Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte.

Vorbemerkung. Wir behandeln von hier ab den einzelnen materiellen Punkt nicht mehr gesondert, sondern schließen seine Betrachtung in die Betrachtung der Systeme ein. Es ist daher im folgenden stets von Verrückungen der Systeme die Rede, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird. 53

Unendlich kleine Verrückungen.

Erläuterung. Eine Verrückung heißt unendlich klein, wenn ihre Länge unendlich klein ist. 54

Lage der unendlich kleinen Verrückung heißt eine Lage, welcher die Grenzlagen der Verrückung unendlich nahe liegen.

Eine unendlich kleine Verrückung ist nach Richtung und Größe bestimmt durch die Angabe ihrer Lage und der unendlich kleinen Änderungen, welche die Koordinaten des Systems durch die Verrückung erleiden.

Aufgabe 1a. Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dx_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 55

Indem wir in Gleichung **31a** $x'_\nu - x_\nu$ ersetzen durch dx_ν, erhalten wir

$$m\,ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu dx_\nu^2 \quad .$$

Aufgabe 1b. Den Winkel s,s' der beiden unendlich kleinen Verrückungen ds und ds' auszudrücken durch die Änderungen dx_ν und dx'_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 56

Indem wir in Gleichung **44** für $x'_\nu - x_\nu$ setzen dx_ν und für $x''_\nu - x^0_\nu$ setzen dx'_ν, erhalten wir

$$m\,ds\,ds'\cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\,dx_\nu\,dx'_\nu \quad .$$

Die Lösung gilt, ob beide Verrückungen gleiche Lage haben oder ob nicht.

57 **Aufgabe 2a.** Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Die rechtwinkligen Koordinaten x_ν sind Funktionen der p_ϱ und zwar der p_ϱ allein, da sie durch diese vollständig bestimmt sind, und da Verrückungen des Systems, welche nicht durch Änderungen der p_ϱ darstellbar sind, als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten (13). Setzen wir zur Abkürzung:

a) $$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} = \alpha_{\nu\varrho} \quad ,$$

so bestehen demnach $3n$ Gleichungen von der Form:

b) $$dx_\nu = \sum_1^r{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, dp_\varrho \quad ,$$

in welchen die $\alpha_{\nu\varrho}$ Funktionen der Lage sind, also als Funktionen der p_ϱ aufgefaßt werden können. Setzen wir die Werte b) in Gleichung **55** ein und setzen noch zur Abkürzung:

c) $$m\, a_{\varrho\sigma} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma} \quad ,$$

so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

d) $$ds^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma \quad .$$

58 **Aufgabe 2b.** Den Winkel s,s' zweier unendlich kleiner Verrückungen von der Länge ds und ds' und gleicher Lage auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ und dp'_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Wir bilden die Werte der dx'_ν nach Gleichung **57b** und setzen diese und die Werte für dx_ν in Gleichung **56** ein. Wir beachten, daß für beide Verrückungen die Werte der Koordinaten selbst, also die der Größen $\alpha_{\varrho\sigma}$ gleich sind, und wir erhalten:

$$ds\,ds' \cos s,s' = \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma \quad .$$

Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ und $a_{\varrho\sigma}$. Einführung der $b_{\varrho\sigma}$.

1. Für alle Werte der ϱ, σ, τ ist: (vergl. **57a**) 59

$$\frac{\partial \alpha_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\varrho\tau}}{\partial p_\varrho} \quad .$$

2. Für alle Werte von ϱ und σ ist: (vergl. **57c**) 60

$$a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho} \; .$$

3. Die Zahl der Größen $\alpha_{\varrho\sigma}$ ist gleich $3nr$: die Zahl der voneinander verschiedenen Größen $a_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$. 61

4. Für alle ϱ ist 62

$$a_{\varrho\varrho} > 0 \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist

$$a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma} - a^2_{\varrho\sigma} > 0 \quad .$$

Denn es ist die rechte Seite der Gleichung **57d** nach ihrer Ableitung aus Gleichung **55** eine notwendig positive Größe, welches auch die Werte der dp_ϱ sind. Hierfür sind die vorstehenden Ungleichheiten notwendige Bedingungen.

