Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Benutzung partieller Differntialquotienten

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Visual Library

88 **Lehrsatz.** Die r Winkel, welche eine beliebige Richtung in einer bestimmten Lage mit den Richtungen der r allgemeinen Koordinaten daselbst bildet, sind verbunden durch die Gleichung:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho} \sum_{1}^{r}{}_{\sigma} b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_{\varrho} \cos s,p_{\sigma} = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir in 86 die Richtungen von ds und ds' zusammenfallen lassen.

89 **Folgerung.** Insbesondere genügen die $3n$ Winkel, welche eine beliebige Verrückung des Systems mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bilden, der Gleichung:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \cos^2 s,x_{\nu} = 1 \quad .$$

Benutzung partieller Differentialquotienten.

90 **Bezeichnung.** Durch die Werte der Koordinaten p_ϱ ihrer Lage und der Änderungen dp_ϱ derselben ist die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung bestimmt. Ändern wir eins jener Bestimmungsstücke, während die übrigen konstant gehalten werden, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_p ds$ bezeichnet werden.

Betrachten wir dagegen, was ebenfalls zulässig ist, die Koordinaten p_ϱ und die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ nach ihnen als die unabhängigen Bestimmungsstücke von ds, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_q ds$ bezeichnet werden.

Andere partielle Differentiale von ds sind selbstverständlich möglich, aber es ist für unseren Zweck nicht nötig, sie zu bezeichnen, sondern es bleibt für sie das gewöhnliche, jedesmal durch eine Worterklärung näher zu bestimmende Zeichen ∂ds vorbehalten.

91 **Bemerkung 1.** Die Komponenten einer Verrückung nach den Koordinaten lassen sich als partielle Differentialquotienten

der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\varrho} = ds\,\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho}\ .$$

Man differentiiere die Gleichung **57d** und beachte **78.**

Bemerkung 2. Die Neigung einer unendlich kleinen Verrückung gegen die Koordinate p_ϱ kann mit Hilfe der partiellen Differentialquotienten ihrer Länge dargestellt werden. Und zwar geschieht dies in der Form: **92**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho}\ .$$

Man beachte **91** und **78.**

Anmerkung. Werden insbesondere in den Bemerkungen 1 und 2 rechtwinklige Koordinaten angewandt, so erhält man **93**

$$d\bar{x}_\nu = ds\,\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\ , \qquad \textbf{a)}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\cos s,x_\nu = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\ , \qquad \textbf{b)}$$

wobei die Bedeutung der partiellen Differentiale aus dem vorigen hervorgeht.

Bemerkung 3. Die Änderungen, welche die Koordinaten p_ϱ bei Durchlaufung einer unendlich kleinen Verrückung erleiden, lassen sich als partielle Differentialquotienten der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form: **94**

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\varrho} = ds\,\frac{\partial_q ds}{\partial d\bar{p}_\varrho}\ .$$

Man beachte die Gleichungen **82** und **79.**

95 **Bemerkung 4.** Für alle Werte des Index τ besteht zwischen den partiellen Differentialquotienten von ds die Gleichung:

a) $$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \quad .$$

Denn es ist:

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

Setzen wir in der ersteren Form für die dp_ϱ und dp_σ ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{p}_\sigma$ nach **79** und beachten die Beziehungen **68** und die zweite Form, so folgt die Behauptung. Ebenso wenn wir in gleicher Weise von der zweiten Form ausgehen.

96 **Lehrsatz.** Erleidet die Lage einer unendlich kleinen Verrückung zweimal dieselbe Veränderung, während gleichzeitig das eine Mal die Komponenten nach den Koordinaten, das andere Mal die Änderungen der Koordinaten die ursprünglichen bleiben, so ist die Änderung der Länge der Verrückung in beiden Fällen entgegengesetzt gleich.

Da im zweiten Falle die $\delta dp_\varrho = 0$ sein sollen, während die Koordinaten p_ϱ die Änderungen δp_ϱ erleiden, so ist die Änderung der Länge der Verrückung:

a) $$\delta_p ds = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Im ersten Falle sollen die $\delta d\bar{p}_\varrho = 0$ sein, während die Koordinaten dieselben Änderungen δp_ϱ erleiden, es ist also jetzt:

b) $$\delta_q ds = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Aus beiden Gleichungen a) und b) und der Bemerkung 4 folgt:

$$\delta_p ds = - \delta_q ds \quad , \qquad \text{c)}$$

welches die Behauptung ist.

Bahnen der Systeme.

Erläuterungen.

1. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen, welche ein System beim Übergang aus einer Lage in die andere durchläuft, heißt eine Bahn des Systems. 97

Eine Bahn kann auch betrachtet werden als die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Verrückungen, welche das System beim Übergang aus der einen in die andere Lage erleidet.

2. Ein Teil der Bahn, welcher durch zwei unendlich nahe Lagen begrenzt wird, heißt ein Bahnelement. Ein Bahnelement ist eine unendlich kleine Verrückung; es hat eine Länge und eine Richtung. 98

3. Richtung der Bahn eines Systems in einer bestimmten ihrer Lagen heißt die Richtung eines dieser Lage unendlich benachbarten Bahnelements. 99

Länge der Bahn eines Systems zwischen zwei ihrer Lagen heißt die Summe der Längen der Bahnelemente zwischen diesen Lagen.

Analytische Darstellung. Die Bahn eines Systems wird analytisch dargestellt, indem die Koordinaten ihrer Lagen angegeben werden als Funktionen einer und derselben, übrigens beliebigen Variabeln. Jeder Lage der Bahn ist dann ein Wert der Variabeln zugeordnet. Als unabhängige Variabele kann eine der Koordinaten selbst dienen. Sehr häufig ist es zweckmäßig, als unabhängige Variabele die Länge der Bahn, von einer bestimmten Lage der Bahn ab gerechnet, zu benutzen. Die Differentialquotienten nach dieser bestimmten Variabelen, 100

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg