Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

2. Kürzeste und geodätische Bahnen

urn:nbn:de:bsz:31-288857

als Funktionen der p_ϱ vollständig bestimmen. Es genügt vielmehr, daß neben den Bedingungsgleichungen des Systems in den p_ϱ die $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ der p_ϱ bekannt gegeben seien.

Denn die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen **158d** können explizite hingeschrieben werden, sobald nur neben den $p_{\varkappa\varrho}$ die $a_{\varrho\sigma}$ als Funktionen der p_ϱ gegeben sind.

164 **Bemerkung 2.** Um die geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen man durch die p_ϱ bezeichnet hat, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ angeben zu können, genügt neben der Kenntnis der Bedingungsgleichungen zwischen den p_ϱ die Kenntnis der Länge einer jeden möglichen unendlich kleinen Verrückung als Funktion eben jener Koordinaten p_ϱ und deren Änderungen.

Denn ist ds der Ausdruck jener Länge in der verlangten Form, so ist (**57d**)

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ds^2}{\partial dp_\varrho \partial dp_\sigma} \quad .$$

165 **Bemerkung 3.** Um den Wert der Krümmung selbst zu kennen in jeder Lage einer geradesten Bahn, genügt indessen die Kenntnis der $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ nicht. Es muß hinzukommen die Kenntnis der $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ Funktionen $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ (**108**).

Die Kenntnis der Lagen aller einzelnen Punkte als Funktionen der p_ϱ ist auch zur Ermittelung der Krümmung selbst nicht erforderlich.

2. Kürzeste und geodätische Bahnen.

166 **Definition 1.** Kürzeste Bahn eines materiellen Systems zwischen zweien seiner Lagen heißt eine mögliche Bahn zwischen diesen Lagen, deren Länge kleiner ist als die Länge irgend einer anderen, ihr unendlich benachbarten Bahn zwischen denselben Lagen.

Bemerkungen dazu.

1. Es ist durch die Definition nicht ausgeschlossen, und es kann in der Tat eintreten, daß es mehrere kürzeste Bahnen zwischen zwei Lagen gibt. Die kürzeste unter diesen heißt die absolut kürzeste Bahn. Sie ist zugleich die kürzeste Bahn, welche überhaupt zwischen den beiden Lagen möglich ist. 167

2. Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine kürzeste Bahn möglich. 168

Denn mögliche Bahnen sind zwischen möglichen Lagen stets vorhanden (**114**), unter ihnen also eine absolut kürzeste, welche also auch kürzer ist als ihre Nachbarn, deren sie nach der vorausgesetzten Stetigkeit (**121**, **115**) besitzen muß, welche also eine kürzeste Bahn ist.

3. Eine kürzeste Bahn zwischen zwei Lagen ist zugleich eine kürzeste Bahn zwischen irgend zwei der ihr angehörigen Lagen. Jeder Teil einer kürzesten Bahn ist wieder eine kürzeste Bahn. 169

4. Die Länge einer kürzesten Bahn unterscheidet sich nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung von der Länge aller benachbarten Bahnen zwischen den gleichen Endlagen. Als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung gelten dabei die Längen der Verrückungen, welche nötig sind, um die benachbarten Bahnen in die kürzeste überzuführen. 170

Definition 2. Geodätische Bahn eines materiellen Systems heißt jede Bahn, deren Länge zwischen irgend zweien ihrer Lagen sich nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung unterscheidet von der Länge irgendwelcher unendlich benachbarter Bahnen zwischen den gleichen Lagen. 171

Bemerkungen dazu.

1. Jede kürzeste Bahn zwischen irgend zwei Lagen ist eine geodätische Bahn. 172

Es enthält also auch die Definition **171** nicht etwa einen inneren Widerspruch, sondern es gibt Bahnen, welche dieser Definition genügen.

173 **2.** Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine geodätische Bahn möglich (**168** und **172**).

174 **3.** Eine geodätische Bahn ist nicht notwendig zugleich kürzeste Bahn zwischen irgend zweien ihrer Lagen.

Es kann aus den Definitionen nicht gefolgert werden, daß jede geodätische Bahn auch kürzeste Bahn ist, und einfache Beispiele zeigen, daß es in der Tat geodätische Bahnen gibt, welche nicht zugleich kürzeste Bahnen zwischen ihren Endlagen sind. Solche Beispiele können bereits der Geometrie des einzelnen materiellen Punktes, also der gewöhnlichen Geometrie entnommen, und also aus dieser als bekannt vorausgesetzt werden.

175 **4.** Gibt es zwischen zwei Lagen nur eine einzige geodätische Bahn, so ist dieselbe eine kürzeste, und zwar die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn das Gegenteil würde nach **168** und **172** der Voraussetzung widersprechen.

