Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

homogene lineare Funktionen der übrigen $r-k$ und diese Werte einsetzen in die Gleichung:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, d\bar{p}_\varrho \, dp'_\varrho = 0 \quad .$$

Die in dieser Gleichung noch vorhandenen dp'_ϱ sind nun völlig willkürlich, es muß also der Faktor einer jeden dieser Größen verschwinden. Dies gibt $r-k$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $d\bar{p}_\varrho$, welche gestatten, $r-k$ derselben als eindeutige, weil lineare Funktionen der übrigen k darzustellen.

150 **Umkehrung.** Steht eine denkbare Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines Systems, so lassen sich die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ derselben nach den p_ϱ stets durch passende Bestimmung von k Größen $\gamma_\varkappa$ darstellen in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad .$$

Bestimmen wir nämlich die $\gamma_\varkappa$ aus irgendwelchen k dieser Gleichungen und berechnen mit diesen Werten die sämtlichen Komponenten, so müssen wir auf die gegebenen Werte der $d\bar{p}_\varrho$ kommen. Denn die so berechnete Verrückung steht nach 148 senkrecht auf allen möglichen und hat mit der gegebenen Verrückung k Komponenten gemein, sie hat also mit derselben nach 149 alle r Komponenten nach den p_ϱ gemein.

Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme.

I. Geradeste Bahnen.

Definitionen.

151 1. Ein Bahnelement eines materiellen Systems heißt gerader als ein anderes, wenn es eine geringere Krümmung hat.

152 2. Geradestes Bahnelement nennen wir ein mögliches

Bahnelement, welches gerader ist als alle anderen möglichen Bahnelemente, welche mit ihm die Lage und die Richtung gemein haben.

3. Eine Bahn, deren sämtliche Elemente geradeste Ele- 153
mente sind, heißt eine geradeste Bahn.

Analytische Darstellung. Alle Bahnelemente, unter wel- 154
chen ein geradestes Bahnelement das geradeste ist, haben Lage und Richtung, also die Werte der Koordinaten und der ersten Differentialquotienten der Koordinaten nach der unabhängigen Variabeln gemein. Die Krümmung ist aber, außer durch jene Werte, auch noch mitbestimmt durch die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten. Durch die Werte dieser also unterscheiden sich jene Bahnelemente, und es müssen also für das geradeste Bahnelement die zweiten Differentialquotienten solche Funktionen der Koordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten sein, welche die Krümmung zu einem Minimum machen.

Die Gleichungen, welche diese Bedingung ausdrücken, müssen erfüllt sein für alle Lagen einer geradesten Bahn, sie sind also zugleich die Differentialgleichungen einer solchen Bahn.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geradesten 155
Bahnen eines materiellen Systems darzustellen in den rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Es möge als unabhängige Variabele die laufende Bahnlänge gewählt werden. Da nur mögliche Bahnen in Betracht zu ziehen sind, unterliegen die $3n$ Größen x'_ν nach **128** und **100** i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x'_\nu = 0 \quad . \tag{a}$$

Also unterliegen die $3n$ Größen x''_ν i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x''_\nu + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, x'_\nu\, x'_\mu = 0 \ , \tag{b}$$

welche durch Differentiation aus jenen folgen.

Unter der Voraussetzung, daß diesen Gleichungen **b)** nicht widersprochen werde, sollen die Größen x''_ν so bestimmt werden, daß die Krümmung c (106) oder, was dasselbe sagt, daß der Wert von $\frac{1}{2}c^2$, nämlich

$$\textbf{c)} \qquad \frac{1}{2}\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \frac{m_\nu}{m} x''^2_\nu \quad ,$$

ein Minimum werde.

Nach den Regeln der Differentialrechnung verfahren wir wie folgt: Wir multiplizieren jede der Gleichungen **b)** mit einem nachträglich zu bestimmenden Faktor, welcher für die ι te Gleichung Ξ_ι heißen möge; wir addieren die partiellen Differentialquotienten der linken Seiten der entstandenen Gleichungen nach einer jeden der Größen x''_ν zu dem nach der gleichen Größe genommenen partiellen Differentialquotienten der Form **c)**, welche zu einem Minimum zu machen ist; wir setzen schießlich die entstandenen Aggregate gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Gleichungen von der Form:

$$\textbf{d)} \qquad \frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{1}^{i}{}_{\iota} x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **b)** $3n+i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n+i$ Größen x''_ν und Ξ_ι ergeben, und aus welchen sich diese Größen und dann aus **c)** der Wert der kleinsten Krümmung selbst ergeben. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist also notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei, und die Gleichungen **d)** sind also die verlangten Differentialgleichungen.

156 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **d)** sind aber auch die hinreichenden Bedingungen, zunächst für das Eintreten eines Minimums. Denn die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 c^2}{\partial x''_\nu\, \partial x''_\mu}$$

verschwinden, sobald ν und μ verschieden sind, und sind notwendig positiv, sobald ν und μ gleich sind. Der Wert der Krümmung läßt also keine anderen ausgezeichneten Werte zu, als allein ein Minimum.

Die Erfüllung der Gleichungen **d)** für alle Lagen einer möglichen Bahn ist demnach auch hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei.

Anmerkung 2. Unter Berücksichtigung von **72** können die Gleichungen **d)** in der Form geschrieben werden: 157

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\,\Xi_\iota \quad .$$

Die Gleichungen **d)** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge beständig ändern muß, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar gibt eine jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung der Bahn gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

Aufgabe 2. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten des Systems auszudrücken. 158

Wir wählen wieder als unabhängige Variabele die Bahnlänge. Die Koordinaten p_ϱ und ihre Differentialquotienten p'_ϱ genügen (**130**) den k Gleichungen

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, p'_\varrho = 0 \quad , \qquad \textbf{a)}$$

also die Größen p''_ϱ den Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} p''_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p'_\varrho p'_\sigma = 0 \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Unter allen Werten der p''_ϱ, welche diesen Gleichungen genügen, sind diejenigen zu bestimmen, welche den Wert der

Krümmung c oder, was auf dasselbe hinausläuft, den Wert von $\frac{1}{2}c^2$, also die halbe rechte Seite der Gleichung **108 c** zu einem Minimum machen. Verfahren wir nach den Regeln der Differentialgleichung wie in **155**, und nennen wir $\Pi_\varkappa$ den Faktor, mit welchem wir die $\varkappa$te der Gleichungen **b)** multiplizieren, so erhalten wir als notwendige Bedingungen für das Minimum r Gleichungen von der Form:

$$\text{d)} \quad \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) p'_\sigma p'_\tau + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \Pi_\varkappa = 0 \quad ,$$

in welchen nämlich dem ϱ für jede Gleichung ein bestimmter Wert von 1 bis r zu erteilen ist. Zusammen mit den Gleichungen **b)** bilden sie $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen p''_ϱ und $\Pi_\varkappa$, aus welchen sich diese Größen und dann nach **108** die kleinste Krümmung bestimmen lassen. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist die notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei.

159 **Anmerkung 1.** Die Erfüllung der Gleichungen **d)** ist aber auch die hinreichende Bedingung für das Eintreten eines Minimums und also einer geradesten Bahn. Denn der Ausdruck **108** ist nur eine Transformation des Ausdrucks **106** für die Krümmung; wie dieser (**156**) läßt daher auch jener nur einen einzigen ausgezeichneten Wert, und zwar ein Minimum zu.

160 **Anmerkung 2.** Nach **75** haben wir:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p'_\sigma \quad ,$$

also ist:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho) = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} p'_\sigma p'_\tau \quad .$$

Es lassen sich daher die Gleichungen **158d** auch schreiben in der Form:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho) = \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p'_\sigma p'_\tau - \sum_1^k{}_\varkappa p_{\varkappa\varrho} \Pi_\varkappa \quad .$$

Die Gleichungen **158d** geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge ändern muß, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar gibt jetzt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

Lehrsatz. Aus einer gegebenen Lage in einer gegebenen Richtung ist stets eine und nur eine geradeste Bahn möglich. 161

Denn ist eine Lage und eine Richtung in ihr gegeben, so geben die Gleichungen **155d** oder **158d** stets bestimmte, und zwar eindeutig bestimmte Werte für die Änderung der Richtung; es ist also durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt die Anfangslage und die Richtung im nächsten Bahnelement, also auch die im Folgenden, und so fort ins Unendliche.

