

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Unendlich kleine Verrückungen

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte.

Vorbemerkung. Wir behandeln von hier ab den einzelnen materiellen Punkt nicht mehr gesondert, sondern schließen seine Betrachtung in die Betrachtung der Systeme ein. Es ist daher im folgenden stets von Verrückungen der Systeme die Rede, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird.

Unendlich kleine Verrückungen.

Erläuterung. Eine Verrückung heißt unendlich klein, wenn ihre Länge unendlich klein ist.

Lage der unendlich kleinen Verrückung heißt eine Lage, welcher die Grenzlagen der Verrückung unendlich nahe liegen.

Eine unendlich kleine Verrückung ist nach Richtung und Größe bestimmt durch die Angabe ihrer Lage und der unendlich kleinen Änderungen, welche die Koordinaten des Systems durch die Verrückung erleiden.

Aufgabe 1a. Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dx_v der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Indem wir in Gleichung 31a $x'_v - x_v$ ersetzen durch dx_v , erhalten wir

$$m ds^2 = \sum_1^{3n} m_v dx_v^2 .$$

Aufgabe 1b. Den Winkel s, s' der beiden unendlich kleinen Verrückungen ds und ds' auszudrücken durch die Änderungen dx_v und dx'_v der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Indem wir in Gleichung 44 für $x'_v - x_v$ setzen dx_v und für $x''_v - x'_v$ setzen dx'_v , erhalten wir

$$m ds ds' \cos s, s' = \sum_1^{3n} m_v dx_v dx'_v .$$

Die Lösung gilt, ob beide Verrückungen gleiche Lage haben oder ob nicht.

- 57 **Aufgabe 2a.** Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dp_e der r allgemeinen Koordinaten p_e des Systems.

Die rechtwinkligen Koordinaten x_v sind Funktionen der p_e und zwar der p_e allein, da sie durch diese vollständig bestimmt sind, und da Verrückungen des Systems, welche nicht durch Änderungen der p_e darstellbar sind, als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten (13). Setzen wir zur Abkürzung:

$$a) \quad \frac{\partial x_v}{\partial p_e} = \alpha_{vq} \quad ,$$

so bestehen demnach $3n$ Gleichungen von der Form:

$$b) \quad dx_v = \sum_1^r \alpha_{vq} dp_q \quad ,$$

in welchen die α_{vq} Funktionen der Lage sind, also als Funktionen der p_e aufgefaßt werden können. Setzen wir die Werte b) in Gleichung 55 ein und setzen noch zur Abkürzung:

$$c) \quad m \alpha_{q\sigma} = \sum_1^{3n} m_v \alpha_{vq} \alpha_{v\sigma} \quad ,$$

so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$d) \quad ds^2 = \sum_1^r \sum_1^r \alpha_{q\sigma} dp_q dp_\sigma \quad .$$

- 58 **Aufgabe 2b.** Den Winkel s, s' zweier unendlich kleiner Verrückungen von der Länge ds und ds' und gleicher Lage auszudrücken durch die Änderungen dp_e und dp'_e der r allgemeinen Koordinaten p_e des Systems.

Wir bilden die Werte der dx'_v nach Gleichung 57b und setzen diese und die Werte für dx_v in Gleichung 56 ein. Wir beachten, daß für beide Verrückungen die Werte der Koordi-

naten selbst, also die der Größen $\alpha_{\rho\sigma}$ gleich sind, und wir erhalten:

$$ds ds' \cos s, s' = \sum_1^r \sum_1^r \alpha_{\rho\sigma} dp_\rho dp'_\sigma .$$

Eigenschaften der $\alpha_{\rho\sigma}$ und $a_{\rho\sigma}$. Einführung der $b_{\rho\sigma}$.

1. Für alle Werte der ρ, σ, τ ist: (vergl. 57a) 59

$$\frac{\partial \alpha_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma} .$$

2. Für alle Werte von ρ und σ ist: (vergl. 57c) 60

$$a_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho} .$$

3. Die Zahl der Größen $\alpha_{\rho\sigma}$ ist gleich $3nr$: die Zahl der voneinander verschiedenen Größen $a_{\rho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$.

4. Für alle ρ ist 62

$$a_{\rho\rho} > 0 .$$

Für alle Werte von ρ und σ ist

$$a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma} - a_{\rho\sigma}^2 > 0 .$$

Denn es ist die rechte Seite der Gleichung 57d nach ihrer Ableitung aus Gleichung 55 eine notwendig positive Größe, welches auch die Werte der dp_ρ sind. Hierfür sind die vorstehenden Ungleichheiten notwendige Bedingungen.

