Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Erstes Buch. Zur Geometrie und Kinematik der materiellen Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

ERSTES BUCH.

ZUR GEOMETRIE UND KINEMATIK DER MATERIELLEN SYSTEME.

Vorbemerkung. Den Überlegungen des ersten Buches bleibt die Erfahrung völlig fremd. Alle vorgetragenen Aussagen sind Urteile a priori im Sinne KANTS. Sie beruhen auf den Gesetzen der inneren Anschauung und den Formen der eigenen Logik des Aussagenden und haben mit der äußeren Erfahrung desselben keinen anderen Zusammenhang, als ihn diese Anschauungen und Formen etwa haben. 1

Abschnitt 1. Zeit, Raum, Masse.

Erläuterung. Die Zeit des ersten Buches ist die Zeit unserer inneren Anschauung. Sie ist daher eine Größe, von deren Änderung die Änderungen der übrigen betrachteten Größen abhängig gedacht werden können, während sie selbst stets unabhängig veränderlich ist. 2

Der Raum des ersten Buches ist der Raum unserer Vorstellung. Er ist also der Raum der EUKLIDschen Geometrie mit allen Eigenschaften, welche diese Geometrie ihm zuspricht. Es ist gleichgültig für uns, ob man diese Eigenschaften ansieht als gegeben durch die Gesetze der inneren Anschauung, oder als denknotwendige Folgen willkürlicher Definitionen.

Die Masse des ersten Buches wird eingeführt durch eine Definition.

Definition 1. Ein Massenteilchen ist ein Merkmal, durch welches wir einen bestimmten Punkt des Raumes zu einer gegebenen Zeit eindeutig zuordnen einem bestimmten Punkte des Raumes zu jeder anderen Zeit.

Jedes Massenteilchen ist unveränderlich und unzerstörbar. Die durch dasselbe Massenteilchen gekennzeichneten Punkte des Raumes zu zwei verschiedenen Zeiten fallen zusammen, wenn die Zeiten zusammenfallen. Diese Bestimmungen sind bereits in der Definition enthalten, wenn deren Wortlaut richtig gefaßt wird.

4 **Definition 2.** Die Zahl der Massenteilchen in einem beliebigen Raume, verglichen mit der Zahl der Massenteilchen, welche sich in einem festgesetzten Raume zu festgesetzter Zeit finden, heißt die in dem ersteren Raume enthaltene Masse.

Die Zahl der Massenteilchen in dem Vergleichsraume kann und soll unendlich groß gewählt werden. Die Masse des einzelnen Massenteilchens wird alsdann nach der Definition unendlich klein. Die Masse in einem beliebigen Raume kann daher jedem rationalen und irrationalen Wert annehmen.

5 **Definition 3.** Eine endliche oder unendlich kleine Masse, vorgestellt in einem unendlich kleinen Raume, heißt ein materieller Punkt.

Ein materieller Punkt besteht also aus einer beliebigen Anzahl miteinander verbundener Massenteilchen. Diese Zahl soll stets unendlich groß sein, was dadurch erreicht werden kann, daß wir uns die Massenteilchen von höherer Ordnung unendlich klein denken, als die etwa betrachteten materiellen Punkte von verschwindender Masse. Die Massen der materiellen Punkte, insbesondere auch die Massen der unendlich kleinen materiellen Punkte können darnach in jedem beliebigen rationalen oder irrationalen Verhältnis zueinander stehen.

6 **Definition 4.** Eine Anzahl gleichzeitig betrachteter materieller Punkte heißt ein System materieller Punkte, oder kurz ein System. Die Summe der Massen der einzelnen Punkte ist nach **4** die Masse des Systems.

Ein endliches System besteht also aus einer endlichen Zahl endlicher oder aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner materieller Punkte oder aus beiden. Stets ist es erlaubt, das System materieller Punkte anzusehen als zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl von Massenteilchen.

Anmerkung 1. Im folgenden werden wir das endliche System stets behandeln als bestehend aus einer endlichen Zahl endlicher materieller Punkte. Da wir aber keine obere Grenze festsetzen für die Zahl derselben und keine untere für ihre Masse, so umfassen unsere allgemeinen Aussagen als besonderen Fall auch den Fall, daß das System unendlich viele unendlich kleine materielle Punkte enthält. Auf die Besonderheiten, welche die analytische Behandlung dieses Falles nötig macht, werden wir indessen nicht eingehen.

Anmerkung 2. Der materielle Punkt kann angesehen 8
werden als ein besonderer Fall und als das einfachste Beispiel eines Systems materieller Punkte.

Abschnitt 2. Lagen und Verrückungen der Punkte und Systeme.

Lage.

Definition 1. Der Punkt des Raumes, welcher durch ein gewisses Massenteilchen zu einer gewissen Zeit gekennzeichnet ist, wird die Lage des Massenteilchens zu jener Zeit genannt. Lage eines materiellen Punktes heißt die gemeinsame Lage seiner Massenteilchen.

Definition 2. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit 10
der Lagen aller Punkte eines Systems heißt die Lage des Systems.

Definition 3. Jede beliebige Lage eines materiellen 11
Punktes im unendlichen Raume heißt eine geometrisch denk-

bare oder kurz eine denkbare Lage des Punktes. Die Gesamtheit irgendwelcher denkbaren Lagen der Punkte eines Systems heißt eine denkbare Lage des Systems.

Zu einer jeden Zeit können sich unterscheiden zwei Massenteilchen durch ihre Lage, zwei materielle Punkte durch ihre Masse und ihre Lage, zwei Systeme materieller Punkte durch Zahl, Masse und Lage ihrer Punkte. Nach anderen Richtungen als diesen aber können sich auf Grund unserer bisherigen Definitionen Massenteilchen, materielle Punkte, Systeme materieller Punkte nicht unterscheiden.

12 **Analytische Darstellung der Lage.** a) des Punktes. Die Lage eines materiellen Punkes kann analytisch dargestellt werden durch die Angabe der drei rechtwinklig-geradlinigen cartesischen Koordinaten desselben in bezug auf ein ruhendes, festes Achsensystem. Diese Koordinaten sollen dauernd mit $x_1\, x_2\, x_3$ bezeichnet werden. Jeder denkbaren Lage des Punktes entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem dieser Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der Koordinaten eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Punktes.

Anstatt durch seine rechtwinkligen Koordinaten kann die Lage eines Punktes auch bestimmt werden durch irgendwelche r Größen $p_1 \dots p_\varrho \dots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Größen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind alsdann Funktionen dieser Größen, und umgekehrt. Die Größen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Punktes. Ist $r > 3$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3$ Gleichungen bestehen, welche gestatten, die p_ϱ als Funktionen dreier unabhängiger Größen, z. B. der $x_1\, x_2\, x_3$, darzustellen. Es soll indessen eine Abhängigkeit der Koordinaten voneinander aus rein geometrischen Gründen ausgeschlossen sein, und deshalb stets vorausgesetzt werden, daß $r \lesseqgtr 3$ sei. Ist $r < 3$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Punktes durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Analytische Darstellung. b) des Systems. Die Lage 13
eines Systems von n materiellen Punkten kann analytisch dargestellt werden durch Angabe der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des Systems. Diese Koordinaten sollen dauernd bezeichnet werden mit $x_1 \dots x_\nu \dots x_{3n}$, wobei $x_1\, x_2\, x_3$ die Koordinaten des ersten Punktes, $x_{3\mu-2}\, x_{3\mu-1}\, x_{3\mu}$ die entsprechend gerichteten Koordinaten des μten Punktes bedeuten mögen. Diese $3n$ Koordinaten x_ν bezeichnen wir auch kurz als die rechtwinkligen Koordinaten des Systems. Jeder denkbaren Lage des Systems entspricht ein eindeutig bestimmtes Wertsystem seiner rechtwinkligen Koordinaten, und umgekehrt jedem willkürlich gewählten Wertsystem der x_ν eine eindeutig bestimmte denkbare Lage des Systems.

