Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Konfiguration und absolute Lage

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Analytische Darstellung. b) des Systems. Die Lage 13
eines Systems von n materiellen Punkten kann analytisch dargestellt werden durch Angabe der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des Systems. Diese Koordinaten sollen dauernd bezeichnet werden mit $x_1 \ldots x_\nu \ldots x_{3n}$, wobei $x_1\, x_2\, x_3$ die Koordinaten des ersten Punktes, $x_{3\mu-2}\, x_{3\mu-1}\, x_{3\mu}$ die entsprechend gerichteten Koordinaten des μten Punktes bedeuten mögen. Diese $3n$ Koordinaten x_ν bezeichnen wir auch kurz als die rechtwinkligen Koordinaten des Systems. Jeder denkbaren Lage des Systems entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem seiner rechtwinkligen Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der x_ν eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Systems.

Anstatt durch die rechtwinkligen Koordinaten können wir die Lage eines Systems auch bestimmen durch irgendwelche r Größen $p_1 \ldots p_\varrho \ldots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Größen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind, und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind dadurch Funktionen dieser Größen, und umgekehrt. Die Größen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Systems. Ist $r > 3n$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3n$ Gleichungen bestehen. Wir wollen indessen ausschließen, daß zwischen den Koordinaten aus rein geometrischen Gründen eine Abhängigkeit bestehe, und es sei daher stets $r \leqq 3n$. Ist $r < 3n$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Systems durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der Koordinaten p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Konfiguration und absolute Lage.

Definition 1. Die Gesamtheit der gegenseitigen Lagen der 14
Punkte eines Systems heißt die Konfiguration des Systems.

Die Konfiguration des Systems und die absolute Lage der Konfiguration im Raume bestimmen zusammen die Lage des Systems.

15 **Definition 2.** Konfigurationskoordinate nennen wir jede Koordinate des Systems, deren Wert nicht geändert werden kann, ohne daß dadurch die Konfiguration des Systems sich änderte.

Ob eine bestimmte Koordinate Konfigurationskoordinate ist oder nicht, hängt also nicht ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

16 **Definition 3.** Koordinate der absoluten Lage heißt jede Koordinate des Systems, durch deren Änderung die Konfiguration nicht geändert werden kann, solange die übrigen Koordinaten des Systems sich nicht ändern.

Ob eine bestimmte Koordinate Koordinate der absoluten Lage ist oder nicht, hängt also ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

Folgerungen.

17 **1.** Eine Koordinate kann nicht zugleich Konfigurationskoordinate und Koordinate der absoluten Lage sein. Dagegen kann und wird im allgemeinen eine beliebig herausgegriffene Koordinate weder Konfigurationskoordinate noch auch Koordinate der absoluten Lage sein.

18 **2.** Sobald $n > 3$, können $3n$ voneinander unabhängige Koordinaten aller Lagen auf mannigfaltige Art so gewählt werden, daß sich unter ihnen bis zu $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten finden, aber auf keine Weise so, daß sich mehr als $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten unter ihnen finden.

Denn wählen wir unter die Koordinaten die 3 Abstände dreier beliebiger Punkte des Systems voneinander und die $3(n-3)$ Abstände der übrigen von jenen, so haben wir bereits $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten, und je $3n - 6$ verschiedene Funktionen jener Abstände werden ebenfalls $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten des Systems sein. Weniger Konfigurationskoordinaten können vorhanden sein; denn es sind z. B. gar keine vorhanden, wenn wir die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten benutzen. Mehr Konfigurationskoordinaten aber können sich unter unabhängigen Koordinaten nicht finden;

denn wären unter beliebigen Koordinaten mehr als $3n-6$ Konfigurationskoordinaten vorhanden, so ließen sich die letzteren als Funktionen jener $3n-6$ Abstände darstellen, wären also nicht voneinander unabhängig.

3. Sobald $n > 3$, können $3n$ unabhängige Koordinaten 19
aller denkbaren Lagen eines Systems auf mannigfaltige Art so gewählt werden, daß sich unter ihnen bis zu 6, aber nicht mehr als 6 Koordinaten der absoluten Lage finden.

Denn wählen wir die Koordinaten so, daß sich unter ihnen $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, und fügen hinzu 6 beliebige Koordinaten, etwa 6 der rechtwinkligen Koordinaten des Systems, so sind die letzteren eo ipso Koordinaten der absoluten Lage, da keine Änderung derselben die Konfiguration ändert, solange die übrigen festgehalten werden. Weniger als 6 Koordinaten der absoluten Lage können vorhanden sein; denn es sind z. B. keine vorhanden, wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten des Systems benutzen. Mehr als 6 aber können nicht vorhanden sein; denn wären für eine bestimmte Wahl der Koordinaten mehr vorhanden, so wären alle denkbaren Konfigurationen bestimmt durch die übrigen weniger als $3n-6$ Koordinaten, es ließen sich also für das System überhaupt nicht $3n-6$ voneinander unabhängige Konfigurationskoordinaten angeben, was gegen Folgerung 2 wäre.

4. Sind $3n$ unabhängige Koordinaten eines Systems 20
von n Punkten so gewählt, daß sich unter ihnen $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, so sind die übrigen 6 notwendig Koordinaten der absoluten Lage. Sind jene $3n$ Koordinaten so gewählt, daß sich unter ihnen 6 Koordinaten der absoluten Lage finden, so sind die übrigen $3n-6$ notwendig Konfigurationskoordinaten.

Denn fände sich unter den letzteren $3n-6$ Koordinaten auch nur eine, welche geändert werden könnte ohne die Konfiguration zu ändern, so wäre die absolute Lage der Konfiguration bestimmt durch mehr als 6 unabhängige Koordinaten, was nicht möglich ist.

5. Als Koordinate der absoluten Lage kann jede Größe 21
benutzt werden, deren Änderung eine Änderung in der Lage

des Systems zur Folge hat, und welche nicht eine Konfigurationskoordinate ist. Sechs beliebige Größen, welche diese Eigenschaften besitzen und voneinander unabhängig sind, können als Koordinaten der absoluten Lage gewählt werden und werden zu Koordinaten der absoluten Lage dadurch, daß ihnen keine anderen Größen als Koordinaten hinzugefügt werden, als solche, welche die Eigenschaft von Konfigurationskoordinaten haben.

Endliche Verrückungen.

a) der Punkte.

22 **Definition 1.** Den Übergang eines materiellen Punktes aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und die Art des Überganges nennen wir eine Verrückung des Punktes aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Punktes ist also vollständig bestimmt durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig gegeben durch ihre Anfangslage, ihre Richtung und ihre Größe.

23 **Anmerkung 1.** Die Größe der Verrückung eines Punktes ist gleich der Entfernung seiner Endlage von seiner Anfangslage. Sind die x_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage, die x'_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Endlage, so ist die Größe s' der Verrückung die positive Wurzel der Gleichung:

$$s'^2 = \sum_1^3{}_\nu \, (x'_\nu - x_\nu)^2 \quad .$$

24 **Anmerkung 2.** Die Richtung einer Verrückung ist die Richtung einer Geraden, welche von der Anfangslage der Verrückung zu ihrer Endlage gezogen wird. Haben s', x_ν, x'_ν die Bedeutung wie vorher, und sind die x^0_ν, x''_ν, s'' die Koordinaten der Anfangs-, der Endlage und die Länge einer zweiten