Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Es wird dann schließlich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{e)}\qquad c^2 = \sum_1^r{}_{\varrho} \sum_1^r{}_{\sigma} \Big\{ a_{\varrho\sigma} p''_{\varrho} p''_{\sigma} + \sum_1^r{}_{\tau} \Big(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_{\tau}} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_{\sigma}} \Big) p'_{\varrho} p'_{\tau} p''_{\sigma}$$

$$+ \sum_1^r{}_{\lambda} \sum_1^r{}_{\mu} a_{\varrho\sigma\lambda\mu} p'_{\varrho} p'_{\sigma} p'_{\lambda} p'_{\mu} \Big\} \quad .$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in **57** eingeführten Funktionen der p_{ϱ}; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Größen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4} r^2 (r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 **1.** Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 **2.** Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschließen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.

3. Die zur Betrachtung zugelassenen Verrückungen heißen mögliche Verrückungen, die übrigen unmögliche. Die möglichen Verrückungen werden auch virtuelle genannt. Mögliche Verrückungen heißen sie stets, wenn sie als engerer Begriff den denkbaren gegenübergestellt werden; virtuelle Verrückungen werden sie nur dann genannt, wenn sie als weiterer Begriff einem engeren, z. B. den wirklichen Verrückungen entgegengestellt werden. 111

4. Mögliche Bahnen heißen alle Bahnen, welche sich aus möglichen Verrückungen zusammensetzen. Mögliche Lagen sind alle Lagen, welche durch mögliche Bahnen erreicht werden können. 112

5. Es sind also alle Lagen möglicher Bahnen mögliche Lagen. Aber es geht aus dem Gesagten nicht hervor, und es soll auch nicht gesagt sein, daß jede denkbare Bahn durch mögliche Lagen auch eine mögliche Bahn sei. Vielmehr kann eine Verrückung auch zwischen unendlich benachbarten möglichen Lagen als eine unmögliche Verrückung bezeichnet sein. 113

6. Zwischen zwei möglichen Lagen gibt es immer eine mögliche Bahn. Denn führt von irgend einer wirklichen Lage zu beiden Lagen auch nur *eine* mögliche Bahn, so bilden diese beiden Bahnen zusammen schon eine mögliche Bahn zwischen den beiden Lagen; führte zu einer von beiden keine mögliche Bahn, so wäre diese Lage auch keine mögliche Lage. 114

Definition 1. Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein stetiger, wenn er den folgenden drei Voraussetzungen nicht widerspricht: 115

1. Daß die Angabe aller möglichen endlichen Verrückungen enthalten sei in der Angabe aller möglichen unendlich kleinen Verrückungen, (Stetigkeit im Endlichen);

2. daß jede mögliche unendlich kleine Verrückung in gerader, stetiger Bahn durchlaufen werden könne, (Stetigkeit im Unendlichkleinen);

3. daß jede unendlich kleine Verrückung, welche aus einer bestimmten Lage möglich ist, auch möglich ist aus jeder unendlich benachbarten Lage, abgesehen von Abweichungen

von der Ordnung der Entfernung der Lagen oder von höherer Ordnung, (stetige Veränderlichkeit der möglichen Verrückungen).

116 **Folgerung.** Wenn in einem System nur stetige Zusammenhänge sich finden, so ist die Summe irgendwelcher möglichen unendlich kleinen Verrückungen aus derselben Lage wieder eine mögliche Verrückung aus der gleichen Lage. (Superposition unendlich kleiner Verrückungen.)

Denn nach **115**, 3 müssen sich die einzelnen Verrückungen hintereinander durchlaufen lassen, und nach **115**, 2 ist dann die direkte Verrückung aus der Anfangs- in die Endlage selbst auch eine mögliche Verrückung.

117 **Definition 2.** Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein innerer, wenn er nur die gegenseitige Lage der Punkte des Systems betrifft.

118 **Folgerung.** Wenn in einem System nur innere Zusammenhänge sich finden, so ist jede Verrückung des Systems, welche die Konfiguration nicht ändert, eine mögliche Verrückung, und umgekehrt.

119 **Definition 3.** Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein gesetzmäßiger, wenn er unabhängig von der Zeit besteht.

Ein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht also in der Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems zu jeder Zeit, oder unabhängig von der Zeit, gewisse Verrückungen möglich, andere unmöglich sind.