Anstatt durch die rechtwinkligen Koordinaten können wir die Lage eines Systems auch bestimmen durch irgendwelche r Größen $p_1 \dots p_\varrho \dots p_r$, sobald durch Übereinkunft bestimmte Wertsysteme dieser Größen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind, und umgekehrt. Die rechtwinkligen Koordinaten sind dadurch Funktionen dieser Größen, und umgekehrt. Die Größen p_ϱ bezeichnen wir als allgemeine Koordinaten des Systems. Ist $r > 3n$, so müssen zwischen den p_ϱ aus geometrischen Gründen $r - 3n$ Gleichungen bestehen. Wir wollen indessen ausschließen, daß zwischen den Koordinaten aus rein geometrischen Gründen eine Abhängigkeit bestehe, und es sei daher stets $r \leqq 3n$. Ist $r < 3n$, so werden nicht alle denkbaren Lagen des Systems durch Wertsysteme der p_ϱ dargestellt, sondern nur ein Teil derselben. Die durch die p_ϱ nicht dargestellten Lagen sollen bei Benutzung der Koordinaten p_ϱ dadurch selbst als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten.

Konfiguration und absolute Lage.

Definition 1. Die Gesamtheit der gegenseitigen Lagen der 14
Punkte eines Systems heißt die Konfiguration des Systems.

Die Konfiguration des Systems und die absolute Lage der Konfiguration im Raume bestimmen zusammen die Lage des Systems.

15 **Definition 2.** Konfigurationskoordinate nennen wir jede Koordinate des Systems, deren Wert nicht geändert werden kann, ohne daß dadurch die Konfiguration des Systems sich änderte.

Ob eine bestimmte Koordinate Konfigurationskoordinate ist oder nicht, hängt also nicht ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

16 **Definition 3.** Koordinate der absoluten Lage heißt jede Koordinate des Systems, durch deren Änderung die Konfiguration nicht geändert werden kann, solange die übrigen Koordinaten des Systems sich nicht ändern.

Ob eine bestimmte Koordinate Koordinate der absoluten Lage ist oder nicht, hängt also ab von der Wahl der übrigen gleichzeitig benutzten Koordinaten.

Folgerungen.

17 **1.** Eine Koordinate kann nicht zugleich Konfigurationskoordinate und Koordinate der absoluten Lage sein. Dagegen kann und wird im allgemeinen eine beliebig herausgegriffene Koordinate weder Konfigurationskoordinate noch auch Koordinate der absoluten Lage sein.

18 **2.** Sobald $n > 3$, können $3n$ voneinander unabhängige Koordinaten aller Lagen auf mannigfaltige Art so gewählt werden, daß sich unter ihnen bis zu $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten finden, aber auf keine Weise so, daß sich mehr als $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten unter ihnen finden.

Denn wählen wir unter die Koordinaten die 3 Abstände dreier beliebiger Punkte des Systems voneinander und die $3(n-3)$ Abstände der übrigen von jenen, so haben wir bereits $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten, und je $3n - 6$ verschiedene Funktionen jener Abstände werden ebenfalls $3n - 6$ Konfigurationskoordinaten des Systems sein. Weniger Konfigurationskoordinaten können vorhanden sein; denn es sind z. B. gar keine vorhanden, wenn wir die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten benutzen. Mehr Konfigurationskoordinaten aber können sich unter unabhängigen Koordinaten nicht finden;

denn wären unter beliebigen Koordinaten mehr als $3n-6$ Konfigurationskoordinaten vorhanden, so ließen sich die letzteren als Funktionen jener $3n-6$ Abstände darstellen, wären also nicht voneinander unabhängig.

3. Sobald $n > 3$, können $3n$ unabhängige Koordinaten 19
aller denkbaren Lagen eines Systems auf mannigfaltige Art so gewählt werden, daß sich unter ihnen bis zu 6, aber nicht mehr als 6 Koordinaten der absoluten Lage finden.

Denn wählen wir die Koordinaten so, daß sich unter ihnen $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, und fügen hinzu 6 beliebige Koordinaten, etwa 6 der rechtwinkligen Koordinaten des Systems, so sind die letzteren eo ipso Koordinaten der absoluten Lage, da keine Änderung derselben die Konfiguration ändert, solange die übrigen festgehalten werden. Weniger als 6 Koordinaten der absoluten Lage können vorhanden sein; denn es sind z. B. keine vorhanden, wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten des Systems benutzen. Mehr als 6 aber können nicht vorhanden sein; denn wären für eine bestimmte Wahl der Koordinaten mehr vorhanden, so wären alle denkbaren Konfigurationen bestimmt durch die übrigen weniger als $3n-6$ Koordinaten, es ließen sich also für das System überhaupt nicht $3n-6$ voneinander unabhängige Konfigurationskoordinaten angeben, was gegen Folgerung 2 wäre.

4. Sind $3n$ unabhängige Koordinaten eines Systems 20
von n Punkten so gewählt, daß sich unter ihnen $3n-6$ Konfigurationskoordinaten finden, so sind die übrigen 6 notwendig Koordinaten der absoluten Lage. Sind jene $3n$ Koordinaten so gewählt, daß sich unter ihnen 6 Koordinaten der absoluten Lage finden, so sind die übrigen $3n-6$ notwendig Konfigurationskoordinaten.

Denn fände sich unter den letzteren $3n-6$ Koordinaten auch nur eine, welche geändert werden könnte ohne die Konfiguration zu ändern, so wäre die absolute Lage der Konfiguration bestimmt durch mehr als 6 unabhängige Koordinaten, was nicht möglich ist.

5. Als Koordinate der absoluten Lage kann jede Größe 21
benutzt werden, deren Änderung eine Änderung in der Lage

des Systems zur Folge hat, und welche nicht eine Konfigurationskoordinate ist. Sechs beliebige Größen, welche diese Eigenschaften besitzen und voneinander unabhängig sind, können als Koordinaten der absoluten Lage gewählt werden und werden zu Koordinaten der absoluten Lage dadurch, daß ihnen keine anderen Größen als Koordinaten hinzugefügt werden, als solche, welche die Eigenschaft von Konfigurationskoordinaten haben.

Endliche Verrückungen.

a) der Punkte.

22 **Definition 1.** Den Übergang eines materiellen Punktes aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und die Art des Überganges nennen wir eine Verrückung des Punktes aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Punktes ist also vollständig bestimmt durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig gegeben durch ihre Anfangslage, ihre Richtung und ihre Größe.

