Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Endliche Verrückungen

des Systems zur Folge hat, und welche nicht eine Konfigurationskoordinate ist. Sechs beliebige Größen, welche diese Eigenschaften besitzen und voneinander unabhängig sind, können als Koordinaten der absoluten Lage gewählt werden und werden zu Koordinaten der absoluten Lage dadurch, daß ihnen keine anderen Größen als Koordinaten hinzugefügt werden, als solche, welche die Eigenschaft von Konfigurationskoordinaten haben.

Endliche Verrückungen.

a) der Punkte.

22 **Definition 1.** Den Übergang eines materiellen Punktes aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und die Art des Überganges nennen wir eine Verrückung des Punktes aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Punktes ist also vollständig bestimmt durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig gegeben durch ihre Anfangslage, ihre Richtung und ihre Größe.

23 **Anmerkung 1.** Die Größe der Verrückung eines Punktes ist gleich der Entfernung seiner Endlage von seiner Anfangslage. Sind die x_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage, die x'_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Endlage, so ist die Größe s' der Verrückung die positive Wurzel der Gleichung:

$$s'^2 = \sum_1^3{}_\nu \, (x'_\nu - x_\nu)^2 \quad .$$

24 **Anmerkung 2.** Die Richtung einer Verrückung ist die Richtung einer Geraden, welche von der Anfangslage der Verrückung zu ihrer Endlage gezogen wird. Haben s', x_ν, x'_ν die Bedeutung wie vorher, und sind die x^0_ν, x''_ν, s'' die Koordinaten der Anfangs-, der Endlage und die Länge einer zweiten

Verrückung, so ist der Winkel oder Richtungsunterschied s', s'' beider Verrückungen gegeben durch die Gleichung:

$$s's'' \cos s', s'' = \sum_1^3 {}_\nu \, (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) \quad . \qquad \textbf{a)}$$

Denn die Betrachtung des Dreiecks aus den beiden Längen s' und s'' als Seiten, und dem Winkel s', s'' als eingeschlossenem Winkel liefert uns die Gleichung:

$$s'^2 + s''^2 - 2 s's'' \cos s', s'' = \sum_1^3 {}_\nu \left[(x'_\nu - x_\nu) - (x''_\nu - x^0_\nu) \right]^2 \quad , \qquad \textbf{b)}$$

aus welcher zusammen mit 23 Gleichung **a)** folgt.

Definition 2. Zwei Verrückungen eines Punktes heißen identisch, wenn sie Anfangs- und Endlage gemein haben; zwei Verrückungen eines Punktes heißen gleich, wenn sie Richtung und Größe gemein haben; zwei Verrückungen heißen gleichgerichtet oder parallel, wenn sie die Richtung gemein haben. 25

Zwischenbemerkung. Bezeichnen $x_1 \ldots\ldots x_k$ die k geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einem Raum von k Dimensionen, $x'_1 \ldots\ldots x'_k$ die Koordinaten eines zweiten Punktes, so erweitert die an dieser Stelle eingeschaltete Fortsetzung, daß die Entfernung beider Punkte die positive Wurzel der Gleichung 26

$$s'^2 = \sum_1^k {}_\nu \, (x'_\nu - x_\nu)^2$$

sei, den ganzen folgenden Inhalt der Untersuchung und damit die ganze Mechanik auf den Raum von k Dimensionen, ohne daß eine Änderung auch nur des Wortlautes nötig wäre, von Nebendingen abgesehen. Doch soll von dieser Bemerkung kein Gebrauch gemacht werden, sondern es soll gemäß der ersten Fortsetzung stets nur von dem Raum der Euklidschen Geometrie die Rede sein.

b) der Systeme.

27 **Definition.** Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und ohne Rücksicht auf die Art des Überganges heißt eine Verrückung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Systems ist also vollständig gegeben durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig bestimmt, wenn ihre Anfangslage und diejenigen Merkmale gegeben sind, welche wir als ihre Richtung und Größe bezeichnen.

28 **Hilfsbezeichnung.** Quadratischen Mittelwert einer Reihe von Größen nennen wir die positive Quadratwurzel des arithmetischen Mittelwertes der Quadrate der einzelnen Größen.

29 **Definition a.** Größe der Verrückung eines Systems heißt der quadratische Mittelwert aus der Größe der Verrückungen seiner sämtlichen Massenteilchen.

Die Größe der Verrückung, welche eine Lage eines Systems in eine andere überführt, heißt auch die Entfernung oder der Abstand beider Lagen voneinander. Die Größe einer Verrückung wird auch als die Länge derselben bezeichnet.

30 **Bemerkung.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems voneinander ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere von der Wahl der Koordinaten des Systems.

31 **Aufgabe.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems durch die rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Es sei n die Zahl der materiellen Punkte des Systems. Es sei x_ν der Wert einer der rechtwinkligen Koordinaten des Systems vor der Verrückung, x'_ν der Wert derselben Koordinate nach der Verrückung. Die Koordinate x_ν ist zugleich Koordinate eines der Punkte des Systems; es sei die Masse dieses Punktes m_ν. ν läuft von 1 bis $3n$, aber nicht alle m_ν sind ungleich, sondern es ist jedes μ von 1 bis n

$$m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu} \quad .$$

Ist nun etwa η die Zahl der Massenteilchen in der Masseneinheit, so enthält die Masse m_ν $m_\nu \eta$ Massenteilchen, und die Gesamtmasse m des Systems $m\eta$ derselben. Berechnet man mit diesen Bezeichnungen den quadratischen Mittelwert s' der Verrückungen aller Massenteilchen, so folgt für denselben die positive Wurzel der Gleichung:

$$m s'^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 \quad , \tag{a}$$

und diese Wurzel ist also die gesuchte Entfernung. Übrigens ist

$$m = \tfrac{1}{3} \sum_1^{3n}{}_\nu \, m_\nu \quad . \tag{b}$$

Lehrsatz. Die Entfernung zweier Lagen eines Systems voneinander ist stets kleiner als die Summe der Entfernungen beider Lagen von einer dritten. 32

Es seien nämlich die x'_ν, x''_ν, x'''_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Lagen 1, 2, 3; es seien s_{12}, s_{13}, s_{23} die Entfernungen derselben voneinander. Wird für den Augenblick zur Abkürzung gesetzt:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x'_\nu) = a_\nu \quad , \qquad \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x''_\nu) = b_\nu \quad ,$$

so wird

$$s_{13}^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \, a_\nu^2 \quad , \qquad s_{23}^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \, b_\nu^2 \quad , \qquad s_{12}^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu \, (a_\nu - b_\nu)^2 \quad .$$

Gesetzt nun, es wäre $s_{12} > s_{13} + s_{23}$, so wäre durch Quadrierung zu erhalten $s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2 > 2\, s_{13}\, s_{23}$, also durch nochmalige Quadrierung:

$$4\, s_{13}^2 s_{23}^2 - \left(s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2\right)^2 < 0 \quad .$$

Dies ist aber nicht möglich, denn die linke Seite wird durch Einsetzen der Werte für die s in die Form gebracht:

$$4 \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \, (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2 \quad ,$$

ist also als Summe von Quadraten notwendig positiv. Da nun also die entgegengesetzte Vermutung unmöglich war, so muß stets sein:

$$s_{12} \leqq s_{13} + s_{23} \quad .$$

33 **Folgerung.** Aus den drei Entfernungen dreier beliebiger Lagen eines Systems voneinander als Seiten ist stets ein ebenes Dreieck zu zeichnen möglich.

34 **Definition b.** Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage heißt der eingeschlossene Winkel eines ebenen Dreiecks, in welchem die Längen der beiden Verrückungen die einschließenden und die Entfernung ihrer Endpunkte die gegenüberliegende Seite bilden.

Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen wird auch der Winkel zwischen ihnen oder ihre Neigung gegeneinander genannt.

35 **Bemerkung 1.** Die Neigung zweier Verrückungen aus derselben Lage gegeneinander ist unter allen Umständen ein eindeutig bestimmter, reeller Winkel, kleiner als π.

Denn das Dreieck, welches jene Neigung bestimmt, kann nach 32 immer gezeichnet werden.

36 **Bemerkung 2.** Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere also von der Wahl der benutzten Koordinaten.

37 **Aufgabe.** Den Richtungsunterschied zweier Verrückungen aus der gleichen Anfangslage auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage und der Endlagen.

Es seien die x_ν die Koordinaten der gemeinsamen Anfangslage, die x'_ν und x''_ν die Koordinaten der beiden Endlagen. s' und s'' seien die Längen der beiden Verrückungen, $s's''$ der von ihnen eingeschlossene Winkel. Unter Benutzung des ebenen Dreieckes aus den drei Entfernungen der drei Lagen erhalten wir:

$$2\,m\,s's''\cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu\,(x'_\nu - x_\nu)^2 + \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu\,(x''_\nu - x_\nu)^2$$
$$- \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu\big[(x''_\nu - x_\nu) - (x'_\nu - x_\nu)\big]^2$$

und hieraus

$$m\,s's''\cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu\,(x''_\nu - x_\nu)\,(x'_\nu - x_\nu) \quad , \qquad \text{a)}$$

in welcher Gleichung wir uns noch s' und s'' nach **31a** durch die rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt zu denken haben.

Lehrsatz. Zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage haben den Richtungsunterschied Null, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte des Systems in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind, — und umgekehrt. 38

Denn sind die Verrückungen aller Punkte gleichgerichtet und proportional, so ist für alle ν

$$x''_\nu - x_\nu = \varepsilon\,(x'_\nu - x_\nu) \quad ,$$

unter ε einen für alle ν gleichen Faktor verstanden. Es wird daher die rechte Seite der Gleichung **37a** gleich $m\varepsilon s'^2$. Es wird aber ferner $s'' = \varepsilon s'$, also nach jener Gleichung $\cos s',s'' = 1$, also, da s',s'' der Innenwinkel eines Dreiecks, $s',s'' = 0$ (**35**).

Umgekehrt, wenn $s',s'' = 0$, $\cos s',s'' = 1$ ist, so liefert die Gleichung **37a** durch Einsetzen der Werte von s' und s'' und Quadrierung:

$$0 = \Big[\sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu\,(x''_\nu - x_\nu)\,(x'_\nu - x_\nu)\Big]^2 - \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 \cdot \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2$$
$$= \sum_1^{3n}{}^{\mu} \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu m_\mu \big[(x''_\nu - x_\nu)\,(x'_\mu - x_\mu) - (x''_\mu - x_\mu)\,(x'_\nu - x_\nu)\big]^2 \quad ,$$

und dies ist nur möglich, wenn für jedes μ und ν

$$\frac{x''_\mu - x_\mu}{x''_\nu - x_\nu} = \frac{x'_\mu - x_\mu}{x'_\nu - x_\nu} \quad ,$$

womit auch die Umkehrung bewiesen ist.

39 **Folgerung 1.** Haben zwei Verrückungen aus derselben Anfangslage den Richtungsunterschied Null gegen eine dritte Verrückung aus der gleichen Lage, so haben sie den Richtungsunterschied Null gegeneinander.

Alle Verrückungen, welche den Winkel Null mit einer bestimmten Verrückung bilden, bilden also miteinander den Winkel Null. Das Gemeinsame aller solcher Verrückungen heißt die Richtung derselben.

40 **Folgerung 2.** Wenn zwei Verrückungen eines Systems gleiche Richtung haben, so haben sie gleichen Richtungsunterschied mit jeder dritten Verrückung.

Alle Verrückungen von gleicher Richtung aus gleicher Lage bilden also denselben Winkel mit allen Verrückungen, welche eine andere gleiche Richtung haben. Dieser gemeinsame Winkel heißt auch der Winkel der Richtungen gegeneinander oder der Unterschied der beiden Richtungen.

41 **Definition.** Zwei Verrückungen eines Systems heißen identisch, wenn die Verrückungen der Punkte des Systems in beiden identisch sind. Zwei Verrückungen eines Systems heißen gleich, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleich sind. Zwei Verrückungen eines Systems heißen gleichgerichtet oder parallel, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind.

