Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Bahnen der Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Aus beiden Gleichungen **a)** und **b)** und der Bemerkung 4 folgt:

$$\delta_p ds = -\delta_q ds \quad , \qquad \text{c)}$$

welches die Behauptung ist.

Bahnen der Systeme.

Erläuterungen.

1. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen, welche ein System beim Übergang aus einer Lage in die andere durchläuft, heißt eine Bahn des Systems. **97**

Eine Bahn kann auch betrachtet werden als die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Verrückungen, welche das System beim Übergang aus der einen in die andere Lage erleidet.

2. Ein Teil der Bahn, welcher durch zwei unendlich nahe Lagen begrenzt wird, heißt ein Bahnelement. Ein Bahnelement ist eine unendlich kleine Verrückung; es hat eine Länge und eine Richtung. **98**

3. Richtung der Bahn eines Systems in einer bestimmten ihrer Lagen heißt die Richtung eines dieser Lage unendlich benachbarten Bahnelements. **99**

Länge der Bahn eines Systems zwischen zwei ihrer Lagen heißt die Summe der Längen der Bahnelemente zwischen diesen Lagen.

Analytische Darstellung. Die Bahn eines Systems wird analytisch dargestellt, indem die Koordinaten ihrer Lagen angegeben werden als Funktionen einer und derselben, übrigens beliebigen Variabeln. Jeder Lage der Bahn ist dann ein Wert der Variabeln zugeordnet. Als unabhängige Variabele kann eine der Koordinaten selbst dienen. Sehr häufig ist es zweckmäßig, als unabhängige Variabele die Länge der Bahn, von einer bestimmten Lage der Bahn ab gerechnet, zu benutzen. Die Differentialquotienten nach dieser bestimmten Variabelen, **100**

6*

also nach der Bahnlänge, sollen in LAGRANGES Weise durch Akzente bezeichnet werden.

101 **Definition 1.** Die Bahn eines Systems heißt gerade, wenn sie in allen ihren Lagen die gleiche Richtung hat.

102 **Folgerung.** Beschreibt ein System eine gerade Bahn, so beschreiben seine einzelnen Punkte gerade Linien, deren Längen, von der Ausgangslage an gerechnet, einander beständig proportional bleiben (38).

103 **Definition 2.** Die Bahn eines Systems heißt krumm, wenn sich die Richtung der Bahn von Lage zu Lage ändert. Die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Bahnlänge heißt die Krümmung der Bahn.

Die Krümmung der Bahn ist also der Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Richtungsunterschied und der Entfernung zweier benachbarter Bahnelemente.

104 **Anmerkung.** Der Wert der Krümmung ist hierdurch definiert unabhängig von der Form der analytischen Darstellung, also insbesondere unabhängig von der besonderen Wahl der Koordinaten des Systems.

105 **Aufgabe 1.** Die Krümmung c der Bahn auszudrücken durch die Änderungen der Winkel, welche die Bahn mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet.

Es sei $d\varepsilon$ der Winkel zwischen der Richtung der Bahn am Anfang und am Ende des Bahnelementes ds. Dann ist nach Definition (103):

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad .$$

Es seien ferner die $\cos s,x_\nu$ die Cosinus der Winkel, welche die Bahn am Anfange von ds mit den x_ν bildet, und es seien $\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu$ die Werte der gleichen Größen am Ende von ds. Dann ist nach Gleichung 87:

$$\cos(d\varepsilon) = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu \left(\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu\right) \quad .$$

Es ist aber ferner nach Gleichung **89** sowohl

$$\sum_1^{3n}{}^{\nu} \cos^2 s{,}x_\nu = 1 \quad ,$$

als auch

$$\sum_1^{3n}{}^{\nu} (\cos s{,}x_\nu + d \cos s{,}x_\nu)^2 = 1 \quad .$$

Indem wir das Doppelte der ersten Gleichung subtrahieren von der Summe der beiden letzteren, erhalten wir:

$$2 - 2\cos(d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu} (d \cos s{,}x_\nu)^2 \quad ,$$

also durch Division mit ds^2 die Lösung der Aufgabe:

$$c^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \left(\frac{d \cos s{,}x_\nu}{ds}\right)^2 \quad .$$