Folgerung. Es ist im allgemeinen nicht möglich, von einer beliebigen Lage eines gegebenen Systems zu einer beliebigen anderen Lage eine geradeste Bahn zu ziehen. 162

Denn die Mannigfaltigkeit der möglichen Verrückungen aus einer Lage ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, die Mannigfaltigkeit der möglichen Richtungen in einer Lage und daher die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen aus ihr also um die Einheit kleiner. Die Mannigfaltigkeit der Lagen, welche auf geradesten Bahnen von einer gegebenen Lage aus zu erreichen sind, ist also wieder gleich der Zahl der Freiheiten. Aber die Mannigfaltigkeit der möglichen Lagen kann der Zahl der benutzten Koordinaten gleich sein, und ist daher im allgemeinen größer als jene.

Bemerkung 1. Um alle geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen durch die p_ϱ bezeichnet sind, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ darstellen zu können, ist nicht die Kenntnis irgendwelcher $3n$ Funktionen erforderlich, welche die Lagen der einzelnen Punkte des Systems 163 als Funktionen der p_ϱ vollständig bestimmen. Es genügt vielmehr, daß neben den Bedingungsgleichungen des Systems in den p_ϱ die $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ der p_ϱ bekannt gegeben seien.

Denn die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen **158d** können explizite hingeschrieben werden, sobald nur neben den $p_{\varkappa\varrho}$ die $a_{\varrho\sigma}$ als Funktionen der p_ϱ gegeben sind.

164 **Bemerkung 2.** Um die geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen man durch die p_ϱ bezeichnet hat, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ angeben zu können, genügt neben der Kenntnis der Bedingungsgleichungen zwischen den p_ϱ die Kenntnis der Länge einer jeden möglichen unendlich kleinen Verrückung als Funktion eben jener Koordinaten p_ϱ und deren Änderungen.

Denn ist ds der Ausdruck jener Länge in der verlangten Form, so ist (**57d**)

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 ds^2}{\partial dp_\varrho \partial dp_\sigma} \quad .$$

165 **Bemerkung 3.** Um den Wert der Krümmung selbst zu kennen in jeder Lage einer geradesten Bahn, genügt indessen die Kenntnis der $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ nicht. Es muß hinzukommen die Kenntnis der $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ Funktionen $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ (**108**).

Die Kenntnis der Lagen aller einzelnen Punkte als Funktionen der p_ϱ ist auch zur Ermittelung der Krümmung selbst nicht erforderlich.

2. Kürzeste und geodätische Bahnen.

166 **Definition 1.** Kürzeste Bahn eines materiellen Systems zwischen zweien seiner Lagen heißt eine mögliche Bahn zwischen diesen Lagen, deren Länge kleiner ist als die Länge irgend einer anderen, ihr unendlich benachbarten Bahn zwischen denselben Lagen.

Bemerkungen dazu.

1. Es ist durch die Definition nicht ausgeschlossen, und es kann in der Tat eintreten, daß es mehrere kürzeste Bahnen zwischen zwei Lagen gibt. Die kürzeste unter diesen heißt die absolut kürzeste Bahn. Sie ist zugleich die kürzeste Bahn, welche überhaupt zwischen den beiden Lagen möglich ist. 167

2. Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine kürzeste Bahn möglich. 168

Denn mögliche Bahnen sind zwischen möglichen Lagen stets vorhanden (**114**), unter ihnen also eine absolut kürzeste, welche also auch kürzer ist als ihre Nachbarn, deren sie nach der vorausgesetzten Stetigkeit (**121**, **115**) besitzen muß, welche also eine kürzeste Bahn ist.

3. Eine kürzeste Bahn zwischen zwei Lagen ist zugleich eine kürzeste Bahn zwischen irgend zwei der ihr angehörigen Lagen. Jeder Teil einer kürzesten Bahn ist wieder eine kürzeste Bahn. 169

4. Die Länge einer kürzesten Bahn unterscheidet sich nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung von der Länge aller benachbarten Bahnen zwischen den gleichen Endlagen. Als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung gelten dabei die Längen der Verrückungen, welche nötig sind, um die benachbarten Bahnen in die kürzeste überzuführen. 170

Definition 2. Geodätische Bahn eines materiellen Systems heißt jede Bahn, deren Länge zwischen irgend zweien ihrer Lagen sich nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung unterscheidet von der Länge irgendwelcher unendlich benachbarter Bahnen zwischen den gleichen Lagen. 171

Bemerkungen dazu.