23 **Anmerkung 1.** Die Größe der Verrückung eines Punktes ist gleich der Entfernung seiner Endlage von seiner Anfangslage. Sind die x_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage, die x'_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Endlage, so ist die Größe s' der Verrückung die positive Wurzel der Gleichung:

$$s'^2 = \sum_1^3{}_\nu \, (x'_\nu - x_\nu)^2 \quad .$$

24 **Anmerkung 2.** Die Richtung einer Verrückung ist die Richtung einer Geraden, welche von der Anfangslage der Verrückung zu ihrer Endlage gezogen wird. Haben s', x_ν, x'_ν die Bedeutung wie vorher, und sind die x^0_ν, x''_ν, s'' die Koordinaten der Anfangs-, der Endlage und die Länge einer zweiten

Verrückung, so ist der Winkel oder Richtungsunterschied s',s'' beider Verrückungen gegeben durch die Gleichung:

$$s's''\cos s',s'' = \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \, (x'_\nu - x_\nu)\,(x''_\nu - x^0_\nu) \quad . \qquad \mathbf{a)}$$

Denn die Betrachtung des Dreiecks aus den beiden Längen s' und s'' als Seiten, und dem Winkel s',s'' als eingeschlossenem Winkel liefert uns die Gleichung:

$$s'^2 + s''^2 - 2\,s's''\cos s',s'' = \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \left[\,(x'_\nu - x_\nu) - (x''_\nu - x^0_\nu)\,\right]^2 \quad , \qquad \mathbf{b)}$$

aus welcher zusammen mit 23 Gleichung **a)** folgt.

Definition 2. Zwei Verrückungen eines Punktes heißen identisch, wenn sie Anfangs- und Endlage gemein haben; zwei Verrückungen eines Punktes heißen gleich, wenn sie Richtung und Größe gemein haben; zwei Verrückungen heißen gleichgerichtet oder parallel, wenn sie die Richtung gemein haben. 25

Zwischenbemerkung. Bezeichnen $x_1 \ldots\ldots x_k$ die k geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einem Raum von k Dimensionen, $x'_1 \ldots\ldots x'_k$ die Koordinaten eines zweiten Punktes, so erweitert die an dieser Stelle eingeschaltete Fortsetzung, daß die Entfernung beider Punkte die positive Wurzel der Gleichung 26

$$s'^2 = \sum_{1}^{k}{}_{\nu} \, (x'_\nu - x_\nu)^2$$

sei, den ganzen folgenden Inhalt der Untersuchung und damit die ganze Mechanik auf den Raum von k Dimensionen, ohne daß eine Änderung auch nur des Wortlautes nötig wäre, von Nebendingen abgesehen. Doch soll von dieser Bemerkung kein Gebrauch gemacht werden, sondern es soll gemäß der ersten Fortsetzung stets nur von dem Raum der EUKLIDschen Geometrie die Rede sein.

b) der Systeme.

27 **Definition.** Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus einer Anfangslage in eine Endlage ohne Rücksicht auf die Zeit und ohne Rücksicht auf die Art des Überganges heißt eine Verrückung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage.

Die Verrückung eines Systems ist also vollständig gegeben durch ihre Anfangs- und ihre Endlage. Sie ist ebenfalls vollständig bestimmt, wenn ihre Anfangslage und diejenigen Merkmale gegeben sind, welche wir als ihre Richtung und Größe bezeichnen.

28 **Hilfsbezeichnung.** Quadratischen Mittelwert einer Reihe von Größen nennen wir die positive Quadratwurzel des arithmetischen Mittelwertes der Quadrate der einzelnen Größen.

29 **Definition a.** Größe der Verrückung eines Systems heißt der quadratische Mittelwert aus der Größe der Verrückungen seiner sämtlichen Massenteilchen.

Die Größe der Verrückung, welche eine Lage eines Systems in eine andere überführt, heißt auch die Entfernung oder der Abstand beider Lagen voneinander. Die Größe einer Verrückung wird auch als die Länge derselben bezeichnet.

30 **Bemerkung.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems voneinander ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere von der Wahl der Koordinaten des Systems.

31 **Aufgabe.** Die Entfernung zweier Lagen eines Systems durch die rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Es sei n die Zahl der materiellen Punkte des Systems. Es sei x_ν der Wert einer der rechtwinkligen Koordinaten des Systems vor der Verrückung, x'_ν der Wert derselben Koordinate nach der Verrückung. Die Koordinate x_ν ist zugleich Koordinate eines der Punkte des Systems; es sei die Masse dieses Punktes m_ν. ν läuft von 1 bis $3n$, aber nicht alle m_ν sind ungleich, sondern es ist jedes μ von 1 bis n

$$m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu} \quad .$$

Ist nun etwa η die Zahl der Massenteilchen in der Masseneinheit, so enthält die Masse m_ν $m_\nu \eta$ Massenteilchen, und die Gesamtmasse m des Systems $m\eta$ derselben. Berechnet man mit diesen Bezeichnungen den quadratischen Mittelwert s' der Verrückungen aller Massenteilchen, so folgt für denselben die positive Wurzel der Gleichung:

$$m\,s'^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu\,(x'_\nu - x_\nu)^2 \quad , \qquad \text{a)}$$

und diese Wurzel ist also die gesuchte Entfernung. Übrigens ist

$$m = \tfrac{1}{3}\sum_1^{3n}{}^{\nu}\, m_\nu \quad . \qquad \text{b)}$$

Lehrsatz. Die Entfernung zweier Lagen eines Systems voneinander ist stets kleiner als die Summe der Entfernungen beider Lagen von einer dritten. 32

Es seien nämlich die x'_ν, x''_ν, x'''_ν die rechtwinkligen Koordinaten der Lagen 1, 2, 3; es seien s_{12}, s_{13}, s_{23} die Entfernungen derselben voneinander. Wird für den Augenblick zur Abkürzung gesetzt:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x'_\nu) = a_\nu \quad , \qquad \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,(x'''_\nu - x''_\nu) = b_\nu \quad ,$$

so wird

$$s_{13}^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, a_\nu^2 \quad , \qquad s_{23}^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, b_\nu^2 \quad , \qquad s_{12}^2 = \sum_1^{3n}{}^{\nu}\, (a_\nu - b_\nu)^2 \quad .$$

Gesetzt nun, es wäre $s_{12} > s_{13} + s_{23}$, so wäre durch Quadrierung zu erhalten $s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2 > 2\,s_{13}\,s_{23}$, also durch nochmalige Quadrierung:

$$4\,s_{13}^2 s_{23}^2 - \left(s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2\right)^2 < 0 \quad .$$

Dies ist aber nicht möglich, denn die linke Seite wird durch Einsetzen der Werte für die s in die Form gebracht:

$$4\sum_1^{3n}{}^{\nu}\sum_1^{3n}{}^{\mu}\,(a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2 \quad ,$$

ist also als Summe von Quadraten notwendig positiv. Da nun also die entgegengesetzte Vermutung unmöglich war, so muß stets sein:

$$s_{12} \leqq s_{13} + s_{23} \quad .$$

33 **Folgerung.** Aus den drei Entfernungen dreier beliebiger Lagen eines Systems voneinander als Seiten ist stets ein ebenes Dreieck zu zeichnen möglich.

34 **Definition b.** Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage heißt der eingeschlossene Winkel eines ebenen Dreiecks, in welchem die Längen der beiden Verrückungen die einschließenden und die Entfernung ihrer Endpunkte die gegenüberliegende Seite bilden.

Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen wird auch der Winkel zwischen ihnen oder ihre Neigung gegeneinander genannt.

35 **Bemerkung 1.** Die Neigung zweier Verrückungen aus derselben Lage gegeneinander ist unter allen Umständen ein eindeutig bestimmter, reeller Winkel, kleiner als π.

Denn das Dreieck, welches jene Neigung bestimmt, kann nach 32 immer gezeichnet werden.

36 **Bemerkung 2.** Der Richtungsunterschied zwischen zwei Verrückungen ist unabhängig definiert von der Form der analytischen Darstellung, insbesondere also von der Wahl der benutzten Koordinaten.

37 **Aufgabe.** Den Richtungsunterschied zweier Verrückungen aus der gleichen Anfangslage auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage und der Endlagen.

Es seien die x_ν die Koordinaten der gemeinsamen Anfangslage, die x'_ν und x''_ν die Koordinaten der beiden Endlagen. s' und s'' seien die Längen der beiden Verrückungen, s',s'' der von ihnen eingeschlossene Winkel. Unter Benutzung des ebenen Dreieckes aus den drei Entfernungen der drei Lagen erhalten wir:

$$2\,m\,s's''\cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\,(x'_\nu - x_\nu)^2 + \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\,(x''_\nu - x_\nu)^2$$
$$-\sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\big[(x''_\nu - x_\nu) - (x'_\nu - x_\nu)\big]^2$$

und hieraus

$$m\,s's''\cos s',s'' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\,(x''_\nu - x_\nu)\,(x'_\nu - x_\nu) \quad , \qquad \text{a)}$$

in welcher Gleichung wir uns noch s' und s'' nach **31a** durch die rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt zu denken haben.

Lehrsatz. Zwei Verrückungen eines Systems aus gleicher Anfangslage haben den Richtungsunterschied Null, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte des Systems in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind, — und umgekehrt. 38

Denn sind die Verrückungen aller Punkte gleichgerichtet und proportional, so ist für alle ν

$$x''_\nu - x_\nu = \varepsilon\,(x'_\nu - x_\nu) \quad ,$$

unter ε einen für alle ν gleichen Faktor verstanden. Es wird daher die rechte Seite der Gleichung **37a** gleich $m\varepsilon s'^2$. Es wird aber ferner $s'' = \varepsilon s'$, also nach jener Gleichung $\cos s',s'' = 1$, also, da s',s'' der Innenwinkel eines Dreiecks, $s',s'' = 0$ (**35**).

Umgekehrt, wenn $s',s'' = 0$, $\cos s',s'' = 1$ ist, so liefert die Gleichung **37a** durch Einsetzen der Werte von s' und s'' und Quadrierung:

$$0 = \Big[\sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\,(x''_\nu - x_\nu)\,(x'_\nu - x_\nu)\Big]^2 - \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 \cdot \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2$$
$$= \sum_1^{3n}{}_\mu \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu m_\mu \big[(x''_\nu - x_\nu)\,(x'_\mu - x_\mu) - (x''_\mu - x_\mu)\,(x'_\nu - x_\nu)\big]^2 \quad ,$$

und dies ist nur möglich, wenn für jedes μ und ν

$$\frac{x''_\mu - x_\mu}{x''_\nu - x_\nu} = \frac{x'_\mu - x_\mu}{x'_\nu - x_\nu} \quad ,$$

womit auch die Umkehrung bewiesen ist.

39 **Folgerung 1.** Haben zwei Verrückungen aus derselben Anfangslage den Richtungsunterschied Null gegen eine dritte Verrückung aus der gleichen Lage, so haben sie den Richtungsunterschied Null gegeneinander.

Alle Verrückungen, welche den Winkel Null mit einer bestimmten Verrückung bilden, bilden also miteinander den Winkel Null. Das Gemeinsame aller solcher Verrückungen heißt die Richtung derselben.

40 **Folgerung 2.** Wenn zwei Verrückungen eines Systems gleiche Richtung haben, so haben sie gleichen Richtungsunterschied mit jeder dritten Verrückung.

Alle Verrückungen von gleicher Richtung aus gleicher Lage bilden also denselben Winkel mit allen Verrückungen, welche eine andere gleiche Richtung haben. Dieser gemeinsame Winkel heißt auch der Winkel der Richtungen gegeneinander oder der Unterschied der beiden Richtungen.

41 **Definition.** Zwei Verrückungen eines Systems heißen identisch, wenn die Verrückungen der Punkte des Systems in beiden identisch sind. Zwei Verrückungen eines Systems heißen gleich, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleich sind. Zwei Verrückungen eines Systems heißen gleichgerichtet oder parallel, wenn die Verrückungen der einzelnen Punkte in beiden gleichgerichtet und beziehentlich proportional sind.

42 **Folgerung.** Zwei Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage sind gleichgerichtet, wenn jede von ihnen gleiche Richtung hat mit einer Verrückung, welche durch ihre Anfangslage geht und der anderen Verrückung gleich ist, — und umgekehrt.

43 **Zusatz.** Richtungsunterschied zweier Verrückungen eines Systems aus verschiedener Anfangslage heißt der Winkel zwischen jeder von ihnen und einer zu der anderen parallelen Verrückung aus ihrer Anfangslage.

44 **Aufgabe.** Den Winkel zwischen zwei beliebigen Verrückungen eines Systems auszudrücken durch die rechtwinkligen Koordinaten ihrer vier Endlagen.

Es seien s' und s'' die Größen der beiden Verrückungen und s',s'' ihr Winkel. Es seien die x_ν und x'_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der ersten, die x^0_ν und x''_ν die Koordinaten der Anfangs- und Endlage der zweiten Verrückung. Eine Verrückung, deren Anfangskoordinaten die x_ν sind, und deren Endkoordinaten den Wert $x_\nu + x''_\nu - x^0_\nu$ haben, hat gleiche Anfangslage mit der ersten und ist der zweiten gleich. Sie bildet also mit der ersten den gesuchten Winkel, für welchen also die Gleichung folgt:

$$m\, s'\, s'' \cos s',s'' = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) \quad .$$

Der gleiche Wert wird erhalten, wenn wir eine Verrückung durch die Anfangslage der zweiten und gleich der ersten legen und den Winkel zwischen dieser und der zweiten bestimmen.

Unsere Definition im Zusatz 43 war also eindeutig und daher zulässig.

Definition. Zwei Verrückungen eines Systems heißen senkrecht aufeinander, wenn der Winkel zwischen ihnen ein rechter ist. 45

Folgerung 1. Die hinreichende und notwendige analytische Bedingung dafür, daß zwei Verrückungen senkrecht aufeinander stehen, ist die Gleichung: 46

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) = 0 \quad ,$$

in welcher Gebrauch gemacht ist von den Bezeichnungen der Aufgabe 44.

Folgerung 2. In einem System von n Punkten ist aus einer gegebenen Lage eine $(3n-1)$fache Mannigfaltigkeit von Verrückungen, also eine $(3n-2)$fache Mannigfaltigkeit von Richtungen denkbar, welche auf einer gegebenen Richtung senkrecht stehen. 47

Definition. Komponente einer Verrückung in einer gegebenen Richtung heißt eine Verrückung, deren Richtung die 48 gegebene Richtung ist, und deren Größe gleich der Vertikalprojektion der Größe der gegebenen Verrückung innerhalb des Winkels ist, welchen die gegebene Verrückung mit der gegebenen Richtung bildet.

Ist also die Größe der gegebenen Verrückung s, und bildet sie mit der gegebenen Richtung den Winkel ω, so ist ihre Komponente in dieser Richtung gleich $s \cos \omega$.

Die Größe der Komponente in gegebener Richtung wird gewöhnlich schlechthin die Komponente in dieser Richtung genannt.

Zusammensetzung der Verrückungen.

49 **Bemerkung.** Werden einem System mehrere Verrückungen erteilt, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, und welche sich so aneinander schließen, daß die Endlage der vorausgegangenen Verrückung die Anfangslage der folgenden ist, so ist die erreichte Endlage unabhängig von der Reihenfolge der Verrückungen.

Denn dies gilt für die Verrückungen, welche die einzelnen Punkte dabei erleiden, also für das System.

50 **Definition 1.** Eine Verrückung, welche das System in dieselbe Endlage überführt, wie eine Reihe aneinandergefügter Verrückungen, welche gegebenen Verrückungen gleich sind, heißt die Summe jener gegebenen Verrückungen.

51 **Definition 2.** Differenz zwischen einer erstgenannten und einer zweitgenannten Verrückung heißt eine Verrückung, deren Summe mit der zweitgenannten die erstgenannte ergibt.

52 **Folgerung** (aus 49). Die Addition und Subtraktion der Verrückungen unterliegt den Regeln der algebraischen Addition und Subtraktion.

Abschnitt 3. Unendlich kleine Verrückungen und Bahnen der Systeme materieller Punkte.

Vorbemerkung. Wir behandeln von hier ab den einzelnen materiellen Punkt nicht mehr gesondert, sondern schließen seine Betrachtung in die Betrachtung der Systeme ein. Es ist daher im folgenden stets von Verrückungen der Systeme die Rede, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird. 53

Unendlich kleine Verrückungen.

Erläuterung. Eine Verrückung heißt unendlich klein, wenn ihre Länge unendlich klein ist. 54

Lage der unendlich kleinen Verrückung heißt eine Lage, welcher die Grenzlagen der Verrückung unendlich nahe liegen.

Eine unendlich kleine Verrückung ist nach Richtung und Größe bestimmt durch die Angabe ihrer Lage und der unendlich kleinen Änderungen, welche die Koordinaten des Systems durch die Verrückung erleiden.

Aufgabe 1a. Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dx_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 55

Indem wir in Gleichung **31a** $x'_\nu - x_\nu$ ersetzen durch dx_ν, erhalten wir

$$m\, ds^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu dx_\nu^2 \quad .$$

Aufgabe 1b. Den Winkel s,s' der beiden unendlich kleinen Verrückungen ds und ds' auszudrücken durch die Änderungen dx_ν und dx'_ν der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 56

Indem wir in Gleichung **44** für $x'_\nu - x_\nu$ setzen dx_ν und für $x''_\nu - x^0_\nu$ setzen dx'_ν, erhalten wir

$$m\, ds\, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, dx_\nu\, dx'_\nu \quad .$$

Die Lösung gilt, ob beide Verrückungen gleiche Lage haben oder ob nicht.

57 **Aufgabe 2a.** Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Die rechtwinkligen Koordinaten x_ν sind Funktionen der p_ϱ und zwar der p_ϱ allein, da sie durch diese vollständig bestimmt sind, und da Verrückungen des Systems, welche nicht durch Änderungen der p_ϱ darstellbar sind, als von der Betrachtung ausgeschlossen gelten (13). Setzen wir zur Abkürzung:

a) $$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} = \alpha_{\nu\varrho} \quad ,$$

so bestehen demnach $3n$ Gleichungen von der Form:

b) $$dx_\nu = \sum_1^r{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, dp_\varrho \quad ,$$

in welchen die $\alpha_{\nu\varrho}$ Funktionen der Lage sind, also als Funktionen der p_ϱ aufgefaßt werden können. Setzen wir die Werte b) in Gleichung **55** ein und setzen noch zur Abkürzung:

c) $$m\, a_{\varrho\sigma} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma} \quad ,$$

so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

d) $$ds^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma \quad .$$

58 **Aufgabe 2b.** Den Winkel s,s' zweier unendlich kleiner Verrückungen von der Länge ds und ds' und gleicher Lage auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ und dp'_ϱ der r allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems.

Wir bilden die Werte der dx'_ν nach Gleichung **57b** und setzen diese und die Werte für dx_ν in Gleichung **56** ein. Wir beachten, daß für beide Verrückungen die Werte der Koordinaten selbst, also die der Größen $\alpha_{\varrho\sigma}$ gleich sind, und wir erhalten:

$$ds\,ds'\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma \quad .$$

Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ und $a_{\varrho\sigma}$. Einführung der $b_{\varrho\sigma}$.

1. Für alle Werte der ϱ, σ, τ ist: (vergl. **57a**) 59

$$\frac{\partial \alpha_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\varrho\tau}}{\partial p_\varrho} \quad .$$

2. Für alle Werte von ϱ und σ ist: (vergl. **57c**) 60

$$a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho} \; .$$

3. Die Zahl der Größen $\alpha_{\varrho\sigma}$ ist gleich $3nr$: die Zahl der voneinander verschiedenen Größen $a_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$. 61

4. Für alle ϱ ist 62

$$a_{\varrho\varrho} > 0 \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist

$$a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma} - a_{\varrho\sigma}^2 > 0 \quad .$$

Denn es ist die rechte Seite der Gleichung **57d** nach ihrer Ableitung aus Gleichung **55** eine notwendig positive Größe, welches auch die Werte der dp_ϱ sind. Hierfür sind die vorstehenden Ungleichheiten notwendige Bedingungen.

5. Für alle Werte der ϱ, σ, τ gilt die Gleichung: 63

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu\, \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho} \right) = m \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) \quad .$$

Um die Gleichung zu beweisen, setzt man rechts die Werte der $a_{\varrho\sigma}$ aus Gleichung **57c** ein und macht Gebrauch von den Eigenschaften der $\alpha_{\varrho\sigma}$ nach **59**.

64 **6.** Die Determinante aus den r^2 Größen $a_{\varrho\sigma}$ sei $\triangle$. Der Faktor von $a_{\varrho\sigma}$ in $\triangle$, dividiert durch $\triangle$, soll dauernd bezeichnet werden mit $b_{\varrho\sigma}$. Es ist also als Definition

$$b_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\triangle}\,\frac{\partial\triangle}{\partial a_{\varrho\sigma}} \quad .$$

Für alle Werte von ϱ und σ ist dann

$$b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho} \quad .$$

Die Zahl der voneinander verschiedenen Größen $b_{\varrho\sigma}$ ist gleich $\frac{1}{2}r(r+1)$.

65 **7.** Der Wert des Ausdrucks

$$\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa}$$

ist gleich Eins, sobald $\iota = \varkappa$ ist; jener Wert ist gleich Null, sobald ι und $\varkappa$ verschieden sind.

