Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Verrückungen in Richtung der Koordinaten

urn:nbn:de:bsz:31-288857

bez. $\sum_1^r \varrho\, a_{\varrho\sigma} b_{\varrho\iota}$ für alle Werte des σ von 1 bis r, man multipliziere die entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit $a_{\sigma\varkappa}$ bez. $b_{\sigma\varkappa}$ und addiere, so folgen die Gleichungen.

9. Bestimmte Änderungen der Größen $a_{\varrho\sigma}$ haben bestimmte Änderungen der Größen $b_{\varrho\sigma}$ zur Folge. Bezeichnen $\delta a_{\varrho\sigma}$ und $\delta b_{\varrho\sigma}$ beliebige zusammengehörige Variationen der $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$, so gelten die Gleichungen: 67

$$\sum_1^r {}^{\varrho} \sum_1^r {}^{\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa}\, \delta b_{\varrho\sigma} = -\delta a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r {}^{\varrho} \sum_1^r {}^{\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa}\, \delta a_{\varrho\sigma} = -\delta b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man variiere die Gleichungen 66 und mache Gebrauch von den Beziehungen 65, so folgen die Gleichungen.

10. Variiert man in den $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ nur eine bestimmte Koordinate p_τ, von welcher sie abhängen, so folgt insbesondere für jeden Wert des τ: 68

$$\sum_1^r {}^{\varrho} \sum_1^r {}^{\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad ;$$

$$\sum_1^r {}^{\varrho} \sum_1^r {}^{\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad .$$

Verrückungen in Richtung der Koordinaten.

Definition 1. Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt eine unendlich kleine Verrückung, bei welcher sich nur diese eine Koordinate, nicht aber die übrigen gleichzeitig benutzten ändern. 69

Die Richtung aller Verrückungen in Richtung derselben Koordinate aus derselben Lage ist dieselbe; sie heißt die Richtung der Koordinate in dieser Lage.

70 **Bemerkung.** Die Richtung einer Koordinate hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten des Systems.

71 **Definition 2.** Reduzierte Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt die Komponente der Verrückung in Richtung der Koordinate (48, 69), dividiert durch die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung.

Die reduzierte Komponente in der Richtung einer Koordinate nennen wir auch kurz die Komponente nach der Koordinate.

Man spricht also von der Komponente einer beliebigen Verrückung in einer beliebigen Richtung, aber man kann nicht sprechen von der reduzierten Komponente in einer beliebigen Richtung, sondern nur von der reduzierten Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in der Richtung einer Koordinate.

72 **Aufgabe 1a.** Die Neigung s,x_ν der Verrückung ds gegen die rechtwinklige Koordinate x_ν durch die $3n$ Änderungen dx_ν auszudrücken.

In Gleichung **56** setzen wir die dx'_ν gleich Null für alle ν mit Ausnahme des bestimmten ν, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Dann ist die Richtung von ds' nach **69** die von x_ν, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da ferner alsdann nach **55** $m\,ds'^2 = m_\nu\,dx'^2_\nu$, so wird als Lösung der Aufgabe erhalten:

$$ds \cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dx_ν einzusetzen ist.

73 **Aufgabe 1b.** Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung ds nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν durch die Änderungen dx_ν der Koordinaten auszudrücken.

Setzen wir in der vorigen Aufgabe $s,x_\nu = 0$, so erfolgt die Verrückung ds in Richtung der Koordinate x_ν, und wir erkennen, daß die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung gleich $dx_\nu : ds$ also gleich $\sqrt{m/m_\nu}$ ist. Die linke Seite der Gleichung **72** stellt schon die Komponente von ds in Richtung von x_ν dar; dividieren wir also die Gleichung durch $\sqrt{m/m_\nu}$, so erhalten wir (71) als Lösung der Aufgabe:

$$d\overline{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu \quad .$$

Aufgabe 1c. Die Änderungen dx_ν der rechtwinkligen Koordinaten bei einer Verrückung auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der Verrückung nach jenen Koordinaten. 74

Die Lösung der vorigen Aufgabe gibt unmittelbar:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu}\, d\overline{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 2a. Die Neigung s,p_ϱ der Verrückung ds gegen die allgemeine Koordinate p_ϱ durch die r Änderungen dp_ϱ auszudrücken. 75

In Gleichung **58** setzen wir die dp'_ϱ gleich Null für alle ϱ mit Ausnahme des bestimmten ϱ, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Die Richtung von ds' ist alsdann nach **69** die von p_ϱ, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da gleichzeitig nach **57** $ds'^2 = a_{\varrho\varrho}\, dp'^2_\varrho$ wird, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}^\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dp_σ einzusetzen ist.

Anmerkung 1. Setzen wir in der Lösung der vorigen Aufgabe alle dp_σ gleich Null mit Ausnahme eines bestimmten dp_σ, so wird die Richtung von ds die Richtung dieser Koordinate p_σ, und der Winkel s,p_σ geht über in den Winkel p_σ,p_ϱ, welchen die Koordinate p_σ mit der Koordinate p_ϱ bildet. Da gleichzeitig alsdann $ds^2 = a_{\sigma\sigma} dp_\sigma^{\,2}$ wird, so erhalten wir für diesen Winkel: 76

$$\cos p_\sigma,p_\varrho = \frac{a_{\varrho\sigma}}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}}} \quad .$$

Dieser Winkel ist nach **62** stets ein reeller Winkel.

77 **Anmerkung 2.** Die Koordinaten p_ϱ heißen orthogonal, wenn jede von ihnen in jeder Lage auf allen übrigen senkrecht steht. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist (**76**), daß alle $a_{\varrho\sigma}$, für welche ϱ und σ verschieden sind, verschwinden. Die rechtwinkligen Koordinaten sind ein Beispiel orthogonaler Koordinaten.

78 **Aufgabe 2b.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ dieser Koordinaten bei der Verrückung.

Setzen wir in Gleichung **75** s,p_ϱ gleich Null, so erfolgt die Verrückung ds dieser Gleichung in Richtung von p_ϱ; alle dp_σ sind also Null, außer dp_ϱ, und die Gleichung wird also $\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds = a_{\varrho\varrho}\,dp_\varrho$. Die Änderungsgeschwindigkeit von p_ϱ mit einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung ist also $1/\sqrt{a_{\varrho\varrho}}$. Bedenken wir, daß nach **48** $ds \cos s,p_\varrho$ die Komponente von ds in der Richtung von p_ϱ ist, und beachten die Definition **71**, so erkennen wir, daß die linke Seite der Gleichung **75** bereits die reduzierte Komponente nach p_ϱ darstellt, und wir erhalten also die Beziehung:

a) $$d\bar{p}_\varrho = \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds \cos s,p_\varrho \quad ,$$

also als Lösung der Aufgabe:

b) $$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,dp_\sigma \quad .$$

79 **Aufgabe 2c.** Die Änderungen dp_ϱ der Koordinaten bei Ausführung der Verrückung ds auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den Koordinaten p_ϱ.

Die Auflösung der Gleichungen **78b** unter Benutzung der Bezeichnung von **64** ergibt unmittelbar:

$$dp_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\,d\bar{p}_\sigma \quad .$$

80 **Aufgabe 3a.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die

Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **78**, **57b**, **57c**, **74**:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\, \alpha_{\nu\varrho}\, dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 3b. Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ einer Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems. 81

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **73**, **57b**, **79**:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma} \sum_1^r{}_\varrho\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho \quad ,$$

also, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma}\, b_{\varrho\sigma} = \beta_{\nu\varrho} \quad , \qquad \text{a)}$$

folgt als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \sum_1^r{}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho}\, d\bar{p}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Aufgabe 4. Die Länge einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch ihre reduzierten Komponenten nach den Koordinaten des Systems. 82

Wenden wir die allgemeinen Koordinaten p_ϱ an, so erhalten wir durch successive Anwendung vou **78b** und **79** auf Gleichung **57b** nacheinander:

$$ds^2 = \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, a_{\varrho\sigma} \, dp_\varrho \, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^r {}_\varrho \, dp_\varrho \, d\bar{p}_\varrho$$

$$= \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \, d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

83 Wenden wir insbesondere die rechtwinkligen Koordinaten an, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$ds^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu \, \frac{m_\nu}{m} \, dx_\nu^2$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \, dx_\nu \, d\bar{x}_\nu$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \, \frac{m}{m_\nu} \, d\bar{x}_\nu^2 \quad .$$

84 **Aufgabe 5a.** Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen beliebiger Lage auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der beiden Verrückungen nach den rechtwinkligen Koordinaten.