120 **Anmerkung.** Solange wir von der Geometrie der Systeme handeln, kommt der Unterschied zwischen gesetzmäßigem und ungesetzmäßigem Zusammenhange nicht in Betracht, da unsere Überlegungen die Zeit nicht enthalten. Sind die Zusammenhänge eines Systems zu zwei Zeiten verschieden, so haben wir es für unsere jetzige Betrachtung zu beiden Zeiten mit zwei verschiedenen Systemen zu tun. Es läuft praktisch auf dasselbe hinaus, wenn wir voraussetzen, daß in diesem ersten Buche die Zusammenhänge sämtlich gesetzmäßige seien.

121 **Definition 1.** Ein System materieller Punkte, welches keinen anderen als stetigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein materielles System.

Definition 2. Ein materielles System, welches keinen anderen als inneren und gesetzmäßigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein freies System. 122

Definition 3. Ein materielles System, zwischen dessen möglichen Lagen alle denkbaren stetigen Übergänge zugleich auch mögliche Übergänge sind, heißt ein holonomes System. 123

Der Name soll andeuten, daß ein solches System integralen (ὅλος) Gesetzen (νόμος) gehorcht, während die materiellen Systeme im allgemeinen nur Differentialgesetzen unterworfen sind. (Vergleiche **132** ff.)

Analytische Darstellung.

Bemerkung. Ein System materieller Punkte genügt den Bedingungen eines materiellen Systems, wenn die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Bedingungen unterworfen sind als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 124

Denn die erste Art der Stetigkeit, welche die Definition (**115**) verlangt, muß vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Differentialen der Koordinaten des Systems gesprochen wird; den beiden andern Arten wird durch die Einschränkung der zugelassenen Differentiale genügt.

Umkehrung. Genügt ein System materieller Punkte den Bedingungen eines materiellen Systems, so sind die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Einschränkungen unterworfen, als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen unter sich, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind. 125

Zum Beweise fassen wir eine mögliche Lage des Systems ins Auge und die möglichen Verrückungen aus ihr. Für eine beliebig herausgegriffene dieser Verrückungen mögen sich die $3n$ Änderungen dx_ν verhalten wie:

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots\ldots : \varepsilon_{13n} \quad .$$

(125) Verstehen wir nun unter du_1 eine ganz beliebige unendlich kleine Größe, so ist durch den Satz von Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1$$

ein Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun in demselben alle möglichen Verrückungen überhaupt enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Trifft letzteres zu, so wählen wir eine beliebige zweite Verrückung aus, welche nicht durch jene Form dargestellt werden kann, und es mögen für diese die $3n$ Änderungen dx_ν sich verhalten wie:

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots\ldots : \varepsilon_{23n} \quad .$$

Verstehen wir nun unter du_2 eine zweite beliebige unendlich kleine Größe, so ist durch das System der Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1 + \varepsilon_{2\nu}\, du_2$$

nach Voraussetzung (116) ein allgemeinerer Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun wenigstens in diesem alle möglichen Verrückungen enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Wenn letzteres eintritt, so verfahren wir wie vorher, indem wir eine neue Größe du_3 einführen, und wir wiederholen das Verfahren so lange, bis es wegen Erschöpfung aller möglichen Verrückungen sich nicht wiederholen läßt. Seine Fortsetzung wird spätestens unmöglich, wenn wir $3n$ Größen du_λ eingeführt haben; denn alsdann stellt die Form:

$$dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda$$

alle möglichen Verrückungen des Systems auch dann dar, wenn alle denkbaren Verrückungen möglich sind, wenn also gar keine Zusammenhänge zwischen den Punkten des Systems bestehen. Im allgemeinen muß also das Verfahren notwendig früher zu Ende kommen, und es lassen sich daher alle möglichen Verrückungen des Systems darstellen durch Bedingungsgleichungen der Form:

$$dx_\nu = \sum_1^l {}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda \quad , \qquad \text{a)}$$

in welcher unter allen Umständen

$$l \gtreqless 3n$$

ist. Damit aber dieser Form durch willkürlich gewählte du_λ genügt werden könne, ist hinreichende Bedingung, daß die dx_ν den $3n - l$ homogenen linearen Gleichungen genügen, welche durch Elimination der du_λ aus den Gleichungen **a)** sich ableiten lassen. Die Größen $\varepsilon_{\lambda\nu}$ müssen nach **115**, 3 stetige Funktionen der Lage sein. Weiteren Einschränkungen als diesen brauchen aber nach **124** die dx_ν nicht unterworfen zu werden.

Anmerkung. Die Zahl und der Inhalt der Gleichungen, **126** welche wir zwischen den dx_ν nach dem angegebenen Verfahren ableiten, ist unabhängig von der besonderen Wahl der benutzten Verrückungen.