1. Jede kürzeste Bahn zwischen irgend zwei Lagen ist eine geodätische Bahn. 172

Es enthält also auch die Definition **171** nicht etwa einen inneren Widerspruch, sondern es gibt Bahnen, welche dieser Definition genügen.

173 **2.** Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine geodätische Bahn möglich (**168** und **172**).

174 **3.** Eine geodätische Bahn ist nicht notwendig zugleich kürzeste Bahn zwischen irgend zweien ihrer Lagen.

Es kann aus den Definitionen nicht gefolgert werden, daß jede geodätische Bahn auch kürzeste Bahn ist, und einfache Beispiele zeigen, daß es in der Tat geodätische Bahnen gibt, welche nicht zugleich kürzeste Bahnen zwischen ihren Endlagen sind. Solche Beispiele können bereits der Geometrie des einzelnen materiellen Punktes, also der gewöhnlichen Geometrie entnommen, und also aus dieser als bekannt vorausgesetzt werden.

175 **4.** Gibt es zwischen zwei Lagen nur eine einzige geodätische Bahn, so ist dieselbe eine kürzeste, und zwar die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn das Gegenteil würde nach **168** und **172** der Voraussetzung widersprechen.

176 **5.** Eine geodätische Bahn ist stets kürzeste Bahn zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten, übrigens noch endlich voneinander entfernten ihrer Lagen.

Es möge zwischen zwei beliebigen Lagen der betrachteten geodätischen Bahn noch eine Anzahl weiterer geodätischer Bahnen geben. Mit einer dieser Bahnen muß die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen zusammenfallen (**172**). Nähern wir nun die Lagen einander längs der betrachteten geodätischen Bahn, so nähert sich die Länge dieser Bahn und zugleich die Länge der absolut kürzesten Bahn der Null, während die übrigen geodätischen Bahnen endlich bleiben. Mindestens von einem gewissen endlichen Abstand der Lagen an muß also die geodätische Bahn, längs welcher die beiden Lagen sich nähern, mit der absolut kürzesten unter ihnen zusammenfallen.

Analytische Darstellung. Damit eine Bahn eine geodätische Bahn sei, ist die notwendige und hinreichende analytische Bedingung, daß das Integral des Bahnelements (**99**), nämlich 177

$$\int ds \quad ,$$

genommen zwischen irgend zwei Lagen der Bahn, nicht variiere, wenn auch den Koordinaten der Lagen der Bahn beliebige stetige Variationen erteilt werden, vorausgesetzt nur, daß 1) diese Variationen verschwinden an den jedesmaligen Grenzlagen des Integrals, und daß 2) auch noch nach Ausführung der Variation die Koordinaten und ihre Differentiale den Bedingungsgleichungen des Systems genügen. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergibt sich ein Satz von Differentialgleichungen, denen die Koordinaten der Bahn, gedacht als Funktionen einer beliebigen Variabelen, genügen müssen, und welche also die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen sind.

Daß jene Differentialgleichungen für alle Punkte einer 178
möglichen Bahn erfüllt seien, ist nach **172** zugleich die notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine kürzeste sei, und jene Gleichungen sind daher zugleich die Differentialgleichungen der kürzesten Bahnen. Das Verschwinden der Variation des Integrals ist aber noch nicht hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn zwischen seinen Endlagen eine kürzeste sei. Vielmehr ist hierzu weiter erforderlich, daß für jede zulässige Variation der Koordinaten eine zweite Variation des Integrals einen wesentlich positiven Wert habe. Für hinreichend benachbarte Lagen einer Bahn, welche den Differentialgleichungen genügt, ist diese Bedingung nach **176** stets von selber erfüllt.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geodätischen 179
Bahnen eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten x_ν, welche wir zunächst als Funktionen einer beliebigen Variabelen ansehen, sollen vor und nach der Variation den i Gleichungen