5. Für alle Werte der ϱ, σ, τ gilt die Gleichung: 63

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \, m_\nu\, \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right) = m \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Um die Gleichung zu beweisen, setzt man rechts die Werte der $a_{\varrho\sigma}$ aus Gleichung **57c** ein und macht Gebrauch von den Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ nach **59**.

64 **6.** Die Determinante aus den r^2 Größen $a_{\varrho\sigma}$ sei $\triangle$. Der Faktor von $a_{\varrho\sigma}$ in $\triangle$, dividiert durch $\triangle$, soll dauernd bezeichnet werden mit $b_{\varrho\sigma}$. Es ist also als Definition

$$b_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{\varrho\sigma}} \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist dann

$$b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho} \quad .$$

Die Zahl der voneinander verschiedenen Größen $b_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2} r(r+1)$.

65 **7.** Der Wert des Ausdrucks

$$\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa}$$

ist gleich Eins, sobald $\iota = \varkappa$ ist; jener Wert ist gleich Null, sobald ι und $\varkappa$ verschieden sind.

Denn ist $\iota = \varkappa$, so stellt der Ausdruck $\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa} \triangle$ die Determinante $\triangle$ selbst dar. Ist aber ι von $\varkappa$ verschieden, so stellt er eine Determinante dar, welche aus $\triangle$ entsteht, indem die Reihe $a_{\varrho\varkappa}$ ersetzt wird durch die Reihe der $a_{\varrho\iota}$. In dieser Determinante sind also zwei Reihen gleich, und ihr Wert ist Null.

66 **8.** Es gelten für alle Werte der ι und $\varkappa$ die beiden Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} = a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} = b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man bilde nach **65** den Wert des Ausdrucks $\sum_1^r{}_\varrho\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}$

bez. $\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\sigma} b_{\varrho\iota}$ für alle Werte des σ von 1 bis r, man multipliziere die entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit $a_{\sigma\varkappa}$ bez. $b_{\sigma\varkappa}$ und addiere, so folgen die Gleichungen.

9. Bestimmte Änderungen der Größen $a_{\varrho\sigma}$ haben bestimmte Änderungen der Größen $b_{\varrho\sigma}$ zur Folge. Bezeichnen $\delta a_{\varrho\sigma}$ und $\delta b_{\varrho\sigma}$ beliebige zusammengehörige Variationen der $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$, so gelten die Gleichungen: 67

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa}\, \delta b_{\varrho\sigma} = -\,\delta a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa}\, \delta a_{\varrho\sigma} = -\,\delta b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man variiere die Gleichungen 66 und mache Gebrauch von den Beziehungen 65, so folgen die Gleichungen.

10. Variiert man in den $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ nur eine bestimmte Koordinate p_τ, von welcher sie abhängen, so folgt insbesondere für jeden Wert des τ: 68

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\,\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\,\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad .$$

Verrückungen in Richtung der Koordinaten.

Definition 1. Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt eine unendlich kleine Verrückung, bei welcher sich nur diese eine Koordinate, nicht aber die übrigen gleichzeitig benutzten ändern. 69

Die Richtung aller Verrückungen in Richtung derselben Koordinate aus derselben Lage ist dieselbe; sie heißt die Richtung der Koordinate in dieser Lage.

70 **Bemerkung.** Die Richtung einer Koordinate hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten des Systems.

71 **Definition 2.** Reduzierte Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt die Komponente der Verrückung in Richtung der Koordinate (48, 69), dividiert durch die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung.

Die reduzierte Komponente in der Richtung einer Koordinate nennen wir auch kurz die Komponente nach der Koordinate.

Man spricht also von der Komponente einer beliebigen Verrückung in einer beliebigen Richtung, aber man kann nicht sprechen von der reduzierten Komponente in einer beliebigen Richtung, sondern nur von der reduzierten Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in der Richtung einer Koordinate.

72 **Aufgabe 1a.** Die Neigung s,x_ν der Verrückung ds gegen die rechtwinklige Koordinate x_ν durch die $3n$ Änderungen dx_ν auszudrücken.

In Gleichung **56** setzen wir die dx'_ν gleich Null für alle ν mit Ausnahme des bestimmten ν, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Dann ist die Richtung von ds' nach **69** die von x_ν, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da ferner alsdann nach **55** $m\,ds'^2 = m_\nu\,dx'^2_\nu$, so wird als Lösung der Aufgabe erhalten:

$$ds \cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dx_ν einzusetzen ist.

73 **Aufgabe 1b.** Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung ds nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν durch die Änderungen dx_ν der Koordinaten auszudrücken.

Setzen wir in der vorigen Aufgabe $s,x_\nu = 0$, so erfolgt die Verrückung ds in Richtung der Koordinate x_ν, und wir erkennen, daß die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung gleich $dx_\nu : ds$ also gleich $\sqrt{m/m_\nu}$ ist. Die linke Seite der Gleichung **72** stellt schon die Komponente von ds in Richtung von x_ν dar; dividieren wir also die Gleichung durch $\sqrt{m/m_\nu}$, so erhalten wir (71) als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\, dx_\nu \quad .$$

Aufgabe 1c. Die Änderungen dx_ν der rechtwinkligen Koordinaten bei einer Verrückung auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der Verrückung nach jenen Koordinaten. 74

Die Lösung der vorigen Aufgabe gibt unmittelbar:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu}\, d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 2a. Die Neigung s,p_ϱ der Verrückung ds gegen die allgemeine Koordinate p_ϱ durch die r Änderungen dp_ϱ auszudrücken. 75

In Gleichung **58** setzen wir die dp'_ϱ gleich Null für alle ϱ mit Ausnahme des bestimmten ϱ, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Die Richtung von ds' ist alsdann nach **69** die von p_ϱ, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da gleichzeitig nach **57** $ds'^2 = a_{\varrho\varrho}\, dp'^2_\varrho$ wird, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dp_σ einzusetzen ist.

Anmerkung 1. Setzen wir in der Lösung der vorigen Aufgabe alle dp_σ gleich Null mit Ausnahme eines bestimmten dp_σ, so wird die Richtung von ds die Richtung dieser Koordinate p_σ, und der Winkel s,p_σ geht über in den Winkel p_σ,p_ϱ, welchen die Koordinate p_σ mit der Koordinate p_ϱ bildet. Da gleichzeitig alsdann $ds^2 = a_{\sigma\sigma} dp_\sigma{}^2$ wird, so erhalten wir für diesen Winkel: 76

$$\cos p_\sigma,p_\varrho = \frac{a_{\varrho\sigma}}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}}} \quad .$$

Dieser Winkel ist nach **62** stets ein reeller Winkel.

77 **Anmerkung 2.** Die Koordinaten p_ϱ heißen orthogonal, wenn jede von ihnen in jeder Lage auf allen übrigen senkrecht steht. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist (**76**), daß alle $a_{\varrho\sigma}$, für welche ϱ und σ verschieden sind, verschwinden. Die rechtwinkligen Koordinaten sind ein Beispiel orthogonaler Koordinaten.

78 **Aufgabe 2b.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ dieser Koordinaten bei der Verrückung.

Setzen wir in Gleichung **75** s,p_ϱ gleich Null, so erfolgt die Verrückung ds dieser Gleichung in Richtung von p_ϱ; alle dp_σ sind also Null, außer dp_ϱ, und die Gleichung wird also $\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds = a_{\varrho\varrho}\,dp_\varrho$. Die Änderungsgeschwindigkeit von p_ϱ mit einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung ist also $1/\sqrt{a_{\varrho\varrho}}$. Bedenken wir, daß nach **48** $ds \cos s,p_\varrho$ die Komponente von ds in der Richtung von p_ϱ ist, und beachten die Definition **71**, so erkennen wir, daß die linke Seite der Gleichung **75** bereits die reduzierte Komponente nach p_ϱ darstellt, und wir erhalten also die Beziehung:

a) $$d\bar{p}_\varrho = \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds \cos s,p_\varrho \quad ,$$

also als Lösung der Aufgabe:

b) $$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,dp_\sigma \quad .$$

79 **Aufgabe 2c.** Die Änderungen dp_ϱ der Koordinaten bei Ausführung der Verrückung ds auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den Koordinaten p_ϱ.