Durch successive Anwendung von **73** und **74** auf Gleichung **56** erhalten wir nacheinander die Formen:

$$ds \, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n} {}_\nu \, \frac{m_\nu}{m} \, dx_\nu \, dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \, dx_\nu \, d\bar{x}'_\nu = \sum_1^{3n} {}_\nu \, d\bar{x}_\nu \, dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \, \frac{m}{m_\nu} \, d\bar{x}_\nu \, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Hierin haben wir für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{x}_\nu$ nach **83** einzusetzen.

Aufgabe 5b. Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen aus der gleichen Lage auszudrücken durch die Komponenten der beiden Verrückungen nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ. 85

Durch successive Anwendung von **78** und **79** auf Gleichung **58** erhalten wir nacheinander die Formen:

$$ds\,ds'\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\,dp_\varrho\,dp'_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho dp_\varrho\,d\bar{p}'_\varrho = \sum_1^r{}_\varrho d\bar{p}_\varrho\,dp'_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\,d\bar{p}_\varrho\,d\bar{p}'_\sigma \quad .$$

Hierin sind wieder für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ nach **82** einzusetzen.

Aufgabe 6. Den Winkel zweier unendlich kleiner Verrückungen auszudrücken durch die Winkel, welche beide mit den Koordinaten des Systems bilden. 86

Wir dividieren die letzte der Gleichungen **85** durch $ds\,ds'$ und beachten, daß nach **78a**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{d\bar{p}_\varrho}{ds} \quad , \qquad \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s',p_\varrho = \frac{d\bar{p}'_\varrho}{ds} \quad ;$$

wir erhalten so als Lösung der Aufgabe:

$$\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\sqrt{a_{\varrho\varrho}\,a_{\sigma\sigma}}\cos s,p_\varrho \cos s',p_\sigma \quad .$$

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, so erhält die vorstehende Gleichung die besondere Form: 87

$$\cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu \cos s',x_\nu \quad .$$

Es ist zu bemerken, daß die Gleichung **86** gleiche Lage der beiden Verrückungen voraussetzt, während die Gleichung **87** von dieser Voraussetzung frei ist.

88 **Lehrsatz.** Die r Winkel, welche eine beliebige Richtung in einer bestimmten Lage mit den Richtungen der r allgemeinen Koordinaten daselbst bildet, sind verbunden durch die Gleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_\varrho \cos s,p_\sigma = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir in 86 die Richtungen von ds und ds' zusammenfallen lassen.

89 **Folgerung.** Insbesondere genügen die $3n$ Winkel, welche eine beliebige Verrückung des Systems mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bilden, der Gleichung:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad .$$

Benutzung partieller Differentialquotienten.

90 **Bezeichnung.** Durch die Werte der Koordinaten p_ϱ ihrer Lage und der Änderungen dp_ϱ derselben ist die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung bestimmt. Ändern wir eins jener Bestimmungsstücke, während die übrigen konstant gehalten werden, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_p ds$ bezeichnet werden.

Betrachten wir dagegen, was ebenfalls zulässig ist, die Koordinaten p_ϱ und die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ nach ihnen als die unabhängigen Bestimmungsstücke von ds, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_q ds$ bezeichnet werden.

Andere partielle Differentiale von ds sind selbstverständlich möglich, aber es ist für unseren Zweck nicht nötig, sie zu bezeichnen, sondern es bleibt für sie das gewöhnliche, jedesmal durch eine Worterklärung näher zu bestimmende Zeichen ∂ds vorbehalten.

91 **Bemerkung 1.** Die Komponenten einer Verrückung nach den Koordinaten lassen sich als partielle Differentialquotienten