Denn benutzen wir andere Verrückungen wie vorher und drücken daher die dx_ν durch andere Größen dv_λ aus, so können wir die Werte der dx_ν in diesen in die vorher erhaltenen Eliminationsgleichungen einsetzen. Würden dieselben nicht identisch befriedigt, so wären die dv_λ nicht unabhängig voneinander, was gegen die Voraussetzung ginge, unter welcher sie bestimmt wurden. Jene Gleichungen werden also identisch befriedigt, und sie können daher nicht verschieden sein von den Gleichungen oder von linearen Kombinationen der Gleichungen, welche durch Elimination der dv_λ aus den Formen erhalten werden, in welchen sie die dx_ν darstellen. Größer als die Zahl der mit Hilfe der dv_λ zu erhaltenden Gleichungen kann demnach die Zahl der mit Hilfe der du_λ erhaltenen nicht sein; sie kann aber auch nicht kleiner sein, sonst würde das umgekehrte Verfahren erlauben, zu erweisen, daß die du_λ nicht unabhängig voneinander wären.

Folgerung 1. Der Zusammenhang eines materiellen Sy- **127** stems kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage des Systems und eines

Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Denn Beziehungen zwischen diesen Differentialen können nach **125** nicht anders als durch einen solchen Satz von Gleichungen gegeben werden. Dies hindert allerdings nicht, daß zwischen den Koordinaten auch endliche Gleichungen bestehen. Aber alle diese endlichen Gleichungen ließen sich vollständig ersetzen durch eine einzige mögliche Lage und ebenso viele homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen. Diese letzteren aber können den unmittelbar gegebenen Differentialgleichungen nicht widersprechen; sie gehen also entweder aus denselben hervor oder sind ihnen zur Erzielung einer vollständigen Beschreibung hinzuzufügen.

128 **Bezeichnung.** Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden:

$$\sum_{1}^{3n} {}_{\nu}\, x_{\iota\nu}\, dx_{\nu} = 0 \quad .$$

Dabei wird angenommen, daß i solcher Gleichungen vorhanden seien, und es sind also dem ι in den einzelnen Gleichungen die Werte 1, 2, usw. bis i beizulegen. Die Größen $x_{\iota\nu}$ sind als stetige Funktionen der x_{ν} zu betrachten.

129 **Folgerung 2.** Der Zusammenhang eines materiellen Systems, dessen Lagen durch allgemeine Koordinaten dargestellt sind, kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage und eines Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Koordinaten.

Durch Benutzung der allgemeinen Koordinaten p_{ϱ}, deren Zahl r kleiner als $3n$ ist, ist bereits ein Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems gesetzt. Denken wir uns deshalb den Zusammenhang zuerst nach **128** vollständig beschrieben durch die rechtwinkligen Koordinaten. In den entsprechenden Differentialgleichungen seien die Werte der dx_{ν} in den dp_{ϱ} nach Gleichung **57b** eingetragen. Die entstehenden linearen homogenen Gleichungen müssen sich so ordnen lassen, daß unter ihnen $3n - r$ identisch erfüllt sind infolge der $3n - r$ Gleichungen, welche ausdrücken, daß die $3n$ Größen x_ν Funktionen der r Größen p_ϱ sind. Die übrig bleibenden $k = i - 3n + r$ Gleichungen zwischen den dp_ϱ ersetzen bei Benutzung der p_ϱ vollständig die sämtlichen Gleichungen zwischen den dx_ν und genügen daher, nach **127**, zusammen mit der Angabe einer möglichen Lage zur vollständigen Beschreibung des Zusammenhanges des Systems.

Bezeichnung. Die Gleichungen, welche den Zusammen- 130
hang eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Zahl dieser Gleichungen wird gleich k angenommen, und es sind also dem $\varkappa$ nacheinander die Werte 1, 2, usw. bis k zu erteilen. Die Größen $p_{\varkappa\varrho}$ sind als stetige Funktionen der p_ϱ zu betrachten.

Anmerkung. Die Gleichungen **128** bzw. **130** werden auch 131
die Differentialgleichungen oder die Bedingungsgleichungen des Systems genannt werden.

Lehrsatz. Lassen sich aus den Differentialgleichungen 132
eines materiellen Systems eine gleiche Zahl von endlichen Gleichungen zwischen den Koordinaten des Systems ableiten, so ist das System ein holonomes System (**123**).

Denn die Koordinaten einer jeden möglichen Lage müssen alsdann den endlichen Gleichungen genügen. Die Unterschiede der Koordinaten zweier benachbarter Lagen genügen also einer gleichen Zahl von homogenen linearen Differentialgleichungen, und da diese der ebenso großen Zahl der gegebenen Differentialgleichungen des Systems nicht widersprechen können, auch diesen letzteren. Die Verrückung zwischen irgend zwei möglichen Lagen ist also eine mögliche Verrückung, welches die Behauptung ist.