Denn ist $\iota = \varkappa$, so stellt der Ausdruck $\sum_1^r{}_\varrho\, a_{\varrho\iota}\, b_{\varrho\varkappa}\triangle$ die Determinante $\triangle$ selbst dar. Ist aber ι von $\varkappa$ verschieden, so stellt er eine Determinante dar, welche aus $\triangle$ entsteht, indem die Reihe $a_{\varrho\varkappa}$ ersetzt wird durch die Reihe der $a_{\varrho\iota}$. In dieser Determinante sind also zwei Reihen gleich, und ihr Wert ist Null.

66 **8.** Es gelten für alle Werte der ι und $\varkappa$ die beiden Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} = a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} = b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man bilde nach **65** den Wert des Ausdrucks $\sum_1^r{}_\varrho\, b_{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\iota}$

bez. $\sum_1^r {}_\varrho\, a_{\varrho\sigma} b_{\varrho\iota}$ für alle Werte des σ von 1 bis r, man multipliziere die entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit $a_{\sigma\varkappa}$ bez. $b_{\sigma\varkappa}$ und addiere, so folgen die Gleichungen.

9. Bestimmte Änderungen der Größen $a_{\varrho\sigma}$ haben bestimmte Änderungen der Größen $b_{\varrho\sigma}$ zur Folge. Bezeichnen $\delta a_{\varrho\sigma}$ und $\delta b_{\varrho\sigma}$ beliebige zusammengehörige Variationen der $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$, so gelten die Gleichungen: 67

$$\sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa}\, \delta b_{\varrho\sigma} = -\delta a_{\iota\varkappa} \quad ;$$

$$\sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa}\, \delta a_{\varrho\sigma} = -\delta b_{\iota\varkappa} \quad .$$

Man variiere die Gleichungen 66 und mache Gebrauch von den Beziehungen 65, so folgen die Gleichungen.

10. Variiert man in den $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ nur eine bestimmte Koordinate p_τ, von welcher sie abhängen, so folgt insbesondere für jeden Wert des τ: 68

$$\sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\iota}\, a_{\sigma\varkappa} \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad ;$$

$$\sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\iota}\, b_{\sigma\varkappa} \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau} \quad .$$

Verrückungen in Richtung der Koordinaten.

Definition 1. Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt eine unendlich kleine Verrückung, bei welcher sich nur diese eine Koordinate, nicht aber die übrigen gleichzeitig benutzten ändern. 69

Die Richtung aller Verrückungen in Richtung derselben Koordinate aus derselben Lage ist dieselbe; sie heißt die Richtung der Koordinate in dieser Lage.

70 **Bemerkung.** Die Richtung einer Koordinate hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten des Systems.

71 **Definition 2.** Reduzierte Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in Richtung einer bestimmten Koordinate heißt die Komponente der Verrückung in Richtung der Koordinate (48, 69), dividiert durch die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung.

Die reduzierte Komponente in der Richtung einer Koordinate nennen wir auch kurz die Komponente nach der Koordinate.

Man spricht also von der Komponente einer beliebigen Verrückung in einer beliebigen Richtung, aber man kann nicht sprechen von der reduzierten Komponente in einer beliebigen Richtung, sondern nur von der reduzierten Komponente einer unendlich kleinen Verrückung in der Richtung einer Koordinate.

72 **Aufgabe 1a.** Die Neigung s, x_ν der Verrückung ds gegen die rechtwinklige Koordinate x_ν durch die $3n$ Änderungen dx_ν auszudrücken.

In Gleichung **56** setzen wir die dx'_ν gleich Null für alle ν mit Ausnahme des bestimmten ν, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Dann ist die Richtung von ds' nach **69** die von x_ν, und der Winkel s, s' wird der gesuchte Winkel. Da ferner alsdann nach **55** $m\,ds'^2 = m_\nu\,dx'^2_\nu$, so wird als Lösung der Aufgabe erhalten:

$$ds \cos s, x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dx_ν einzusetzen ist.

73 **Aufgabe 1b.** Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung ds nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν durch die Änderungen dx_ν der Koordinaten auszudrücken.

Setzen wir in der vorigen Aufgabe $s, x_\nu = 0$, so erfolgt die Verrückung ds in Richtung der Koordinate x_ν, und wir erkennen, daß die Änderungsgeschwindigkeit der Koordinate bei einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung gleich $dx_\nu : ds$ also gleich $\sqrt{m/m_\nu}$ ist. Die linke Seite der Gleichung **72** stellt schon die Komponente von ds in Richtung von x_ν dar; dividieren wir also die Gleichung durch $\sqrt{m/m_\nu}$, so erhalten wir (71) als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m} dx_\nu \quad .$$

Aufgabe 1c. Die Änderungen dx_ν der rechtwinkligen Koordinaten bei einer Verrückung auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der Verrückung nach jenen Koordinaten. 74

Die Lösung der vorigen Aufgabe gibt unmittelbar:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu} d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 2a. Die Neigung s,p_ϱ der Verrückung ds gegen die allgemeine Koordinate p_ϱ durch die r Änderungen dp_ϱ auszudrücken. 75

In Gleichung **58** setzen wir die dp'_ϱ gleich Null für alle ϱ mit Ausnahme des bestimmten ϱ, auf welches sich die Aufgabe bezieht. Die Richtung von ds' ist alsdann nach **69** die von p_ϱ, und der Winkel s,s' wird der gesuchte Winkel. Da gleichzeitig nach **57** $ds'^2 = a_{\varrho\varrho} dp'^2_\varrho$ wird, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma} dp_\sigma \quad ,$$

worin für ds sein Wert in den dp_σ einzusetzen ist.

Anmerkung 1. Setzen wir in der Lösung der vorigen Aufgabe alle dp_σ gleich Null mit Ausnahme eines bestimmten dp_σ, so wird die Richtung von ds die Richtung dieser Koordinate p_σ, und der Winkel s,p_σ geht über in den Winkel p_σ,p_ϱ, welchen die Koordinate p_σ mit der Koordinate p_ϱ bildet. Da gleichzeitig alsdann $ds^2 = a_{\sigma\sigma} dp_\sigma{}^2$ wird, so erhalten wir für diesen Winkel: 76

$$\cos p_\sigma,p_\varrho = \frac{a_{\varrho\sigma}}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}}} \quad .$$

Dieser Winkel ist nach **62** stets ein reeller Winkel.

77 **Anmerkung 2.** Die Koordinaten p_ϱ heißen orthogonal, wenn jede von ihnen in jeder Lage auf allen übrigen senkrecht steht. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist (76), daß alle $a_{\varrho\sigma}$, für welche ϱ und σ verschieden sind, verschwinden. Die rechtwinkligen Koordinaten sind ein Beispiel orthogonaler Koordinaten.

78 **Aufgabe 2b.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungen dp_ϱ dieser Koordinaten bei der Verrückung.

Setzen wir in Gleichung 75 s,p_ϱ gleich Null, so erfolgt die Verrückung ds dieser Gleichung in Richtung von p_ϱ; alle dp_σ sind also Null, außer dp_ϱ, und die Gleichung wird also $\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds = a_{\varrho\varrho}\,dp_\varrho$. Die Änderungsgeschwindigkeit von p_ϱ mit einer Verrückung in ihrer eigenen Richtung ist also $1/\sqrt{a_{\varrho\varrho}}$. Bedenken wir, daß nach 48 $ds \cos s,p_\varrho$ die Komponente von ds in der Richtung von p_ϱ ist, und beachten die Definition 71, so erkennen wir, daß die linke Seite der Gleichung 75 bereits die reduzierte Komponente nach p_ϱ darstellt, und wir erhalten also die Beziehung:

a) $$d\bar{p}_\varrho = \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds \cos s,p_\varrho \quad ,$$

also als Lösung der Aufgabe:

b) $$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,dp_\sigma \quad .$$

79 **Aufgabe 2c.** Die Änderungen dp_ϱ der Koordinaten bei Ausführung der Verrückung ds auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den Koordinaten p_ϱ.

