich eine geodätische Bahn.

Die Behauptung ist bewiesen, sobald Beispiele von Systemen vorgezeigt werden, in welchen sich die geradesten Bahnen nicht unter den geodätischen finden. Nehmen wir deshalb der Einfachheit halber an, es bestehe nur eine einzige nicht integrierbare Bedingungsgleichung zwischen den r Koordinaten p_ϱ des Systems, und es sei dieselbe:

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{1\varrho} p'_\varrho = 0 \quad .$$

Machen wir nun die Annahme, es sei jede geradeste Bahn zugleich eine geodätische. Dann ließe sich für jedes mögliche Wertsystem der p_ϱ und p'_ϱ mindestens ein Wertsystem der p''_ϱ so bestimmen, daß zugleich den Gleichungen **158d** und **185a** genügt ist. Es müßten daher auch für alle möglichen p_ϱ und p'_ϱ die durch paarweise Subtraktion jener Gleichungen zu erhaltenden Gleichungen

$$p_{1\varrho}(\Pi_1 - \pi'_1) + \pi_1 \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = 0$$

zu befriedigen sein. Dies sind aber r Gleichungen für die eine Größe $(\Pi_1 - \pi'_1)/\pi_1$, und sie sind nur verträglich miteinander, wenn für alle Wertpaare der ϱ und τ

$$\frac{1}{p_{1\varrho}} \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = \frac{1}{p_{1\tau}} \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial p_{1\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma$$

ist. Drücken wir in $r-1$ voneinander unabhängigen dieser

Gleichungen eine der Größen p'_ϱ mit Hilfe von Gleichung **a)** durch die übrigen aus, so sind die Verhältnisse zwischen den letzteren nun völlig willkürliche Größen. Der Koeffizient jeder einzelnen dieser Größen muß also für sich verschwinden. Wir erhalten so als notwendige Folge unserer Annahme im ganzen $(r-1)^2$ Gleichungen zwischen den r Funktionen $p_{1\varrho}$ und ihren r^2 partiellen ersten Differentialquotienten. In besonderen Fällen können diese Gleichungen sämtlich befriedigt sein, denn sie sind befriedigt, wenn die Gleichung **a)** integrabel ist. Aber im allgemeinen haben wir kein Recht, die Funktionen $p_{1\varrho}$ auch nur einer einzigen Bedingung unterworfen vorauszusetzen, und im allgemeinen war also unsere Annahme unzulässig. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Ergebnis (190 bis **195**). In holonomen Systemen decken **196** sich die Begriffe der geradesten und der geodätischen Bahnen dem Inhalt nach vollständig; in nichtholonomen Systemen schließt keiner dieser Begriffe den andern ein, sondern beide haben im allgemeinen vollständig verschiedenen Inhalt.

Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen.

Vorbemerkungen.

1. In diesem Abschnitt soll nur von holonomen Systemen **197** die Rede sein und unter einem System schlechthin also ein holonomes verstanden werden. Es kann daher, und es soll vorausgesetzt werden, daß die benutzten Koordinaten p_ϱ des Systems sämtlich freie Koordinaten sind. Die Zahl dieser Koordinaten ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, also unabhängig von unserer Willkür; wir bezeichnen sie dauernd mit r.

2. Geradeste und geodätische Bahnen fallen in die- **198** sem Abschnitt zusammen (196), und die gemeinsamen Diffe-