133 **Umkehrung.** Ist ein materielles System ein holonomes System, so lassen seine Differentialgleichungen eine ebenso große Zahl von endlichen oder Integralgleichungen zwischen den Koordinaten selbst zu.

Man betrachte von den r Koordinaten des Systems, zwischen deren Differentialen die k Gleichungen bestehen, irgendwelche $r-k$, etwa die ersten $r-k$ als unabhängig veränderlich. Man gehe von einer beliebigen Anfangslage des Systems auf verschiedenen möglichen Bahnen zu einer Lage über, für welche die unabhängigen Koordinaten bestimmte Werte haben. Käme man nun mit stetig sich ändernder Bahn zu stetig sich ändernden Werten der übrigen Koordinaten, also zu verschiedenen Lagen, so wären diese Lagen mögliche Lagen, die Verrückungen zwischen ihnen also nach Voraussetzung mögliche Verrückungen. Es gäbe also von Null verschiedene Wertsysteme der Differentiale, welche den Differentialgleichungen genügen, obwohl die ersten $r-k$ dieser Differentiale gleich Null gesetzt sind. Dies ist nicht möglich, da die Gleichungen homogen und linear sind. Also kommen wir stets zu denselben Werten nicht nur der ersten $r-k$, sondern auch der übrigen Koordinaten. Die letzteren sind also bestimmte Funktionen der ersteren. Die k endlichen Gleichungen, welche dies ausdrücken, sind, da sie den Differentialgleichungen nicht widersprechen können, Integralgleichungen derselben.

Bewegungsfreiheit.

134 **Definition.** Die Zahl der willkürlich anzunehmenden unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten eines materiellen Systems heißt die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems oder auch der Grad der Freiheit seiner Bewegung.

Bemerkungen dazu.

135 1. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ist gleich der Zahl seiner Koordinaten, vermindert um die Zahl der Differentialgleichungen des Systems.

2. Die Zahl der Freiheiten eines materiellen Systems ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. 136

In der Bezeichnung von **128**—**130** ist die Zahl der Freiheiten gleich $r-k$, also (**129**) gleich $3n-i$, also stets dieselbe Zahl, welche Zahlen auch durch r und k dargestellt sind.

3. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ändert sich nicht mit der Lage des Systems. 137

Da der Zusammenhang ein stetiger ist, so kann sich die Zahl der Freiheiten in benachbarten Lagen nicht um ein Endliches unterscheiden, also, da eine stetige Änderung dieser Zahl ausgeschlossen ist, auch nicht in endlich entfernten Lagen.

4. Der Beweis des Satzes **125** enthält eine Lösung der Aufgabe: Die Zahl der Bewegungsfreiheiten des vollständig bekannten materiellen Systems, allerdings nicht ohne Probieren, zu finden. Die Zahl l der nach der Methode jenes Beweises gefundenen Hilfsgrößen du_λ ist die gesuchte Zahl. 138

Ist von vornherein bekannt, daß die möglichen Lagen des Systems sich durch r allgemeine Koordinaten p_ϱ darstellen lassen, so können in jenem Beweise auch diese Koordinaten anstatt der x_ν benutzt werden.

Definition. Eine Koordinate eines materiellen Systems, deren Änderungen unabhängig von den Änderungen aller übrigen Koordinaten geschehen können, heißt eine freie Koordinate des Systems. 139

Folgerung. Eine freie Koordinate kommt in den Differentialgleichungen ihres Systems nicht vor, und umgekehrt ist jede Koordinate, welche in den Differentialgleichungen nicht vorkommt, eine freie Koordinate. 140

Anmerkung 1. Ob eine bestimmte Koordinate eines Systems eine freie Koordinate ist, oder nicht, hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten. 141

Denn kommt eine gewisse Koordinate in den Differentialgleichungen des Systems nicht vor, und wählen wir nun an Stelle einer der Koordinaten, welche in diesen Gleichungen vorkommen, eine Funktion dieser und jener ersten als Koordinate, so verliert jene erste die Eigenschaft, freie Koordinate zu sein, welche sie bis dahin hatte.

142 **Anmerkung 2.** In einem freien System ist jede Koordinate der absoluten Lage eine freie Koordinate.

Vergleiche **118** und **122**.

143 **Lehrsatz.** Lassen sich die möglichen Lagen eines materiellen Systems durch Koordinaten darstellen, welche sämtlich freie Koordinaten sind, so ist das System ein holonomes (**123**).