Die Auflösung der Gleichungen 78b unter Benutzung der Bezeichnung von 64 ergibt unmittelbar:

$$dp_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\,d\bar{p}_\sigma \quad .$$

80 **Aufgabe 3a.** Die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die

Komponenten $d\bar{x}_\nu$ der Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **78**, **57b**, **57c**, **74**:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho = \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^{3n}{}^\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho}\, \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^{3n}{}^\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho}\, dx_\nu = \sum_1^{3n}{}^\nu \alpha_{\nu\varrho}\, d\bar{x}_\nu \quad .$$

Aufgabe 3b. Die Komponenten $d\bar{x}_\nu$ einer Verrückung nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν auszudrücken durch die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ der Verrückung nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems. 81

Wir erhalten der Reihe nach unter Benutzung von **73**, **57b**, **79**:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m} dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma}\, dp_\sigma$$

$$= \frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma} \sum_1^r{}^\varrho b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho \quad ,$$

also, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_1^r{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma}\, b_{\varrho\sigma} = \beta_{\nu\varrho} \quad , \qquad \text{a)}$$

folgt als Lösung der Aufgabe:

$$d\bar{x}_\nu = \sum_1^r{}^\varrho \beta_{\nu\varrho}\, d\bar{p}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Aufgabe 4. Die Länge einer unendlich kleinen Verrückung auszudrücken durch ihre reduzierten Komponenten nach den Koordinaten des Systems. 82

Wenden wir die allgemeinen Koordinaten p_ϱ an, so erhalten wir durch successive Anwendung von **78b** und **79** auf Gleichung **57b** nacheinander:

$$ds^2 = \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, a_{\varrho\sigma} \, dp_\varrho \, dp_\sigma$$

$$= \sum_1^r {}_\varrho \, dp_\varrho \, d\bar{p}_\varrho$$

$$= \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \, d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

83 Wenden wir insbesondere die rechtwinkligen Koordinaten an, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$ds^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \, dx_\nu^2$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \, dx_\nu \, d\bar{x}_\nu$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m}{m_\nu} \, d\bar{x}_\nu^2 \quad .$$

84 **Aufgabe 5a.** Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen Verrückungen beliebiger Lage auszudrücken durch die reduzierten Komponenten der beiden Verrückungen nach den rechtwinkligen Koordinaten.

Durch successive Anwendung von **73** und **74** auf Gleichung **56** erhalten wir nacheinander die Formen:

$$ds \, ds' \cos s,s' = \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \, dx_\nu \, dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \, dx_\nu \, d\bar{x}'_\nu = \sum_1^{3n} {}_\nu \, d\bar{x}_\nu \, dx'_\nu$$

$$= \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m}{m_\nu} \, d\bar{x}_\nu \, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Hierin haben wir für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{x}_\nu$ nach **83** einzusetzen.

Aufgabe 5b. Den Winkel zwischen zwei unendlich kleinen 85
Verrückungen aus der gleichen Lage auszudrücken durch die Komponenten der beiden Verrückungen nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ.

Durch successive Anwendung von **78** und **79** auf Gleichung **58** erhalten wir nacheinander die Formen:

$$ds\,ds'\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp'_\sigma$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\, dp_\varrho\, d\bar{p}'_\varrho = \sum_1^r{}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, d\bar{p}_\varrho\, d\bar{p}'_\sigma \quad .$$

Hierin sind wieder für die ds und ds' ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ nach **82** einzusetzen.

Aufgabe 6. Den Winkel zweier unendlich kleiner Ver- 86
rückungen auszudrücken durch die Winkel, welche beide mit den Koordinaten des Systems bilden.

Wir dividieren die letzte der Gleichungen **85** durch $ds\,ds'$ und beachten, daß nach **78a**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \frac{d\bar{p}_\varrho}{ds} \quad , \qquad \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s',p_\varrho = \frac{d\bar{p}'_\varrho}{ds} \quad ;$$

wir erhalten so als Lösung der Aufgabe:

$$\cos s,s' = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}}\cos s,p_\varrho \cos s',p_\sigma \quad .$$

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, so erhält die 87
vorstehende Gleichung die besondere Form:

$$\cos s,s' = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s,x_\nu \cos s',x_\nu \quad .$$

Es ist zu bemerken, daß die Gleichung **86** gleiche Lage der beiden Verrückungen voraussetzt, während die Gleichung **87** von dieser Voraussetzung frei ist.

88 **Lehrsatz.** Die r Winkel, welche eine beliebige Richtung in einer bestimmten Lage mit den Richtungen der r allgemeinen Koordinaten daselbst bildet, sind verbunden durch die Gleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \sqrt{a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}} \cos s{,}p_\varrho \cos s{,}p_\sigma = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir in 86 die Richtungen von ds und ds' zusammenfallen lassen.

89 **Folgerung.** Insbesondere genügen die $3n$ Winkel, welche eine beliebige Verrückung des Systems mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bilden, der Gleichung:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \cos^2 s{,}x_\nu = 1 \quad .$$

Benutzung partieller Differentialquotienten.

90 **Bezeichnung.** Durch die Werte der Koordinaten p_ϱ ihrer Lage und der Änderungen dp_ϱ derselben ist die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung bestimmt. Ändern wir eins jener Bestimmungsstücke, während die übrigen konstant gehalten werden, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_p ds$ bezeichnet werden.

Betrachten wir dagegen, was ebenfalls zulässig ist, die Koordinaten p_ϱ und die Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ nach ihnen als die unabhängigen Bestimmungsstücke von ds, so soll das entsprechende partielle Differential von ds mit $\partial_q ds$ bezeichnet werden.

Andere partielle Differentiale von ds sind selbstverständlich möglich, aber es ist für unseren Zweck nicht nötig, sie zu bezeichnen, sondern es bleibt für sie das gewöhnliche, jedesmal durch eine Worterklärung näher zu bestimmende Zeichen ∂ds vorbehalten.

91 **Bemerkung 1.** Die Komponenten einer Verrückung nach den Koordinaten lassen sich als partielle Differentialquotienten

der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\varrho} = ds\,\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho}\ .$$

Man differentiiere die Gleichung **57d** und beachte **78**.

Bemerkung 2. Die Neigung einer unendlich kleinen Verrückung gegen die Koordinate p_ϱ kann mit Hilfe der partiellen Differentialquotienten ihrer Länge dargestellt werden. Und zwar geschieht dies in der Form: **92**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s{,}p_\varrho = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\varrho}\ .$$

Man beachte **91** und **78**.

Anmerkung. Werden insbesondere in den Bemerkungen 1 und 2 rechtwinklige Koordinaten angewandt, so erhält man **93**

$$d\bar{x}_\nu = ds\,\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\ , \qquad \text{a)}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\cos s{,}x_\nu = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\ , \qquad \text{b)}$$

wobei die Bedeutung der partiellen Differentiale aus dem vorigen hervorgeht.