176 **5.** Eine geodätische Bahn ist stets kürzeste Bahn zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten, übrigens noch endlich voneinander entfernten ihrer Lagen.

Es möge zwischen zwei beliebigen Lagen der betrachteten geodätischen Bahn noch eine Anzahl weiterer geodätischer Bahnen geben. Mit einer dieser Bahnen muß die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen zusammenfallen (**172**). Nähern wir nun die Lagen einander längs der betrachteten geodätischen Bahn, so nähert sich die Länge dieser Bahn und zugleich die Länge der absolut kürzesten Bahn der Null, während die übrigen geodätischen Bahnen endlich bleiben. Mindestens von einem gewissen endlichen Abstand der Lagen an muß also die geodätische Bahn, längs welcher die beiden Lagen sich nähern, mit der absolut kürzesten unter ihnen zusammenfallen.

Analytische Darstellung. Damit eine Bahn eine geodätische Bahn sei, ist die notwendige und hinreichende analytische Bedingung, daß das Integral des Bahnelements (99), nämlich 177

$$\int ds \quad ,$$

genommen zwischen irgend zwei Lagen der Bahn, nicht variiere, wenn auch den Koordinaten der Lagen der Bahn beliebige stetige Variationen erteilt werden, vorausgesetzt nur, daß 1) diese Variationen verschwinden an den jedesmaligen Grenzlagen des Integrals, und daß 2) auch noch nach Ausführung der Variation die Koordinaten und ihre Differentiale den Bedingungsgleichungen des Systems genügen. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergibt sich ein Satz von Differentialgleichungen, denen die Koordinaten der Bahn, gedacht als Funktionen einer beliebigen Variabelen, genügen müssen, und welche also die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen sind.

Daß jene Differentialgleichungen für alle Punkte einer möglichen Bahn erfüllt seien, ist nach **172** zugleich die notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine kürzeste sei, und jene Gleichungen sind daher zugleich die Differentialgleichungen der kürzesten Bahnen. Das Verschwinden der Variation des Integrals ist aber noch nicht hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn zwischen seinen Endlagen eine kürzeste sei. Vielmehr ist hierzu weiter erforderlich, daß für jede zulässige Variation der Koordinaten eine zweite Variation des Integrals einen wesentlich positiven Wert habe. Für hinreichend benachbarte Lagen einer Bahn, welche den Differentialgleichungen genügt, ist diese Bedingung nach **176** stets von selber erfüllt. 178

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen. 179

Die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten x_ν, welche wir zunächst als Funktionen einer beliebigen Variabelen ansehen, sollen vor und nach der Variation den i Gleichungen

(179) a) $$\sum_{1}^{3n} {}^{\nu} x_{\iota\nu}\, dx_\nu = 0$$

genügen (**128**). Die $3n$ Variationen δx_ν sind also gebunden an die i Gleichungen, welche aus jenen durch Variation folgen, nämlich:

b) $$\sum_{1}^{3n} {}^{\nu} x_{\iota\nu}\, d\delta x_\nu + \sum_{1}^{3n} {}^{\nu} \sum_{1}^{3n} {}^{\mu} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu\, dx_\nu = 0 \quad .$$

Da die Länge ds des Bahnelements nicht von den x_ν, sondern nur von den dx_ν abhängt, so ist seine Variation

$$\delta ds = \sum_{1}^{3n} {}^{\nu} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \delta dx_\nu = \sum_{1}^{3n} {}^{\nu} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} d\delta x_\nu \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c) $$\delta \int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Nach den Regeln der Variationsrechnung multiplizieren wir jede der Gleichungen **b)** mit einer nachträglich zu bestimmenden Funktion der x_ν, welche für die ιte Gleichung mit ξ_ι bezeichnet werden möge, und addieren die Summe der linken Seiten der entstandenen Gleichungen, welche Summe gleich Null ist, zu dem variierten Element des Integrals. Durch partielle Integration schaffen wir die Differentiale der Variationen fort; endlich setzen wir den Faktor einer jeden der willkürlichen Funktionen δx_ν gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Differentialgleichungen der Form:

d) $$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\right) + \sum_{1}^{i} {}^{\iota} x_{\iota\nu}\, d\xi_\iota - \sum_{1}^{i} {}^{\iota} \sum_{1}^{3n} {}^{\mu} \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right) \xi_\iota\, dx_\mu = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **a)** $3n+i$ Gleichungen für die $3n+i$ Funktionen x_ν und ξ_ι bilden. Diese Differentialgleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation des Integrals; jede geodätische Bahn genügt also denselben, und sie stellen also die gesuchte Lösung dar.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **179d** sind aber 180
auch hinreichende Bedingungen dafür, daß die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation des Integrals $\int ds$ gleich den Gliedern, welche bei der partiellen Integration vor das Integralzeichen treten; es wird also in der üblichen Bezeichnungsweise, wenn mit 0 die untere, mit 1 die obere Grenze angedeutet wird:

$$\delta \int ds = \sum_{1}^{3n}{}^{\nu} \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_{1}^{i}{}^{\iota}\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota \right) \delta x_\nu \right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δx_ν verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzwerten, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte hinreichende analytische Bedingung nach **177** erfüllt.