42 **Folgerung.** Zwei Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage sind gleichgerichtet, wenn jede von ihnen gleiche Richtung hat mit einer Verrückung, welche durch ihre Anfangslage geht und der anderen Verrückung gleich ist, — und umgekehrt.

43 **Zusatz.** Richtungsunterschied zweier Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage heißt der Winkel zwischen jeder von ihnen und einer zu der anderen parallelen Verrückung aus ihrer Anfangslage.

44 **Aufgabe.** Den Winkel zwischen zwei beliebigen Verrückungen eines Systems auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten ihrer vier Endlagen.

Es seien s' und s'' die Größen der beiden Verrückungen und s',s'' ihr Winkel. Es seien die x_ν und x'_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der ersten, die x^0_ν und x''_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der zweiten Verrückung. Eine Verrückung, deren Anfangskoordinaten die x_ν sind, und deren Endkoordinaten den Wert $x_\nu + x''_\nu - x^0_\nu$ haben, hat gleiche Anfangslage mit der ersten und ist der zweiten gleich. Sie bildet also mit der ersten den gesuchten Winkel, für welchen also die Gleichung folgt:

$$m\, s'\, s'' \cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) \quad .$$

Der gleiche Wert wird erhalten, wenn wir eine Verrückung durch die Anfangslage der zweiten und gleich der ersten legen und den Winkel zwischen dieser und der zweiten bestimmen.

Unsere Definition im Zusatz 43 war also eindeutig und daher zulässig.

Definition. Zwei Verrückungen eines Systems heißen senkrecht aufeinander, wenn der Winkel zwischen ihnen ein rechter ist. 45

Folgerung 1. Die hinreichende und notwendige analytische Bedingung dafür, daß zwei Verrückungen senkrecht aufeinander stehen, ist die Gleichung: 46

$$\sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) = 0 \quad ,$$

in welcher Gebrauch gemacht ist von den Bezeichnungen der Aufgabe 44.

Folgerung 2. In einem System von n Punkten ist aus einer gegebenen Lage eine $(3n-1)$fache Mannigfaltigkeit von Verrückungen, also eine $(3n-2)$fache Mannigfaltigkeit von Richtungen denkbar, welche auf einer gegebenen Richtung senkrecht stehen. 47

Definition. Komponente einer Verrückung in einer gegebenen Richtung heißt eine Verrückung, deren Richtung die 48 gegebene Richtung ist, und deren Größe gleich der Vertikalprojektion der Größe der gegebenen Verrückung innerhalb des Winkels ist, welchen die gegebene Verrückung mit der gegebenen Richtung bildet.

Ist also die Größe der gegebenen Verrückung s, und bildet sie mit der gegebenen Richtung den Winkel ω, so ist ihre Komponente in dieser Richtung gleich $s \cos \omega$.

Die Größe der Komponente in gegebener Richtung wird gewöhnlich schlechthin die Komponente in dieser Richtung genannt.

Zusammensetzung der Verrückungen.

49 **Bemerkung**. Werden einem System mehrere Verrückungen erteilt, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, und welche sich so aneinander schließen, daß die Endlage der vorausgegangenen Verrückung die Anfangslage der folgenden ist, so ist die erreichte Endlage unabhängig von der Reihenfolge der Verrückungen.

Denn dies gilt für die Verrückungen, welche die einzelnen Punkte dabei erleiden, also für das System.

50 **Definition 1.** Eine Verrückung, welche das System in dieselbe Endlage überführt, wie eine Reihe aneinandergefügter Verrückungen, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, heißt die Summe jener gegebenen Verrückungen.

51 **Definition 2.** Differenz zwischen einer erstgenannten und einer zweitgenannten Verrückung heißt eine Verrückung, deren Summe mit der zweitgenannten die erstgenannte ergibt.

52 **Folgerung** (aus 49). Die Addition und Subtraktion der Verrückungen unterliegt den Regeln der algebraischen Addition und Subtraktion.