Aufgabe 2. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten des Systems mit der Bahnlänge. **106**

Unter Berücksichtigung von **72** haben wir (**100**):

$$\cos s{,}x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x_\nu' \quad ,$$

also

$$(\cos s{,}x_\nu)' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x_\nu'' \quad ,$$

also nach **105** als Lösung der Aufgabe:

$$mc^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu} m_\nu x_\nu''^2 \quad .$$

Aufgabe 3. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, dieselben betrachtet als Funktionen einer beliebigen Variabelen τ. **107**

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$x_\nu'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \left\{\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2}\right\} \quad .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in c^2 ein und beachten, daß (55)

a) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2 \quad ,$$

also

b) $$m\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}$$

ist, so folgt als Lösung der Aufgabe:

c) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2 \quad ,$$

worin für $ds/d\tau$ und $d^2s/d\tau^2$ noch ihre Werte aus den vorigen Gleichungen zu setzen sind.

108 **Aufgabe 4.** Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems mit der Bahnlänge.

Wir führen in den Ausdruck **106** an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten die p_ϱ ein, indem wir die x_ν'' ausdrücken durch die p_ϱ' und p_ϱ''. Zunächst ist nach **57 b**

$$x_\nu' = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho} p_\varrho' \quad ,$$

also

$$x_\nu'' = \sum_1^{r}{}_\varrho\, (\alpha_{\nu\varrho} p_\varrho'' + \alpha_{\nu\varrho}' p_\varrho') \quad ,$$

also

$$x_\nu''^2 = \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{r}{}_\sigma\, (\alpha_{\nu\varrho}\,\alpha_{\nu\sigma} p_\varrho'' p_\sigma'' + 2\,\alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}\, p_\varrho' p_\sigma'' + \alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}' p_\varrho' p_\sigma') \quad .$$

Man bilde diese Gleichungen für alle ν, multipliziere eine jede mit m_ν/m und addiere alle. Links entsteht c^2. Rechts kann die Summation nach ν mit Hilfe der schon eingeführten Größen $a_{\varrho\sigma}$ in den ersten beiden Gliedern ausgeführt werden. Im ersten Glied ergibt die Summation unmittelbar nach **57c** $a_{\varrho\sigma}$. Als Faktor von p''_σ im zweiten Gliede wird nacheinander erhalten: **(108)**

$$2\sum_1^r{}_\varrho\, p'_\varrho \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\alpha'_{\nu\varrho} = 2\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right)$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \qquad \text{(nach 63)}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Beim Übergang von der zweiten in die dritte Form und von der vierten in die fünfte Form ist Gebrauch gemacht von der Bemerkung, daß, wenn $F(\varrho,\sigma)$ ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Indices ϱ und σ enthält, alsdann identisch

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma F(\varrho,\sigma) = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma F(\sigma,\varrho) \qquad \textbf{a)}$$

ist.

Der Faktor des dritten Gliedes läßt sich nicht durch die $a_{\varrho\sigma}$ ausdrücken. Um im Endresultat die Beziehung auf die rechtwinkligen Koordinaten gleichwohl verschwinden zu lassen, sei gesetzt:

$$a_{\varrho\sigma\lambda\mu} = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\mu} \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Es wird dann schließlich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{c)}\qquad c^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \left\{ a_{\varrho\sigma} p''_\varrho p''_\sigma + \sum_1^r{}_\tau \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) p'_\varrho p'_\tau p''_\sigma \right.$$

$$\left. + \sum_1^r{}_\lambda \sum_1^r{}_\mu a_{\varrho\sigma\lambda\mu} p'_\varrho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu \right\} .$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in **57** eingeführten Funktionen der p_ϱ; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Größen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4} r^2 (r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 **1.** Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 **2.** Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschließen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.