Anmerkung 2. Benutzen wir die laufende Länge der 181
Bahn als unabhängige Variabele, so nehmen unter Berücksichtigung von **55** und **100** die Gleichungen **179d** nach Division durch ds die Formen an:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_{1}^{i}{}^{\iota}\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota' - \sum_{1}^{i}{}^{\iota} \sum_{1}^{3n}{}^{\mu} \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \right) \xi_\iota\, x_\mu' = 0 \quad , \qquad \textbf{a)}$$

welche zusammen mit den i durch Differentiation von **179a** erhaltenen Gleichungen:

$$\sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\, x_{\iota\nu}\, x_\nu'' + \sum_{1}^{3n}{}^{\nu} \sum_{1}^{3n}{}^{\mu} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, x_\nu'\, x_\mu' = 0 \qquad \textbf{b)}$$

$3n + i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n + i$ Größen x_ν'' und ξ_ι' darstellen, und also erlauben, diese Größen als eindeutige Funktionen der Größen x_ν, x'_ν und ξ_ι anzugeben.

182 **Anmerkung 3.** Unter Benutzung von **72** kann den Gleichungen **181a** die Form gegeben werden:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\,\xi'_\iota + \sum_1^i{}_\iota \sum_1^{3n}{}_\mu \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi'_\iota x'_\mu \quad .$$

Die Gleichungen **181a** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn bei gegebenem Anfang derselben beständig ändern muß, damit die Bahn eine geodätische bleibe; und zwar gibt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

183 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darzustellen.

Die r Koordinaten p_ϱ des Systems sind gebunden an die k Gleichungen (**130**):

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0$$

und also die r Variationen δp_ϱ an die Gleichungen:

b) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\,\delta p_\sigma\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung hängt jetzt nicht allein von den Differentialen dp_ϱ, sondern auch von den Werten der p_ϱ selbst ab, es ist also:

$$\delta ds = \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\, d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho}\,\delta p_\varrho \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c) $$\delta\int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Indem wir nach den Regeln der Variation verfahren, genau wie in **179**, und indem wir mit $\pi_\varkappa$ den Faktor der $\varkappa$ ten Gleichung **b)** bezeichnen, erhalten wir r Differentialgleichungen von der Form:

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\right)-\frac{\partial ds}{\partial p_\varrho}+\sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, d\pi_\varkappa \qquad \mathbf{d)}$$

$$-\sum_1^k{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa\, dp_\sigma = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **a)** $r+k$ Differentialgleichungen für die $r+k$ Funktionen p_ϱ und $\pi_\varkappa$ der unabhängigen Variabelen bilden. Diese Gleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation, sind also erfüllt in allen Lagen einer geodätischen Bahn; sie enthalten demnach die Lösung der gestellten Aufgabe.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **183d** sind aber auch hinreichende Bedingungen dafür, daß die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation der Bahnlänge (vergl. **180**): 184

$$\delta\int ds=\sum_1^r{}_\varrho\left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}+\sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\,\pi_\varkappa\right)\delta p_\varrho\right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δp_ϱ verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzlagen, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte analytische Bedingung erfüllt (**177**).

Anmerkung 2. Wählen wir die Bahnlänge als unabhängige Variabele, indem wir die Gleichungen **183d** durch ds dividieren und für ds seinen Wert in den p_ϱ und dp_ϱ nach **57d** einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen der geodätischen Bahnen in der Form der r Gleichungen: 185

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned}&\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p_\sigma'' + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right) p_\sigma' p_\tau' \\ &\quad + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \pi_\varkappa' - \sum_1^k{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa p_\sigma' = 0 \quad ,\end{aligned}\right.$$

welche zusammen mit den k aus **183a** abgeleiteten Gleichungen

$$\text{b)} \qquad \sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} p_\varrho'' + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p_\varrho' p_\sigma' = 0$$

$r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen p_ϱ'' und $\pi_\varkappa'$ bilden, also gestatten, diese Größen als eindeutige Funktionen der p_ϱ, p_ϱ' und $\pi_\varkappa$ anzugeben.