5. Für alle Werte der ρ, σ, τ gilt die Gleichung: 63

$$\sum_1^{3n} m_\nu \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\rho} \right) = m \left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) .$$

Um die Gleichung zu beweisen, setzt man rechts die Werte

der $a_{\rho\sigma}$ aus Gleichung 57c ein und macht Gebrauch von den Eigenschaften der $a_{\rho\sigma}$ nach 59.

- 64 6. Die Determinante aus den r^2 Größen $a_{\rho\sigma}$ sei Δ . Der Faktor von $a_{\rho\sigma}$ in Δ , dividiert durch Δ , soll dauernd bezeichnet werden mit $b_{\rho\sigma}$. Es ist also als Definition

$$b_{\rho\sigma} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\rho\sigma}} .$$

Für alle Werte von ρ und σ ist dann

$$b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho} .$$

Die Zahl der voneinander verschiedenen Größen $b_{\rho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$.

- 65 7. Der Wert des Ausdrucks

$$\sum_1^r a_{\rho\iota} b_{\rho\kappa}$$

ist gleich Eins, sobald $\iota = \kappa$ ist; jener Wert ist gleich Null, sobald ι und κ verschieden sind.

Denn ist $\iota = \kappa$, so stellt der Ausdruck $\sum_1^r a_{\rho\iota} b_{\rho\kappa} \Delta$ die Determinante Δ selbst dar. Ist aber ι von κ verschieden, so stellt er eine Determinante dar, welche aus Δ entsteht, indem die Reihe $a_{\rho\kappa}$ ersetzt wird durch die Reihe der $a_{\rho\iota}$. In dieser Determinante sind also zwei Reihen gleich, und ihr Wert ist Null.

- 66 8. Es gelten für alle Werte der ι und κ die beiden Gleichungen:

$$\sum_1^r a_{\rho\sigma} \sum_1^r b_{\rho\sigma} a_{\rho\iota} a_{\sigma\kappa} = a_{\iota\kappa} ;$$

$$\sum_1^r a_{\rho\sigma} \sum_1^r a_{\rho\sigma} b_{\rho\iota} b_{\sigma\kappa} = b_{\iota\kappa} .$$

Man bilde nach 65 den Wert des Ausdrucks $\sum_1^r b_{\rho\sigma} a_{\rho\iota}$

bez. $\sum_1^r a_{\rho\sigma} b_{\rho\sigma}$ für alle Werte des σ von 1 bis r , man multipliziere die entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit $a_{\rho\sigma}$ bez. $b_{\rho\sigma}$ und addiere, so folgen die Gleichungen.

9. Bestimmte Änderungen der Größen $a_{\rho\sigma}$ haben bestimmte Änderungen der Größen $b_{\rho\sigma}$ zur Folge. Bezeichnen $\delta a_{\rho\sigma}$ und $\delta b_{\rho\sigma}$ beliebige zusammengehörige Variationen der $a_{\rho\sigma}$ und $b_{\rho\sigma}$, so gelten die Gleichungen:

$$\sum_1^r \sum_1^r a_{\rho\sigma} a_{\rho\sigma} \delta b_{\rho\sigma} = -\delta a_{\rho\sigma} ;$$

$$\sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} b_{\rho\sigma} \delta a_{\rho\sigma} = -\delta b_{\rho\sigma} .$$

Man variiere die Gleichungen 66 und mache Gebrauch von den Beziehungen 65, so folgen die Gleichungen.

10. Variiert man in den $a_{\rho\sigma}$ und $b_{\rho\sigma}$ nur eine bestimmte Koordinate p_τ , von welcher sie abhängen, so folgt insbesondere für jeden Wert des τ :

$$\sum_1^r \sum_1^r a_{\rho\sigma} a_{\rho\sigma} \frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} ;$$

$$\sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} b_{\rho\sigma} \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} .$$

Verrückungen in Richtung der Koordinaten.

Definition 1. Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt eine unendlich kleine Verrückung, bei welcher sich nur diese eine Koordinate, nicht aber die übrigen gleichzeitig benutzen ändern.

Die Richtung aller Verrückungen in Richtung derselben Koordinate aus derselben Lage ist dieselbe; sie heißt die Richtung der Koordinate in dieser Lage.