Die Auflösung der Gleichungen **78b** unter Benutzung der Bezeichnung von **64** ergibt unmittelbar:

$$dp_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\,d\bar{p}_\sigma \quad .$$

80 **Aufgabe 3a.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die

Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **78, 57b, 57c, 74**:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho = \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho}\, dx_\nu = \sum_1^{3n} {}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 3b. Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ einer Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems. 81

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **73, 57b, 79**:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m} dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma} \sum_1^r {}_\varrho\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho \quad ,$$

also, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_{\nu\sigma}\, b_{\varrho\sigma} = \beta_{\nu\varrho} \quad , \qquad \text{a)}$$

folgt als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \sum_1^r {}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho}\, d\bar{p}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Aufgabe 4. Die Länge einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch ihre reduzierten Komponenten nach den Koordinaten des Systems. 82

Wenden wir die allgemeinen Koordinaten p_ϱ an, so erhalten wir durch successive Anwendung von **78b** und **79** auf Gleichung **57b** nacheinander:

$$ds^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} dp_\varrho dp_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho dp_\varrho d\bar{p}_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} d\bar{p}_\varrho d\bar{p}_\sigma \quad .$$

83 Wenden wir insbesondere die rechtwinkligen Koordinaten an, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} dx_\nu^2$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu dx_\nu d\bar{x}_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m}{m_\nu} d\bar{x}_\nu^2 \quad .$$

84 **Aufgabe 5a.** Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen beliebiger Lage auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der beiden Verrückungen nach den rechtwinkligen Koordinaten.

Durch successive Anwendung von **73** und **74** auf Gleichung **56** erhalten wir nacheinander die Formen:

$$ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} dx_\nu dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu dx_\nu d\bar{x}'_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu d\bar{x}_\nu dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m}{m_\nu} d\bar{x}_\nu d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Hierin haben wir für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{x}_\nu$ nach **83** einzusetzen.

Aufgabe 5b. Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen aus der gleichen Lage auszudrücken durch die Komponenten der beiden Verrückungen nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ. 85

Durch successive Anwendung von **78** und **79** auf Gleichung **58** erhalten wir nacheinander die Formen:

$$\begin{aligned} ds\,ds'\cos s,s' &= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma \\ &= \sum_1^r{}_\varrho\, dp_\varrho\, d\bar{p}'_\varrho = \sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho \\ &= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho\, d\bar{p}'_\sigma \quad . \end{aligned}$$

Hierin sind wieder für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ nach **82** einzusetzen.

Aufgabe 6. Den Winkel zweier unendlich kleiner Verrückungen auszudrücken durch die Winkel, welche beide mit den Koordinaten des Systems bilden. 86

Wir dividieren die letzte der Gleichungen **85** durch $ds\,ds'$ und beachten, daß nach **78a**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{d\bar{p}_\varrho}{ds} \quad , \qquad \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s',p_\varrho = \frac{d\bar{p}'_\varrho}{ds} \quad ;$$

wir erhalten so als Lösung der Aufgabe:

$$\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma}\sqrt{a_{\varrho\varrho}\,a_{\sigma\sigma}}\cos s,p_\varrho \cos s',p_\sigma \quad .$$

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, so erhält die vorstehende Gleichung die besondere Form: 87

$$\cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu \cos s',x_\nu \quad .$$

Es ist zu bemerken, daß die Gleichung **86** gleiche Lage der beiden Verrückungen voraussetzt, während die Gleichung **87** von dieser Voraussetzung frei ist.