186 **Anmerkung 8.** Indem wir bei der Einführung der Bahnlänge als unabhängiger Variabele die Gleichung **92** berücksichtigen, erhalten wir die Gleichungen **185a** in der Form:

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p_\sigma' p_\tau' - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} \pi_\varkappa' + \sum_1^r{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa p_\sigma' \quad .$$

Jene Gleichungen geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn mit Durchlaufung ihrer Länge ändern muß, damit die Bahn beständig eine geodätische bleibe; und zwar gibt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

187 **Bemerkung 1.** Eine geodätische Bahn ist durch Lage und Richtung eines ihrer Elemente noch nicht bestimmt, sondern aus einer gegebenen Lage in gegebener Richtung ist im allgemeinen eine unendliche Anzahl geodätischer Bahnen möglich.

Sind uns für eine Lage der Bahn die p_ϱ, p_ϱ' und die k Größen $\pi_\varkappa$ gegeben, so sind sie nach **185** auch für das nächste Element eindeutig bestimmt, und die Fortsetzung der Bahn ist also nur in eindeutig bestimmter Weise möglich. Die Angabe der Richtung der Bahn in jener gegebenen Lage aber liefert nur die Größen p_ϱ und p'_ϱ, und genügt also nicht zur Festlegung der Bahn, sondern läßt, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, noch eine $k$fache Unendlichkeit geodätischer Bahnen zu.

Bemerkung 2. Wenn die Differentialgleichungen des be- 188
trachteten Systems kein Integral zulassen, also im allgemeinen Falle, können von den $2r$ Größen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und die Richtung in dieser bestimmen, $2r-k$ willkürlich angenommen werden, nämlich die r Größen p_ϱ und $r-k$ der Größen p'_ϱ. Jene $2r-k$ willkürlichen Werte, zusammen mit den k willkürlichen Werten der $\pi_\varkappa$ in jener Lage können als die $2r$ willkürlichen Konstanten angesehen werden, welche zusammen mit den Differentialgleichungen **185a** eine geodätische Bahn bestimmen, und welche in den Integralen jener Gleichungen auch vorhanden sein müssen, da es nach **173** möglich sein soll, jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Lassen nämlich die Differentialgleichungen des Systems keine endliche Beziehung zwischen den p_ϱ ableiten, so ist jedes denkbare Wertsystem dieser Größen auch ein mögliches Wertsystem; eine willkürliche Anfangs- und Endlage sind also zusammen durch $2r$ willkürliche Koordinatenwerte bestimmt.

Bemerkung 3. Für jedes Integral, welches die Differential- 189
gleichungen des materiellen Systems zulassen, vermindert sich die Zahl der Konstanten, welche eine geodätische Bahn eindeutig bestimmen, um zwei.

Lassen sich nämlich aus den Bedingungsgleichungen des Systems l endliche Gleichungen zwischen den p_ϱ herleiten, so können von den r Koordinaten p_ϱ nur noch $r-l$ willkürlich angenommen werden, von den $2r$ Größen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und eine Richtung in ihr bestimmen, also nur noch $2r-l-k$. Ferner lassen sich in diesem Falle die Differentialgleichungen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in solche Form bringen, daß l derselben unmittelbar integrabele Gleichungen darstellen, nämlich diejenigen Gleichungen, welche durch Differentiation der l endlichen Beziehungen gewonnen werden. Für jede dieser Gleichungen, von welchen eine den Index λ haben möge, wird dann:

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\lambda\varrho}}{\partial p_\sigma} = 0 \quad .$$

Es verschwinden dann also die entsprechenden Größen π_λ aus den Gleichungen **185a**, und alle p_ϱ'' und $\pi_\varkappa'$ sind bereits eindeutig bestimmt durch die $k-l$ Werte der übrigen $\pi_\varkappa$. Im ganzen also behalten wir noch übrig $2r-2l$ willkürliche Bestimmungsstücke; zwei sind für jede endliche Gleichung verloren gegangen.

Übrigens genügen diese $2r-2l$ willkürlichen Konstanten immer noch, wie es sein muß, um jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Denn bestehen zwischen den p_ϱ l endliche Gleichungen, so genügt es, die Bahn so zu führen, daß zwei ihrer Lagen mit den gegebenen Lagen je $r-l$ Koordinaten gemein haben; die Übereinstimmung in Hinsicht der übrigen wird alsdann von selbst statthaben.

3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen.

190 **Lehrsatz.** In einem holonomen System ist jede geodätische Bahn eine geradeste Bahn und auch umgekehrt jede geradeste eine geodätische Bahn.

Benutzen wir für den Beweis rechtwinklige Koordinaten. Ist das System ein holonomes, so läßt sich den i Bedingungsgleichungen desselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in geeigneter Ordnung eine solche Form geben, in welcher jede derselben ohne weiteres integrierbar ist, in welcher nämlich die linke Seite einer jeden mit dem exakten Differentiale eines der i Integrale der Gleichungen zusammenfällt. Für jedes Wertsystem der ι, μ, ν ist alsdann:

a) $$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad ,$$