Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Bewegungsfreiheit

urn:nbn:de:bsz:31-288857

133 **Umkehrung.** Ist ein materielles System ein holonomes System, so lassen seine Differentialgleichungen eine ebenso große Zahl von endlichen oder Integralgleichungen zwischen den Koordinaten selbst zu.

Man betrachte von den r Koordinaten des Systems, zwischen deren Differentialen die k Gleichungen bestehen, irgendwelche $r-k$, etwa die ersten $r-k$ als unabhängig veränderlich. Man gehe von einer beliebigen Anfangslage des Systems auf verschiedenen möglichen Bahnen zu einer Lage über, für welche die unabhängigen Koordinaten bestimmte Werte haben. Käme man nun mit stetig sich ändernder Bahn zu stetig sich ändernden Werten der übrigen Koordinaten, also zu verschiedenen Lagen, so wären diese Lagen mögliche Lagen, die Verrückungen zwischen ihnen also nach Voraussetzung mögliche Verrückungen. Es gäbe also von Null verschiedene Wertsysteme der Differentiale, welche den Differentialgleichungen genügen, obwohl die ersten $r-k$ dieser Differentiale gleich Null gesetzt sind. Dies ist nicht möglich, da die Gleichungen homogen und linear sind. Also kommen wir stets zu denselben Werten nicht nur der ersten $r-k$, sondern auch der übrigen Koordinaten. Die letzteren sind also bestimmte Funktionen der ersteren. Die k endlichen Gleichungen, welche dies ausdrücken, sind, da sie den Differentialgleichungen nicht widersprechen können, Integralgleichungen derselben.

Bewegungsfreiheit.

134 **Definition.** Die Zahl der willkürlich anzunehmenden unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten eines materiellen Systems heißt die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems oder auch der Grad der Freiheit seiner Bewegung.

Bemerkungen dazu.

135 1. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ist gleich der Zahl seiner Koordinaten, vermindert um die Zahl der Differentialgleichungen des Systems.

2. Die Zahl der Freiheiten eines materiellen Systems ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. 136

In der Bezeichnung von **128—130** ist die Zahl der Freiheiten gleich $r-k$, also (**129**) gleich $3n-i$, also stets dieselbe Zahl, welche Zahlen auch durch r und k dargestellt sind.

3. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ändert sich nicht mit der Lage des Systems. 137

Da der Zusammenhang ein stetiger ist, so kann sich die Zahl der Freiheiten in benachbarten Lagen nicht um ein Endliches unterscheiden, also, da eine stetige Änderung dieser Zahl ausgeschlossen ist, auch nicht in endlich entfernten Lagen.

4. Der Beweis des Satzes **125** enthält eine Lösung der Aufgabe: Die Zahl der Bewegungsfreiheiten des vollständig bekannten materiellen Systems, allerdings nicht ohne Probieren, zu finden. Die Zahl l der nach der Methode jenes Beweises gefundenen Hilfsgrößen du_λ ist die gesuchte Zahl. 138

Ist von vornherein bekannt, daß die möglichen Lagen des Systems sich durch r allgemeine Koordinaten p_ϱ darstellen lassen, so können in jenem Beweise auch diese Koordinaten anstatt der x_ν benutzt werden.

Definition. Eine Koordinate eines materiellen Systems, deren Änderungen unabhängig von den Änderungen aller übrigen Koordinaten geschehen können, heißt eine freie Koordinate des Systems. 139

Folgerung. Eine freie Koordinate kommt in den Differentialgleichungen ihres Systems nicht vor, und umgekehrt ist jede Koordinate, welche in den Differentialgleichungen nicht vorkommt, eine freie Koordinate. 140

Anmerkung 1. Ob eine bestimmte Koordinate eines Systems eine freie Koordinate ist, oder nicht, hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten. 141

Denn kommt eine gewisse Koordinate in den Differentialgleichungen des Systems nicht vor, und wählen wir nun an Stelle einer der Koordinaten, welche in diesen Gleichungen vorkommen, eine Funktion dieser und jener ersten als Koordinate, so verliert jene erste die Eigenschaft, freie Koordinate zu sein, welche sie bis dahin hatte.

142 **Anmerkung 2.** In einem freien System ist jede Koordinate der absoluten Lage eine freie Koordinate.

Vergleiche **118** und **122**.

143 **Lehrsatz.** Lassen sich die möglichen Lagen eines materiellen Systems durch Koordinaten darstellen, welche sämtlich freie Koordinaten sind, so ist das System ein holonomes (**123**).

Jede Verrückung des Systems zwischen möglichen Lagen wird durch ein Wertsystem der Differentiale der freien Koordinaten ausgedrückt; jedes solche Wertsystem ist aber möglich, da es keinen Bedingungen unterworfen ist, und daher ist jede Verrückung zwischen möglichen Lagen eine mögliche Verrückung.

144 **Umkehrung.** In einem holonomen System lassen sich alle möglichen Lagen durch freie Koordinaten darstellen.

Hat ein holonomes System r Koordinaten, zwischen welchen k Differentialgleichungen bestehen, so lassen sich k der Koordinaten als Funktionen der übrigen $r-k$ darstellen (vergl. **133**). Diese $r-k$ willkürlich ausgewählten Koordinaten bestimmen also bereits die Lage des Systems vollständig und können unter Weglassung der übrigen Koordinaten als freie Koordinaten des Systems benutzt werden. Auch irgendwelche $r-k$ Funktionen der ursprünglichen r Koordinaten können offenbar der gleichen Absicht dienen.

145 **Anmerkung 1.** Die Zahl der freien Koordinaten eines holonomen Systems ist gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten.

146 **Anmerkung 2.** Ist die Zahl der Koordinaten eines materiellen Systems gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten, so sind die Koordinaten sämtlich freie Koordinaten, und das System ist ein holonomes.

Denn bestände auch nur eine einzige Differentialgleichung zwischen den Koordinaten, so wäre schon die Zahl der Koordinaten größer als die der Bewegungsfreiheiten. Kleiner als die Zahl der Bewegungsfreiheiten kann die Zahl der Koordinaten überhaupt nicht sein.

Anmerkung 3. Die möglichen Lagen eines Systems, 147
welches kein holonomes ist, lassen sich nicht vollständig allein durch freie Koordinaten darstellen.

Denn das Gegenteil dieser Behauptung stände in Widerspruch zu **143**.

Verrückungen senkrecht zu den möglichen Verrückungen.

Lehrsatz. Lassen sich in einem System die r Kompo- 148
nenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ darstellen durch k Größen $\gamma_\varkappa$ in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems (**130**) entnommen sind, so steht die Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus der gleichen Lage.

Es sei nämlich ds' die Länge einer beliebigen möglichen Verrückung aus der gleichen Lage, und es seien die dp'_ϱ die Änderungen der Koordinaten für diese Verrückung. Multiplizieren wir nun die Gleichungen der Reihe nach mit dp'_ϱ und addieren sie, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen **85** und **130**:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho = ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^k{}_\varkappa\, \gamma_\varkappa \sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp'_\varrho = 0 \quad ,$$

also $\cos s,s' = 0$; $s,s' = 90^0$, was zu beweisen war.

Zusatz. Die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds 149
nach den Koordinaten p_ϱ sind eindeutig bestimmt durch k unter ihnen und die Angabe, daß die Verrückung senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

Es seien nämlich wieder die dp'_ϱ die Änderungen der p_ϱ für eine beliebige mögliche Verrückung. Mit Hilfe der k Bedingungsgleichungen können wir k derselben ausdrücken als