88 **Lehrsatz.** Die r Winkel, welche eine beliebige Richtung in einer bestimmten Lage mit den Richtungen der r allgemeinen Koordinaten daselbst bildet, sind verbunden durch die Gleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_\varrho \cos s,p_\sigma = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir in 86 die Richtungen von ds und ds' zusammenfallen lassen.

89 **Folgerung.** Insbesondere genügen die $3n$ Winkel, welche eine beliebige Verrückung des Systems mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bilden, der Gleichung:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad .$$

Benutzung partieller Differentialquotienten.

90 **Bezeichnung.** Durch die Werte der Koordinaten p_ϱ ihrer Lage und der Änderungen dp_ϱ derselben ist die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung bestimmt. Ändern wir eins jener Bestimmungsstücke, während die übrigen konstant gehalten werden, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_p ds$ bezeichnet werden.

Betrachten wir dagegen, was ebenfalls zulässig ist, die Koordinaten p_ϱ und die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ nach ihnen als die unabhängigen Bestimmungsstücke von ds, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_q ds$ bezeichnet werden.

Andere partielle Differentiale von ds sind selbstverständlich möglich, aber es ist für unseren Zweck nicht nötig, sie zu bezeichnen, sondern es bleibt für sie das gewöhnliche, jedesmal durch eine Worterklärung näher zu bestimmende Zeichen ∂ds vorbehalten.

91 **Bemerkung 1.** Die Komponenten einer Verrückung nach den Koordinaten lassen sich als partielle Differentialquotienten

der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\varrho} = ds\,\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho}\;.$$

Man differentiiere die Gleichung **57d** und beachte **78**.

Bemerkung 2. Die Neigung einer unendlich kleinen Verrückung gegen die Koordinate p_ϱ kann mit Hilfe der partiellen Differentialquotienten ihrer Länge dargestellt werden. Und zwar geschieht dies in der Form: **92**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho}\;.$$

Man beachte **91** und **78**.

Anmerkung. Werden insbesondere in den Bemerkungen 1 und 2 rechtwinklige Koordinaten angewandt, so erhält man **93**

$$d\bar{x}_\nu = ds\,\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\;, \qquad \text{a)}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\cos s,x_\nu = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\;, \qquad \text{b)}$$

wobei die Bedeutung der partiellen Differentiale aus dem vorigen hervorgeht.

Bemerkung 3. Die Änderungen, welche die Koordinaten p_ϱ bei Durchlaufung einer unendlich kleinen Verrückung erleiden, lassen sich als partielle Differentialquotienten der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form: **94**

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\varrho} = ds\,\frac{\partial_q^{!} ds}{\partial d\bar{p}_\varrho}\;.$$

Man beachte die Gleichungen **82** und **79**.

95 **Bemerkung 4.** Für alle Werte des Index τ besteht zwischen den partiellen Differentialquotienten von ds die Gleichung:

a) $$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \quad .$$

Denn es ist:

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

Setzen wir in der ersteren Form für die dp_ϱ und dp_σ ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{p}_\sigma$ nach **79** und beachten die Beziehungen **68** und die zweite Form, so folgt die Behauptung. Ebenso wenn wir in gleicher Weise von der zweiten Form ausgehen.

96 **Lehrsatz.** Erleidet die Lage einer unendlich kleinen Verrückung zweimal dieselbe Veränderung, während gleichzeitig das eine Mal die Komponenten nach den Koordinaten, das andere Mal die Änderungen der Koordinaten die ursprünglichen bleiben, so ist die Änderung der Länge der Verrückung in beiden Fällen entgegengesetzt gleich.

Da im zweiten Falle die $\delta dp_\varrho = 0$ sein sollen, während die Koordinaten p_ϱ die Änderungen δp_ϱ erleiden, so ist die Änderung der Länge der Verrückung:

a) $$\delta_p ds = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Im ersten Falle sollen die $\delta d\bar{p}_\varrho = 0$ sein, während die Koordinaten dieselben Änderungen δp_ϱ erleiden, es ist also jetzt:

b) $$\delta_q ds = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Aus beiden Gleichungen a) und b) und der Bemerkung 4 folgt:

$$\delta_p ds = -\delta_q ds \quad , \qquad \text{c)}$$

welches die Behauptung ist.