(179) a) $$\sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\, x_{\iota\nu}\, dx_\nu = 0$$

genügen (**128**). Die $3n$ Variationen δx_ν sind also gebunden an die i Gleichungen, welche aus jenen durch Variation folgen, nämlich:

b) $$\sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\, x_{\iota\nu}\, d\delta x_\nu + \sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\sum_{1}^{3n}{}^{\mu}\, \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, \delta x_\mu\, dx_\nu = 0 \quad .$$

Da die Länge ds des Bahnelements nicht von den x_ν, sondern nur von den dx_ν abhängt, so ist seine Variation

$$\delta ds = \sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\, \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, \delta dx_\nu = \sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\, \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, d\delta x_\nu \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c) $$\delta \int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Nach den Regeln der Variationsrechnung multiplizieren wir jede der Gleichungen **b)** mit einer nachträglich zu bestimmenden Funktion der x_ν, welche für die ιte Gleichung mit ξ_ι bezeichnet werden möge, und addieren die Summe der linken Seiten der entstandenen Gleichungen, welche Summe gleich Null ist, zu dem variierten Element des Integrals. Durch partielle Integration schaffen wir die Differentiale der Variationen fort; endlich setzen wir den Faktor einer jeden der willkürlichen Funktionen δx_ν gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Differentialgleichungen der Form:

d) $$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\right) + \sum_{1}^{i}{}^{\iota}\, x_{\iota\nu}\, d\xi_\iota - \sum_{1}^{i}{}^{\iota}\sum_{1}^{3n}{}^{\mu}\left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota\, dx_\mu = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **a)** $3n+i$ Gleichungen für die $3n+i$ Funktionen x_ν und ξ_ι bilden. Diese Differentialgleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation des Integrals; jede geodätische Bahn genügt also denselben, und sie stellen also die gesuchte Lösung dar.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **179d** sind aber 180
auch hinreichende Bedingungen dafür, daß die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation des Integrals $\int ds$ gleich den Gliedern, welche bei der partiellen Integration vor das Integralzeichen treten; es wird also in der üblichen Bezeichnungsweise, wenn mit 0 die untere, mit 1 die obere Grenze angedeutet wird:

$$\delta \int ds = \sum_1^{3n}{}_\nu \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_1^{i}{}_\iota \, x_{\iota\nu} \, \xi_\iota \right) \delta x_\nu \right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δx_ν verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzwerten, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte hinreichende analytische Bedingung nach **177** erfüllt.

Anmerkung 2. Benutzen wir die laufende Länge der 181
Bahn als unabhängige Variabele, so nehmen unter Berücksichtigung von **55** und **100** die Gleichungen **179d** nach Division durch ds die Formen an:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^{i}{}_\iota \, x_{\iota\nu} \, \xi_\iota' - \sum_1^{i}{}_\iota \sum_1^{3n}{}_\mu \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \right) \xi_\iota \, x_\mu' = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

welche zusammen mit den i durch Differentiation von **179a** erhaltenen Gleichungen:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \, x_{\iota\nu} \, x_\nu'' + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x_\nu' \, x_\mu' = 0 \qquad \text{b)}$$

$3n + i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n + i$ Größen x_ν'' und ξ_ι' darstellen, und also erlauben, diese Größen als eindeutige Funktionen der Größen x_ν, x'_ν und ξ_ι anzugeben.

182 **Anmerkung 3.** Unter Benutzung von **72** kann den Gleichungen **181a** die Form gegeben werden:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}^\iota x_{\iota\nu}\,\xi'_\iota + \sum_1^i{}^\iota \sum_1^{3n}{}^\mu \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi'_\iota x'_\mu \quad .$$

Die Gleichungen **181a** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn bei gegebenem Anfang derselben beständig ändern muß, damit die Bahn eine geodätische bleibe; und zwar gibt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

183 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darzustellen.

