Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

1. Geradeste Bahnen

urn:nbn:de:bsz:31-288857

homogene lineare Funktionen der übrigen $r-k$ und diese Werte einsetzen in die Gleichung:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, d\bar{p}_{\varrho}\, dp'_{\varrho} = 0 \quad .$$

Die in dieser Gleichung noch vorhandenen dp'_{ϱ} sind nun völlig willkürlich, es muß also der Faktor einer jeden dieser Größen verschwinden. Dies gibt $r-k$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $d\bar{p}_{\varrho}$, welche gestatten, $r-k$ derselben als eindeutige, weil lineare Funktionen der übrigen k darzustellen.

150 **Umkehrung.** Steht eine denkbare Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines Systems, so lassen sich die r Komponenten $d\bar{p}_{\varrho}$ derselben nach den p_{ϱ} stets durch passende Bestimmung von k Größen $\gamma_{\varkappa}$ darstellen in der Form:

$$d\bar{p}_{\varrho} = \sum_{1}^{k}{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_{\varkappa} \quad .$$

Bestimmen wir nämlich die $\gamma_{\varkappa}$ aus irgendwelchen k dieser Gleichungen und berechnen mit diesen Werten die sämtlichen Komponenten, so müssen wir auf die gegebenen Werte der $d\bar{p}_{\varrho}$ kommen. Denn die so berechnete Verrückung steht nach 148 senkrecht auf allen möglichen und hat mit der gegebenen Verrückung k Komponenten gemein, sie hat also mit derselben nach 149 alle r Komponenten nach den p_{ϱ} gemein.

Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme.

I. Geradeste Bahnen.

Definitionen.

151 1. Ein Bahnelement eines materiellen Systems heißt gerader als ein anderes, wenn es eine geringere Krümmung hat.

152 2. Geradestes Bahnelement nennen wir ein mögliches

Bahnelement, welches gerader ist als alle anderen möglichen Bahnelemente, welche mit ihm die Lage und die Richtung gemein haben.

3. Eine Bahn, deren sämtliche Elemente geradeste Elemente sind, heißt eine geradeste Bahn. 153

Analytische Darstellung. Alle Bahnelemente, unter welchen ein geradestes Bahnelement das geradeste ist, haben Lage und Richtung, also die Werte der Koordinaten und der ersten Differentialquotienten der Koordinaten nach der unabhängigen Variabeln gemein. Die Krümmung ist aber, außer durch jene Werte, auch noch mitbestimmt durch die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten. Durch die Werte dieser also unterscheiden sich jene Bahnelemente, und es müssen also für das geradeste Bahnelement die zweiten Differentialquotienten solche Funktionen der Koordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten sein, welche die Krümmung zu einem Minimum machen. 154

Die Gleichungen, welche diese Bedingung ausdrücken, müssen erfüllt sein für alle Lagen einer geradesten Bahn, sie sind also zugleich die Differentialgleichungen einer solchen Bahn.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems darzustellen in den rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 155

Es möge als unabhängige Variabele die laufende Bahnlänge gewählt werden. Da nur mögliche Bahnen in Betracht zu ziehen sind, unterliegen die $3n$ Größen x'_ν nach **128** und **100** i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x'_\nu = 0 \quad . \qquad \text{a)}$$

Also unterliegen die $3n$ Größen x''_ν i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x''_\nu + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, x'_\nu\, x'_\mu = 0 \ , \qquad \text{b)}$$

welche durch Differentiation aus jenen folgen.

Unter der Voraussetzung, daß diesen Gleichungen **b)** nicht widersprochen werde, sollen die Größen x''_ν so bestimmt werden, daß die Krümmung c (**106**) oder, was dasselbe sagt, daß der Wert von $\frac{1}{2}c^2$, nämlich

$$\text{c)} \qquad \frac{1}{2}\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, \frac{m_\nu}{m} x_\nu''^2 \quad ,$$

ein Minimum werde.

Nach den Regeln der Differentialrechnung verfahren wir wie folgt: Wir multiplizieren jede der Gleichungen **b)** mit einem nachträglich zu bestimmenden Faktor, welcher für die ιte Gleichung Ξ_ι heißen möge; wir addieren die partiellen Differentialquotienten der linken Seiten der entstandenen Gleichungen nach einer jeden der Größen x''_ν zu dem nach der gleichen Größe genommenen partiellen Differentialquotienten der Form **c)**, welche zu einem Minimum zu machen ist; wir setzen schießlich die entstandenen Aggregate gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Gleichungen von der Form:

$$\text{d)} \qquad \frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{1}^{i}{}_{\iota}\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **b)** $3n+i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n+i$ Größen x''_ν und Ξ_ι ergeben, und aus welchen sich diese Größen und dann aus **c)** der Wert der kleinsten Krümmung selbst ergeben. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist also notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei, und die Gleichungen **d)** sind also die verlangten Differentialgleichungen.

156 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **d)** sind aber auch die hinreichenden Bedingungen, zunächst für das Eintreten eines Minimums. Denn die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 c^2}{\partial x''_\nu\, \partial x''_\mu}$$

verschwinden, sobald ν und μ verschieden sind, und sind notwendig positiv, sobald ν und μ gleich sind. Der Wert der Krümmung läßt also keine anderen ausgezeichneten Werte zu, als allein ein Minimum.

Die Erfüllung der Gleichungen **d)** für alle Lagen einer möglichen Bahn ist demnach auch hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei.