Bahnen der Systeme.

Erläuterungen.

1. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen, 97
welche ein System beim Übergang aus einer Lage in die andere durchläuft, heißt eine Bahn des Systems.

Eine Bahn kann auch betrachtet werden als die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Verrückungen, welche das System beim Übergang aus der einen in die andere Lage erleidet.

2. Ein Teil der Bahn, welcher durch zwei unendlich nahe 98
Lagen begrenzt wird, heißt ein Bahnelement. Ein Bahnelement ist eine unendlich kleine Verrückung; es hat eine Länge und eine Richtung.

3. Richtung der Bahn eines Systems in einer bestimmten 99
ihrer Lagen heißt die Richtung eines dieser Lage unendlich benachbarten Bahnelements.

Länge der Bahn eines Systems zwischen zwei ihrer Lagen heißt die Summe der Längen der Bahnelemente zwischen diesen Lagen.

Analytische Darstellung. Die Bahn eines Systems wird 100
analytisch dargestellt, indem die Koordinaten ihrer Lagen angegeben werden als Funktionen einer und derselben, übrigens beliebigen Variabeln. Jeder Lage der Bahn ist dann ein Wert der Variabeln zugeordnet. Als unabhängige Variabele kann eine der Koordinaten selbst dienen. Sehr häufig ist es zweckmäßig, als unabhängige Variabele die Länge der Bahn, von einer bestimmten Lage der Bahn ab gerechnet, zu benutzen. Die Differentialquotienten nach dieser bestimmten Variabelen,

also nach der Bahnlänge, sollen in LAGRANGES Weise durch Akzente bezeichnet werden.

101 **Definition 1.** Die Bahn eines Systems heißt gerade, wenn sie in allen ihren Lagen die gleiche Richtung hat.

102 **Folgerung.** Beschreibt ein System eine gerade Bahn, so beschreiben seine einzelnen Punkte gerade Linien, deren Längen, von der Ausgangslage an gerechnet, einander beständig proportional bleiben (38).

103 **Definition 2.** Die Bahn eines Systems heißt krumm, wenn sich die Richtung der Bahn von Lage zu Lage ändert. Die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Bahnlänge heißt die Krümmung der Bahn.

Die Krümmung der Bahn ist also der Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Richtungsunterschied und der Entfernung zweier benachbarter Bahnelemente.

104 **Anmerkung.** Der Wert der Krümmung ist hierdurch definiert unabhängig von der Form der analytischen Darstellung, also insbesondere unabhängig von der besonderen Wahl der Koordinaten des Systems.

105 **Aufgabe 1.** Die Krümmung c der Bahn auszudrücken durch die Änderungen der Winkel, welche die Bahn mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet.

Es sei $d\varepsilon$ der Winkel zwischen der Richtung der Bahn am Anfang und am Ende des Bahnelementes ds. Dann ist nach Definition (103):

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad .$$

Es seien ferner die $\cos s,x_\nu$ die Cosinus der Winkel, welche die Bahn am Anfange von ds mit den x_ν bildet, und es seien $\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu$ die Werte der gleichen Größen am Ende von ds. Dann ist nach Gleichung 87:

$$\cos(d\varepsilon) = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu (\cos s,x_\nu + d\cos s,x_\nu) \quad .$$

Es ist aber ferner nach Gleichung **89** sowohl

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad ,$$

als auch

$$\sum_1^{3n} {}_\nu (\cos s,x_\nu + d \cos s,x_\nu)^2 = 1 \quad .$$

Indem wir das Doppelte der ersten Gleichung subtrahieren von der Summe der beiden letzteren, erhalten wir:

$$2 - 2 \cos (d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu (d \cos s,x_\nu)^2 \quad ,$$

also durch Division mit ds^2 die Lösung der Aufgabe:

$$c^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu \left(\frac{d \cos s,x_\nu}{ds} \right)^2 \quad .$$