Die r Koordinaten p_ϱ des Systems sind gebunden an die k Gleichungen (**130**):

a) $$\sum_1^r{}^\varrho p_{\varkappa\varrho}\,dp_\varrho = 0$$

und also die r Variationen δp_ϱ an die Gleichungen:

b) $$\sum_1^r{}^\varrho p_{\varkappa\varrho}\,d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma\,dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung hängt jetzt nicht allein von den Differentialen dp_ϱ, sondern auch von den Werten der p_ϱ selbst ab, es ist also:

$$\delta ds = \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\,d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho}\delta p_\varrho \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c) $$\delta\int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Indem wir nach den Regeln der Variation verfahren, genau wie in **179**, und indem wir mit $\pi_\varkappa$ den Faktor der $\varkappa$ ten Gleichung **b)** bezeichnen, erhalten wir r Differentialgleichungen von der Form:

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\right) - \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, d\pi_\varkappa \qquad \mathbf{d)}$$

$$- \sum_1^k{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa\, dp_\sigma = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **a)** $r+k$ Differentialgleichungen für die $r+k$ Funktionen p_ϱ und $\pi_\varkappa$ der unabhängigen Variabelen bilden. Diese Gleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation, sind also erfüllt in allen Lagen einer geodätischen Bahn; sie enthalten demnach die Lösung der gestellten Aufgabe.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **183d** sind aber auch hinreichende Bedingungen dafür, daß die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation der Bahnlänge (vergl. **180**): 184

$$\delta \int ds = \sum_1^r{}_\varrho \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \pi_\varkappa\right) \delta p_\varrho\right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δp_ϱ verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzlagen, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte analytische Bedingung erfüllt (**177**).

Anmerkung 2. Wählen wir die Bahnlänge als unabhängige Variabele, indem wir die Gleichungen **183d** durch ds dividieren und für ds seinen Wert in den p_ϱ und dp_ϱ nach **57d** einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen der geodätischen Bahnen in der Form der r Gleichungen: 185

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} &\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma\sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right)p'_\sigma p'_\tau \\ &\quad + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\pi'_\varkappa - \sum_1^k{}_\varkappa\sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa p'_\sigma = 0 \quad , \end{aligned}\right.$$

welche zusammen mit den k aus **183a** abgeleiteten Gleichungen

$$\text{b)} \qquad \sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}p''_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}p'_\varrho p'_\sigma = 0$$

$r + k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r + k$ Größen p''_ϱ und $\pi'_\varkappa$ bilden, also gestatten, diese Größen als eindeutige Funktionen der p_ϱ, p'_ϱ und $\pi_\varkappa$ anzugeben.

186 **Anmerkung 8.** Indem wir bei der Einführung der Bahnlänge als unabhängiger Variabele die Gleichung **92** berücksichtigen, erhalten wir die Gleichungen **185a** in der Form:

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s{,}p_\varrho\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma\sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}p'_\sigma p'_\tau - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\pi'_\varkappa + \sum_1^r{}_\varkappa\sum_1^r{}_\sigma\left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa p'_\sigma \quad .$$

Jene Gleichungen geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn mit Durchlaufung ihrer Länge ändern muß, damit die Bahn beständig eine geodätische bleibe; und zwar gibt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

187 **Bemerkung 1.** Eine geodätische Bahn ist durch Lage und Richtung eines ihrer Elemente noch nicht bestimmt, sondern aus einer gegebenen Lage in gegebener Richtung ist im allgemeinen eine unendliche Anzahl geodätischer Bahnen möglich.

Sind uns für eine Lage der Bahn die p_ϱ, p'_ϱ und die k Größen $\pi_\varkappa$ gegeben, so sind sie nach **185** auch für das nächste Element eindeutig bestimmt, und die Fortsetzung der Bahn ist also nur in eindeutig bestimmter Weise möglich. Die Angabe der Richtung der Bahn in jener gegebenen Lage aber liefert nur die Größen p_ϱ und p'_ϱ, und genügt also nicht zur Festlegung der Bahn, sondern läßt, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, noch eine $k$fache Unendlichkeit geodätischer Bahnen zu.

Bemerkung 2. Wenn die Differentialgleichungen des betrachteten Systems kein Integral zulassen, also im allgemeinen Falle, können von den $2r$ Größen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und die Richtung in dieser bestimmen, $2r-k$ willkürlich angenommen werden, nämlich die r Größen p_ϱ und $r-k$ der Größen p'_ϱ. Jene $2r-k$ willkürlichen Werte, zusammen mit den k willkürlichen Werten der $\pi_\varkappa$ in jener Lage können als die $2r$ willkürlichen Konstanten angesehen werden, welche zusammen mit den Differentialgleichungen **185a** eine geodätische Bahn bestimmen, und welche in den Integralen jener Gleichungen auch vorhanden sein müssen, da es nach **173** möglich sein soll, jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Lassen nämlich die Differentialgleichungen des Systems keine endliche Beziehung zwischen den p_ϱ ableiten, so ist jedes denkbare Wertsystem dieser Größen auch ein mögliches Wertsystem; eine willkürliche Anfangs- und Endlage sind also zusammen durch $2r$ willkürliche Koordinatenwerte bestimmt. 188