Jede Verrückung des Systems zwischen möglichen Lagen wird durch ein Wertsystem der Differentiale der freien Koordinaten ausgedrückt; jedes solche Wertsystem ist aber möglich, da es keinen Bedingungen unterworfen ist, und daher ist jede Verrückung zwischen möglichen Lagen eine mögliche Verrückung.

144 **Umkehrung.** In einem holonomen System lassen sich alle möglichen Lagen durch freie Koordinaten darstellen.

Hat ein holonomes System r Koordinaten, zwischen welchen k Differentialgleichungen bestehen, so lassen sich k der Koordinaten als Funktionen der übrigen $r-k$ darstellen (vergl. **133**). Diese $r-k$ willkürlich ausgewählten Koordinaten bestimmen also bereits die Lage des Systems vollständig und können unter Weglassung der übrigen Koordinaten als freie Koordinaten des Systems benutzt werden. Auch irgendwelche $r-k$ Funktionen der ursprünglichen r Koordinaten können offenbar der gleichen Absicht dienen.

145 **Anmerkung 1.** Die Zahl der freien Koordinaten eines holonomen Systems ist gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten.

146 **Anmerkung 2.** Ist die Zahl der Koordinaten eines materiellen Systems gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten, so sind die Koordinaten sämtlich freie Koordinaten, und das System ist ein holonomes.

Denn bestände auch nur eine einzige Differentialgleichung zwischen den Koordinaten, so wäre schon die Zahl der Koordinaten größer als die der Bewegungsfreiheiten. Kleiner als die Zahl der Bewegungsfreiheiten kann die Zahl der Koordinaten überhaupt nicht sein.

Anmerkung 3. Die möglichen Lagen eines Systems, welches kein holonomes ist, lassen sich nicht vollständig allein durch freie Koordinaten darstellen. **147**

Denn das Gegenteil dieser Behauptung stände in Widerspruch zu **143**.

Verrückungen senkrecht zu den möglichen Verrückungen.

Lehrsatz. Lassen sich in einem System die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ darstellen durch k Größen $\gamma_\varkappa$ in der Form: **148**

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems (**130**) entnommen sind, so steht die Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus der gleichen Lage.

Es sei nämlich ds' die Länge einer beliebigen möglichen Verrückung aus der gleichen Lage, und es seien die dp'_ϱ die Änderungen der Koordinaten für diese Verrückung. Multiplizieren wir nun die Gleichungen der Reihe nach mit dp'_ϱ und addieren sie, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen **85** und **130**:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho = ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^k{}_\varkappa\, \gamma_\varkappa \sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp'_\varrho = 0 \quad ,$$

also $\cos s,s' = 0$; $s,s' = 90^0$, was zu beweisen war.

Zusatz. Die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ sind eindeutig bestimmt durch k unter ihnen und die Angabe, daß die Verrückung senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems. **149**

Es seien nämlich wieder die dp'_ϱ die Änderungen der p_ϱ für eine beliebige mögliche Verrückung. Mit Hilfe der k Bedingungsgleichungen können wir k derselben ausdrücken als homogene lineare Funktionen der übrigen $r-k$ und diese Werte einsetzen in die Gleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho = 0 \quad .$$

Die in dieser Gleichung noch vorhandenen dp'_ϱ sind nun völlig willkürlich, es muß also der Faktor einer jeden dieser Größen verschwinden. Dies gibt $r-k$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $d\bar{p}_\varrho$, welche gestatten, $r-k$ derselben als eindeutige, weil lineare Funktionen der übrigen k darzustellen.

150 **Umkehrung.** Steht eine denkbare Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines Systems, so lassen sich die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ derselben nach den p_ϱ stets durch passende Bestimmung von k Größen $\gamma_\varkappa$ darstellen in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad .$$

Bestimmen wir nämlich die $\gamma_\varkappa$ aus irgendwelchen k dieser Gleichungen und berechnen mit diesen Werten die sämtlichen Komponenten, so müssen wir auf die gegebenen Werte der $d\bar{p}_\varrho$ kommen. Denn die so berechnete Verrückung steht nach 148 senkrecht auf allen möglichen und hat mit der gegebenen Verrückung k Komponenten gemein, sie hat also mit derselben nach 149 alle r Komponenten nach den p_ϱ gemein.

Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme.

I. Geradeste Bahnen.

Definitionen.

151 1. Ein Bahnelement eines materiellen Systems heißt gerader als ein anderes, wenn es eine geringere Krümmung hat.

152 2. Geradestes Bahnelement nennen wir ein mögliches