Aufgabe 2. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten des Systems mit der Bahnlänge. **106**

Unter Berücksichtigung von **72** haben wir (**100**):

$$\cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x'_\nu \quad ,$$

also

$$(\cos s,x_\nu)' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x''_\nu \quad ,$$

also nach **105** als Lösung der Aufgabe:

$$mc^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu x''^2_\nu \quad .$$

Aufgabe 3. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, dieselben betrachtet als Funktionen einer beliebigen Variabelen τ. **107**

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$x_\nu'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \left\{\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2}\right\} \quad .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in c^2 ein und beachten, daß (55)

a) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2 \quad ,$$

also

b) $$m\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}$$

ist, so folgt als Lösung der Aufgabe:

c) $$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2 \quad ,$$

worin für $ds/d\tau$ und $d^2s/d\tau^2$ noch ihre Werte aus den vorigen Gleichungen zu setzen sind.

108 **Aufgabe 4.** Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems mit der Bahnlänge.

Wir führen in den Ausdruck **106** an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten die p_ϱ ein, indem wir die x_ν'' ausdrücken durch die p_ϱ' und p_ϱ''. Zunächst ist nach **57 b**

$$x_\nu' = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho} p_\varrho' \quad ,$$

also

$$x_\nu'' = \sum_1^{r}{}_\varrho\, (\alpha_{\nu\varrho} p_\varrho'' + \alpha_{\nu\varrho}' p_\varrho') \quad ,$$

also

$$x_\nu''^2 = \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{r}{}_\sigma (\alpha_{\nu\varrho}\,\alpha_{\nu\sigma}\, p_\varrho'' p_\sigma'' + 2\,\alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}\, p_\varrho' p_\sigma'' + \alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}'\, p_\varrho' p_\sigma') \quad .$$

Man bilde diese Gleichungen für alle ν, multipliziere eine jede mit m_ν/m und addiere alle. Links entsteht c^2. Rechts kann die Summation nach ν mit Hilfe der schon eingeführten Größen $a_{\varrho\sigma}$ in den ersten beiden Gliedern ausgeführt werden. Im ersten Glied ergibt die Summation unmittelbar nach **57c** $a_{\varrho\sigma}$. Als Faktor von p''_σ im zweiten Gliede wird nacheinander erhalten: **(108)**

$$2\sum_1^r{}^\varrho p'_\varrho \sum_1^{3n}{}^\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\alpha'_{\nu\varrho} = 2\sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\tau p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}^\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}$$

$$= \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\tau p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}^\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right)$$

$$= \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\tau p'_\varrho p'_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \qquad \text{(nach 63)}$$

$$= \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\tau p'_\varrho p'_\tau \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Beim Übergang von der zweiten in die dritte Form und von der vierten in die fünfte Form ist Gebrauch gemacht von der Bemerkung, daß, wenn $F(\varrho,\sigma)$ ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Indices ϱ und σ enthält, alsdann identisch

$$\sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma F(\varrho,\sigma) = \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma F(\sigma,\varrho) \qquad \textbf{a)}$$

ist.

Der Faktor des dritten Gliedes läßt sich nicht durch die $a_{\varrho\sigma}$ ausdrücken. Um im Endresultat die Beziehung auf die rechtwinkligen Koordinaten gleichwohl verschwinden zu lassen, sei gesetzt:

$$a_{\varrho\sigma\lambda\mu} = \sum_1^{3n}{}^\nu \frac{m_\nu}{m}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\mu} \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Es wird dann schließlich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{c)}\qquad c^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \left\{ a_{\varrho\sigma} p''_\varrho p''_\sigma + \sum_1^r{}_\tau \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) p'_\varrho p'_\tau p''_\sigma \right.$$
$$\left. + \sum_1^r{}_\lambda \sum_1^r{}_\mu a_{\varrho\sigma\lambda\mu} p'_\varrho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu \right\} .$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in **57** eingeführten Funktionen der p_ϱ; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Größen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4} r^2 (r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 **1.** Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 **2.** Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschließen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.