Bemerkung 3. Für jedes Integral, welches die Differentialgleichungen des materiellen Systems zulassen, vermindert sich die Zahl der Konstanten, welche eine geodätische Bahn eindeutig bestimmen, um zwei. 189

Lassen sich nämlich aus den Bedingungsgleichungen des Systems l endliche Gleichungen zwischen den p_ϱ herleiten, so können von den r Koordinaten p_ϱ nur noch $r-l$ willkürlich angenommen werden, von den $2r$ Größen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und eine Richtung in ihr bestimmen, also nur noch $2r-l-k$. Ferner lassen sich in diesem Falle die Differentialgleichungen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in solche Form bringen, daß l derselben unmittelbar integrabele Gleichungen darstellen, nämlich diejenigen Gleichungen, welche durch Differentiation der l endlichen Beziehungen gewonnen werden. Für jede dieser Gleichungen, von welchen eine den Index λ haben möge, wird dann:

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\lambda\varrho}}{\partial p_\sigma} = 0 \quad .$$

Es verschwinden dann also die entsprechenden Größen π_λ aus den Gleichungen **185a**, und alle p_ϱ'' und $\pi_\varkappa'$ sind bereits eindeutig bestimmt durch die $k-l$ Werte der übrigen $\pi_\varkappa$. Im ganzen also behalten wir noch übrig $2r-2l$ willkürliche Bestimmungsstücke; zwei sind für jede endliche Gleichung verloren gegangen.

Übrigens genügen diese $2r-2l$ willkürlichen Konstanten immer noch, wie es sein muß, um jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Denn bestehen zwischen den p_ϱ l endliche Gleichungen, so genügt es, die Bahn so zu führen, daß zwei ihrer Lagen mit den gegebenen Lagen je $r-l$ Koordinaten gemein haben; die Übereinstimmung in Hinsicht der übrigen wird alsdann von selbst statthaben.

3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen.

190 **Lehrsatz.** In einem holonomen System ist jede geodätische Bahn eine geradeste Bahn und auch umgekehrt jede geradeste eine geodätische Bahn.

Benutzen wir für den Beweis rechtwinklige Koordinaten. Ist das System ein holonomes, so läßt sich den i Bedingungsgleichungen desselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in geeigneter Ordnung eine solche Form geben, in welcher jede derselben ohne weiteres integrierbar ist, in welcher nämlich die linke Seite einer jeden mit dem exakten Differentiale eines der i Integrale der Gleichungen zusammenfällt. Für jedes Wertsystem der ι, μ, ν ist alsdann:

a) $$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad ,$$

und die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen werden alsdann nach **181a**:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota' = 0 \quad . \qquad \text{b)}$$

Dieselben unterscheiden sich offenbar nur in der Bezeichnung von den Gleichungen der geradesten Bahnen (**155d**):

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

da weder die ξ_ι noch die Ξ_ι in den übrigen zu befriedigenden Gleichungen vorkommen. Jede mögliche Bahn, welche nach geeigneter Bestimmung der ξ_ι den ersten dieser Gleichungen genügt, genügt den zweiten, indem man setzt $\Xi_\iota = \xi_\iota'$, und nicht minder ist jede Lösung der zweiten zugleich eine Lösung der ersten. Die Befriedigung der Gleichungen **b)** und **c)** ist aber schon hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn eine geodätische, bez. eine geradeste sei.

Folgerung 1. In einem holonomen System ist aus einer möglichen Lage in einer möglichen Richtung nur eine einzige geodätische Bahn möglich (**161**). 191

Folgerung 2. In einem holonomen System ist zwischen irgend zwei möglichen Lagen immer mindestens eine geradeste Bahn möglich (**173**). 192

Lehrsatz. Ist in einem materiellen System jede geodätische Bahn zugleich eine geradeste Bahn, so ist das System ein holonomes. 193

Denn von jeder möglichen Lage aus ist in gegebener Richtung nach **161** nur eine einzige geradeste, also nach Voraussetzung nur eine einzige geodätische Bahn möglich. Gleichwohl ist nach **173** jede mögliche Lage durch eine dieser Bahnen zu erreichen. Es ist also die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems gleich der Zahl seiner unabhängigen Koordinaten, also nach **146** das System ein holonomes.