Anmerkung 2. Unter Berücksichtigung von **72** können die Gleichungen **d)** in der Form geschrieben werden: 157

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\,\Xi_\iota \quad .$$

Die Gleichungen **d)** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge beständig ändern muß, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar gibt eine jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung der Bahn gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

Aufgabe 2. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten des Systems auszudrücken. 158

Wir wählen wieder als unabhängige Variabele die Bahnlänge. Die Koordinaten p_ϱ und ihre Differentialquotienten p'_ϱ genügen (**130**) den k Gleichungen

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, p'_\varrho = 0 \quad , \qquad \textbf{a)}$$

also die Größen p''_ϱ den Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} p''_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p'_\varrho p'_\sigma = 0 \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Unter allen Werten der p''_ϱ, welche diesen Gleichungen genügen, sind diejenigen zu bestimmen, welche den Wert der

Krümmung c oder, was auf dasselbe hinausläuft, den Wert von $\frac{1}{2}c^2$, also die halbe rechte Seite der Gleichung **108 c** zu einem Minimum machen. Verfahren wir nach den Regeln der Differentialgleichung wie in **155**, und nennen wir $\Pi_\varkappa$ den Faktor, mit welchem wir die $\varkappa$te der Gleichungen **b)** multiplizieren, so erhalten wir als notwendige Bedingungen für das Minimum r Gleichungen von der Form:

$$\text{d)}\quad \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right) p'_\sigma p'_\tau + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \Pi_\varkappa = 0 \quad ,$$

in welchen nämlich dem ϱ für jede Gleichung ein bestimmter Wert von 1 bis r zu erteilen ist. Zusammen mit den Gleichungen **b)** bilden sie $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen p''_ϱ und $\Pi_\varkappa$, aus welchen sich diese Größen und dann nach **108** die kleinste Krümmung bestimmen lassen. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist die notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei.

159 **Anmerkung 1.** Die Erfüllung der Gleichungen **d)** ist aber auch die hinreichende Bedingung für das Eintreten eines Minimums und also einer geradesten Bahn. Denn der Ausdruck **108** ist nur eine Transformation des Ausdrucks **106** für die Krümmung; wie dieser (**156**) läßt daher auch jener nur einen einzigen ausgezeichneten Wert, und zwar ein Minimum zu.

160 **Anmerkung 2.** Nach **75** haben wir:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p'_\sigma \quad ,$$

also ist:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho) = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} p'_\sigma p'_\tau \quad .$$

Es lassen sich daher die Gleichungen **158d** auch schreiben in der Form:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho) = \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p'_\sigma p'_\tau - \sum_1^k{}_\varkappa p_{\varkappa\varrho} \Pi_\varkappa \quad .$$

Die Gleichungen **158d** geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge ändern muß, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar gibt jetzt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

Lehrsatz. Aus einer gegebenen Lage in einer gegebenen Richtung ist stets eine und nur eine geradeste Bahn möglich. 161

Denn ist eine Lage und eine Richtung in ihr gegeben, so geben die Gleichungen **155d** oder **158d** stets bestimmte, und zwar eindeutig bestimmte Werte für die Änderung der Richtung; es ist also durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt die Anfangslage und die Richtung im nächsten Bahnelement, also auch die im Folgenden, und so fort ins Unendliche.

Folgerung. Es ist im allgemeinen nicht möglich, von einer beliebigen Lage eines gegebenen Systems zu einer beliebigen anderen Lage eine geradeste Bahn zu ziehen. 162

Denn die Mannigfaltigkeit der möglichen Verrückungen aus einer Lage ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, die Mannigfaltigkeit der möglichen Richtungen in einer Lage und daher die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen aus ihr also um die Einheit kleiner. Die Mannigfaltigkeit der Lagen, welche auf geradesten Bahnen von einer gegebenen Lage aus zu erreichen sind, ist also wieder gleich der Zahl der Freiheiten. Aber die Mannigfaltigkeit der möglichen Lagen kann der Zahl der benutzten Koordinaten gleich sein, und ist daher im allgemeinen größer als jene.

Bemerkung 1. Um alle geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen durch die p_ϱ bezeichnet sind, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ darstellen zu können, ist nicht die Kenntnis irgendwelcher $3n$ Funktionen erforderlich, welche die Lagen der einzelnen Punkte des Systems 163 als Funktionen der p_ϱ vollständig bestimmen. Es genügt vielmehr, daß neben den Bedingungsgleichungen des Systems in den p_ϱ die $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ der p_ϱ bekannt gegeben seien.

Denn die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen **158d** können explizite hingeschrieben werden, sobald nur neben den $p_{\varkappa\varrho}$ die $a_{\varrho\sigma}$ als Funktionen der p_ϱ gegeben sind.

164 **Bemerkung 2.** Um die geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen man durch die p_ϱ bezeichnet hat, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ angeben zu können, genügt neben der Kenntnis der Bedingungsgleichungen zwischen den p_ϱ die Kenntnis der Länge einer jeden möglichen unendlich kleinen Verrückung als Funktion eben jener Koordinaten p_ϱ und deren Änderungen.

Denn ist ds der Ausdruck jener Länge in der verlangten Form, so ist (**57d**)

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ds^2}{\partial dp_\varrho \partial dp_\sigma} \quad .$$

165 **Bemerkung 3.** Um den Wert der Krümmung selbst zu kennen in jeder Lage einer geradesten Bahn, genügt indessen die Kenntnis der $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ nicht. Es muß hinzukommen die Kenntnis der $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ Funktionen $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ (**108**).

Die Kenntnis der Lagen aller einzelnen Punkte als Funktionen der p_ϱ ist auch zur Ermittelung der Krümmung selbst nicht erforderlich.

2. Kürzeste und geodätische Bahnen.

166 **Definition 1.** Kürzeste Bahn eines materiellen Systems zwischen zweien seiner Lagen heißt eine mögliche Bahn zwischen diesen Lagen, deren Länge kleiner ist als die Länge irgend einer anderen, ihr unendlich benachbarten Bahn zwischen denselben Lagen.