Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Analytische Darstellung

Definition 2. Ein materielles System, welches keinen anderen als inneren und gesetzmäßigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein freies System. 122

Definition 3. Ein materielles System, zwischen dessen möglichen Lagen alle denkbaren stetigen Übergänge zugleich auch mögliche Übergänge sind, heißt ein holonomes System. 123

Der Name soll andeuten, daß ein solches System integralen (ὅλος) Gesetzen (νόμος) gehorcht, während die materiellen Systeme im allgemeinen nur Differentialgesetzen unterworfen sind. (Vergleiche **132** ff.)

Analytische Darstellung.

Bemerkung. Ein System materieller Punkte genügt den Bedingungen eines materiellen Systems, wenn die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Bedingungen unterworfen sind als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 124

Denn die erste Art der Stetigkeit, welche die Definition (**115**) verlangt, muß vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Differentialen der Koordinaten des Systems gesprochen wird; den beiden andern Arten wird durch die Einschränkung der zugelassenen Differentiale genügt.

Umkehrung. Genügt ein System materieller Punkte den Bedingungen eines materiellen Systems, so sind die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Einschränkungen unterworfen, als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen unter sich, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 125

Zum Beweise fassen wir eine mögliche Lage des Systems ins Auge und die möglichen Verrückungen aus ihr. Für eine beliebig herausgegriffene dieser Verrückungen mögen sich die $3n$ Änderungen dx_ν verhalten wie:

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots\ldots : \varepsilon_{13n} \quad .$$

(125) Verstehen wir nun unter du_1 eine ganz beliebige unendlich kleine Größe, so ist durch den Satz von Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1$$

ein Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun in demselben alle möglichen Verrückungen überhaupt enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Trifft letzteres zu, so wählen wir eine beliebige zweite Verrückung aus, welche nicht durch jene Form dargestellt werden kann, und es mögen für diese die $3n$ Änderungen dx_ν sich verhalten wie:

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots\ldots : \varepsilon_{23n} \quad .$$

Verstehen wir nun unter du_2 eine zweite beliebige unendlich kleine Größe, so ist durch das System der Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1 + \varepsilon_{2\nu}\, du_2$$

nach Voraussetzung (116) ein allgemeinerer Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun wenigstens in diesem alle möglichen Verrückungen enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Wenn letzteres eintritt, so verfahren wir wie vorher, indem wir eine neue Größe du_3 einführen, und wir wiederholen das Verfahren so lange, bis es wegen Erschöpfung aller möglichen Verrückungen sich nicht wiederholen läßt. Seine Fortsetzung wird spätestens unmöglich, wenn wir $3n$ Größen du_λ eingeführt haben; denn alsdann stellt die Form:

$$dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda$$

alle möglichen Verrückungen des Systems auch dann dar, wenn alle denkbaren Verrückungen möglich sind, wenn also gar keine Zusammenhänge zwischen den Punkten des Systems bestehen. Im allgemeinen muß also das Verfahren notwendig früher zu Ende kommen, und es lassen sich daher alle möglichen Verrückungen des Systems darstellen durch Bedingungsgleichungen der Form:

$$dx_\nu = \sum_1^l {}_\lambda \, \varepsilon_{\lambda\nu} \, du_\lambda \quad , \tag{a}$$

in welcher unter allen Umständen

$$l \gtreqless 3n$$

ist. Damit aber dieser Form durch willkürlich gewählte du_λ genügt werden könne, ist hinreichende Bedingung, daß die dx_ν den $3n - l$ homogenen linearen Gleichungen genügen, welche durch Elimination der du_λ aus den Gleichungen **a)** sich ableiten lassen. Die Größen $\varepsilon_{\lambda\nu}$ müssen nach **115**, 3 stetige Funktionen der Lage sein. Weiteren Einschränkungen als diesen brauchen aber nach **124** die dx_ν nicht unterworfen zu werden.

Anmerkung. Die Zahl und der Inhalt der Gleichungen, **126**
welche wir zwischen den dx_ν nach dem angegebenen Verfahren ableiten, ist unabhängig von der besonderen Wahl der benutzten Verrückungen.

Denn benutzen wir andere Verrückungen wie vorher und drücken daher die dx_ν durch andere Größen dv_λ aus, so können wir die Werte der dx_ν in diesen in die vorher erhaltenen Eliminationsgleichungen einsetzen. Würden dieselben nicht identisch befriedigt, so wären die dv_λ nicht unabhängig voneinander, was gegen die Voraussetzung ginge, unter welcher sie bestimmt wurden. Jene Gleichungen werden also identisch befriedigt, und sie können daher nicht verschieden sein von den Gleichungen oder von linearen Kombinationen der Gleichungen, welche durch Elimination der dv_λ aus den Formen erhalten werden, in welchen sie die dx_ν darstellen. Größer als die Zahl der mit Hilfe der dv_λ zu erhaltenden Gleichungen kann demnach die Zahl der mit Hilfe der du_λ erhaltenen nicht sein; sie kann aber auch nicht kleiner sein, sonst würde das umgekehrte Verfahren erlauben, zu erweisen, daß die du_λ nicht unabhängig voneinander wären.