194 **Folgerung.** In einem System, welches kein holonomes ist, ist im allgemeinen eine geodätische Bahn nicht zugleich eine geradeste Bahn.

Dies geht übrigens schon daraus hervor, daß in jeder Richtung nur eine geradeste, aber viele geodätische Bahnen möglich sind (**161** und **187**).

195 **Bemerkung.** In einem Systeme, welches kein holonomes ist, ist eine geradeste Bahn im allgemeinen nicht zugleich eine geodätische Bahn.

Die Behauptung ist bewiesen, sobald Beispiele von Systemen vorgezeigt werden, in welchen sich die geradesten Bahnen nicht unter den geodätischen finden. Nehmen wir deshalb der Einfachheit halber an, es bestehe nur eine einzige nicht integrierbare Bedingungsgleichung zwischen den r Koordinaten p_ϱ des Systems, und es sei dieselbe:

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{1\varrho} p'_\varrho = 0 \quad .$$

Machen wir nun die Annahme, es sei jede geradeste Bahn zugleich eine geodätische. Dann ließe sich für jedes mögliche Wertsystem der p_ϱ und p'_ϱ mindestens ein Wertsystem der p''_ϱ so bestimmen, daß zugleich den Gleichungen **158d** und **185a** genügt ist. Es müßten daher auch für alle möglichen p_ϱ und p'_ϱ die durch paarweise Subtraktion jener Gleichungen zu erhaltenden Gleichungen

$$p_{1\varrho}(\Pi_1 - \pi'_1) + \pi_1 \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = 0$$

zu befriedigen sein. Dies sind aber r Gleichungen für die eine Größe $(\Pi_1 - \pi'_1)/\pi_1$, und sie sind nur verträglich miteinander, wenn für alle Wertpaare der ϱ und τ

$$\frac{1}{p_{1\varrho}} \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = \frac{1}{p_{1\tau}} \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial p_{1\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma$$

ist. Drücken wir in $r-1$ voneinander unabhängigen dieser

Gleichungen eine der Größen p'_ϱ mit Hilfe von Gleichung **a)** durch die übrigen aus, so sind die Verhältnisse zwischen den letzteren nun völlig willkürliche Größen. Der Koeffizient jeder einzelnen dieser Größen muß also für sich verschwinden. Wir erhalten so als notwendige Folge unserer Annahme im ganzen $(r-1)^2$ Gleichungen zwischen den r Funktionen $p_{1\varrho}$ und ihren r^2 partiellen ersten Differentialquotienten. In besonderen Fällen können diese Gleichungen sämtlich befriedigt sein, denn sie sind befriedigt, wenn die Gleichung **a)** integrabel ist. Aber im allgemeinen haben wir kein Recht, die Funktionen $p_{1\varrho}$ auch nur einer einzigen Bedingung unterworfen vorauszusetzen, und im allgemeinen war also unsere Annahme unzulässig. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Ergebnis (190 bis **195**). In holonomen Systemen decken **196**
sich die Begriffe der geradesten und der geodätischen Bahnen dem Inhalt nach vollständig; in nichtholonomen Systemen schließt keiner dieser Begriffe den andern ein, sondern beide haben im allgemeinen vollständig verschiedenen Inhalt.

Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen.

Vorbemerkungen.

1. In diesem Abschnitt soll nur von holonomen Systemen **197**
die Rede sein und unter einem System schlechthin also ein holonomes verstanden werden. Es kann daher, und es soll vorausgesetzt werden, daß die benutzten Koordinaten p_ϱ des Systems sämtlich freie Koordinaten sind. Die Zahl dieser Koordinaten ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, also unabhängig von unserer Willkür; wir bezeichnen sie dauernd mit r.

2. Geradeste und geodätische Bahnen fallen in die- **198**
sem Abschnitt zusammen (**196**), und die gemeinsamen Diffe-