Folgerung 1. Der Zusammenhang eines materiellen Sy- **127**
stems kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage des Systems und eines

Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Denn Beziehungen zwischen diesen Differentialen können nach **125** nicht anders als durch einen solchen Satz von Gleichungen gegeben werden. Dies hindert allerdings nicht, daß zwischen den Koordinaten auch endliche Gleichungen bestehen. Aber alle diese endlichen Gleichungen ließen sich vollständig ersetzen durch eine einzige mögliche Lage und ebenso viele homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen. Diese letzteren aber können den unmittelbar gegebenen Differentialgleichungen nicht widersprechen; sie gehen also entweder aus denselben hervor oder sind ihnen zur Erzielung einer vollständigen Beschreibung hinzuzufügen.

128 **Bezeichnung.** Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \, x_{\iota\nu} \, dx_\nu = 0 \quad .$$

Dabei wird angenommen, daß i solcher Gleichungen vorhanden seien, und es sind also dem ι in den einzelnen Gleichungen die Werte 1, 2, usw. bis i beizulegen. Die Größen $x_{\iota\nu}$ sind als stetige Funktionen der x_ν zu betrachten.

129 **Folgerung 2.** Der Zusammenhang eines materiellen Systems, dessen Lagen durch allgemeine Koordinaten dargestellt sind, kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage und eines Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Koordinaten.

Durch Benutzung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ, deren Zahl r kleiner als $3n$ ist, ist bereits ein Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems gesetzt. Denken wir uns deshalb den Zusammenhang zuerst nach **128** vollständig beschrieben durch die rechtwinkligen Koordinaten. In den entsprechenden Differentialgleichungen seien die Werte der dx_ν in den dp_ϱ nach Gleichung **57b** eingetragen. Die entstehenden linearen homogenen Gleichungen müssen sich so ordnen lassen, daß unter ihnen $3n-r$ identisch erfüllt sind infolge der $3n-r$ Gleichungen, welche ausdrücken, daß die $3n$ Größen x_ν Funktionen der r Größen p_ϱ sind. Die übrig bleibenden $k=i-3n+r$ Gleichungen zwischen den dp_ϱ ersetzen bei Benutzung der p_ϱ vollständig die sämtlichen Gleichungen zwischen den dx_ν und genügen daher, nach **127**, zusammen mit der Angabe einer möglichen Lage zur vollständigen Beschreibung des Zusammenhanges des Systems.

Bezeichnung. Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden: **130**

$$\sum_1^r{}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Zahl dieser Gleichungen wird gleich k angenommen, und es sind also dem $\varkappa$ nacheinander die Werte 1, 2, usw. bis k zu erteilen. Die Größen $p_{\varkappa\varrho}$ sind als stetige Funktionen der p_ϱ zu betrachten.

Anmerkung. Die Gleichungen **128** bzw. **130** werden auch die Differentialgleichungen oder die Bedingungsgleichungen des Systems genannt werden. **131**

Lehrsatz. Lassen sich aus den Differentialgleichungen eines materiellen Systems eine gleiche Zahl von endlichen Gleichungen zwischen den Koordinaten des Systems ableiten, so ist das System ein holonomes System (**123**). **132**

Denn die Koordinaten einer jeden möglichen Lage müssen alsdann den endlichen Gleichungen genügen. Die Unterschiede der Koordinaten zweier benachbarter Lagen genügen also einer gleichen Zahl von homogenen linearen Differentialgleichungen, und da diese der ebenso großen Zahl der gegebenen Differentialgleichungen des Systems nicht widersprechen können, auch diesen letzteren. Die Verrückung zwischen irgend zwei möglichen Lagen ist also eine mögliche Verrückung, welches die Behauptung ist.

133 **Umkehrung.** Ist ein materielles System ein holonomes System, so lassen seine Differentialgleichungen eine ebenso große Zahl von endlichen oder Integralgleichungen zwischen den Koordinaten selbst zu.

Man betrachte von den r Koordinaten des Systems, zwischen deren Differentialen die k Gleichungen bestehen, irgendwelche $r-k$, etwa die ersten $r-k$ als unabhängig veränderlich. Man gehe von einer beliebigen Anfangslage des Systems auf verschiedenen möglichen Bahnen zu einer Lage über, für welche die unabhängigen Koordinaten bestimmte Werte haben. Käme man nun mit stetig sich ändernder Bahn zu stetig sich ändernden Werten der übrigen Koordinaten, also zu verschiedenen Lagen, so wären diese Lagen mögliche Lagen, die Verrückungen zwischen ihnen also nach Voraussetzung mögliche Verrückungen. Es gäbe also von Null verschiedene Wertsysteme der Differentiale, welche den Differentialgleichungen genügen, obwohl die ersten $r-k$ dieser Differentiale gleich Null gesetzt sind. Dies ist nicht möglich, da die Gleichungen homogen und linear sind. Also kommen wir stets zu denselben Werten nicht nur der ersten $r-k$, sondern auch der übrigen Koordinaten. Die letzteren sind also bestimmte Funktionen der ersteren. Die k endlichen Gleichungen, welche dies ausdrücken, sind, da sie den Differentialgleichungen nicht widersprechen können, Integralgleichungen derselben.

Bewegungsfreiheit.

134 **Definition.** Die Zahl der willkürlich anzunehmenden unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten eines materiellen Systems heißt die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems oder auch der Grad der Freiheit seiner Bewegung.

Bemerkungen dazu.

135 1. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ist gleich der Zahl seiner Koordinaten, vermindert um die Zahl der Differentialgleichungen des Systems.