Bemerkung 3. Die Änderungen, welche die Koordinaten p_ϱ bei Durchlaufung einer unendlich kleinen Verrückung erleiden, lassen sich als partielle Differentialquotienten der Länge der Verrückung darstellen. Und zwar geschieht dies in der Form: **94**

$$d\bar{p}_\varrho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\varrho} = ds\,\frac{\partial_q ds}{\partial d\bar{p}_\varrho}\ .$$

Man beachte die Gleichungen **82** und **79**.

95 **Bemerkung 4.** Für alle Werte des Index τ besteht zwischen den partiellen Differentialquotienten von ds die Gleichung:

a) $$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \quad .$$

Denn es ist:

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} d\bar{p}_\varrho \, d\bar{p}_\sigma \quad .$$

Setzen wir in der ersteren Form für die dp_ϱ und dp_σ ihre Werte in den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{p}_\sigma$ nach **79** und beachten die Beziehungen **68** und die zweite Form, so folgt die Behauptung. Ebenso wenn wir in gleicher Weise von der zweiten Form ausgehen.

96 **Lehrsatz.** Erleidet die Lage einer unendlich kleinen Verrückung zweimal dieselbe Veränderung, während gleichzeitig das eine Mal die Komponenten nach den Koordinaten, das andere Mal die Änderungen der Koordinaten die ursprünglichen bleiben, so ist die Änderung der Länge der Verrückung in beiden Fällen entgegengesetzt gleich.

Da im zweiten Falle die $\delta dp_\varrho = 0$ sein sollen, während die Koordinaten p_ϱ die Änderungen δp_ϱ erleiden, so ist die Änderung der Länge der Verrückung:

a) $$\delta_p ds = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Im ersten Falle sollen die $\delta d\bar{p}_\varrho = 0$ sein, während die Koordinaten dieselben Änderungen δp_ϱ erleiden, es ist also jetzt:

b) $$\delta_q ds = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad .$$

Aus beiden Gleichungen a) und b) und der Bemerkung 4 folgt:

$$\delta_p ds = - \delta_q ds \quad , \qquad \text{c)}$$

welches die Behauptung ist.

Bahnen der Systeme.

Erläuterungen.

1. Die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Lagen, welche ein System beim Übergang aus einer Lage in die andere durchläuft, heißt eine Bahn des Systems. 97

Eine Bahn kann auch betrachtet werden als die gleichzeitig vorgestellte Gesamtheit der Verrückungen, welche das System beim Übergang aus der einen in die andere Lage erleidet.

2. Ein Teil der Bahn, welcher durch zwei unendlich nahe Lagen begrenzt wird, heißt ein Bahnelement. Ein Bahnelement ist eine unendlich kleine Verrückung; es hat eine Länge und eine Richtung. 98

3. Richtung der Bahn eines Systems in einer bestimmten ihrer Lagen heißt die Richtung eines dieser Lage unendlich benachbarten Bahnelements. 99

Länge der Bahn eines Systems zwischen zwei ihrer Lagen heißt die Summe der Längen der Bahnelemente zwischen diesen Lagen.

Analytische Darstellung. Die Bahn eines Systems wird analytisch dargestellt, indem die Koordinaten ihrer Lagen angegeben werden als Funktionen einer und derselben, übrigens beliebigen Variabeln. Jeder Lage der Bahn ist dann ein Wert der Variabeln zugeordnet. Als unabhängige Variabele kann eine der Koordinaten selbst dienen. Sehr häufig ist es zweckmäßig, als unabhängige Variabele die Länge der Bahn, von einer bestimmten Lage der Bahn ab gerechnet, zu benutzen. Die Differentialquotienten nach dieser bestimmten Variabeln, 100 also nach der Bahnlänge, sollen in LAGRANGES Weise durch Akzente bezeichnet werden.

101 **Definition 1.** Die Bahn eines Systems heißt gerade, wenn sie in allen ihren Lagen die gleiche Richtung hat.

102 **Folgerung.** Beschreibt ein System eine gerade Bahn, so beschreiben seine einzelnen Punkte gerade Linien, deren Längen, von der Ausgangslage an gerechnet, einander beständig proportional bleiben (38).

103 **Definition 2.** Die Bahn eines Systems heißt krumm, wenn sich die Richtung der Bahn von Lage zu Lage ändert. Die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Bahnlänge heißt die Krümmung der Bahn.

Die Krümmung der Bahn ist also der Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Richtungsunterschied und der Entfernung zweier benachbarter Bahnelemente.

104 **Anmerkung.** Der Wert der Krümmung ist hierdurch definiert unabhängig von der Form der analytischen Darstellung, also insbesondere unabhängig von der besonderen Wahl der Koordinaten des Systems.

105 **Aufgabe 1.** Die Krümmung c der Bahn auszudrücken durch die Änderungen der Winkel, welche die Bahn mit den rechtwinkligen Koordinaten des Systems bildet.

Es sei $d\varepsilon$ der Winkel zwischen der Richtung der Bahn am Anfang und am Ende des Bahnelementes ds. Dann ist nach Definition (103):

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad .$$

Es seien ferner die $\cos s{,}x_\nu$ die Cosinus der Winkel, welche die Bahn am Anfange von ds mit den x_ν bildet, und es seien $\cos s{,}x_\nu + d\cos s{,}x_\nu$ die Werte der gleichen Größen am Ende von ds. Dann ist nach Gleichung 87:

$$\cos(d\varepsilon) = \sum_1^{3n}{}_\nu \cos s{,}x_\nu \left(\cos s{,}x_\nu + d\cos s{,}x_\nu\right) \quad .$$

Es ist aber ferner nach Gleichung **89** sowohl

$$\sum_1^{3n} {}^\nu \cos^2 s,x_\nu = 1 \quad ,$$

als auch

$$\sum_1^{3n} {}^\nu (\cos s,x_\nu + d \cos s,x_\nu)^2 = 1 \quad .$$

Indem wir das Doppelte der ersten Gleichung subtrahieren von der Summe der beiden letzteren, erhalten wir:

$$2 - 2\cos(d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu (d \cos s,x_\nu)^2 \quad ,$$

also durch Division mit ds^2 die Lösung der Aufgabe:

$$c^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu \left(\frac{d \cos s,x_\nu}{ds}\right)^2 \quad .$$

Aufgabe 2. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten des Systems mit der Bahnlänge. **106**

Unter Berücksichtigung von **72** haben wir (**100**):

$$\cos s,x_\nu = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x'_\nu \quad ,$$

also

$$(\cos s,x_\nu)' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x''_\nu \quad ,$$

also nach **105** als Lösung der Aufgabe:

$$mc^2 = \sum_1^{3n} {}^\nu m_\nu x''^2_\nu \quad .$$

Aufgabe 3. Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, dieselben betrachtet als Funktionen einer beliebigen Variabelen τ. **107**

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$x_\nu'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \left\{\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2}\right\} \quad .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in c^2 ein und beachten, daß (**55**)

$$\text{a)} \qquad m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2 \quad ,$$

also

$$\text{b)} \qquad m\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau}\cdot\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}$$

ist, so folgt als Lösung der Aufgabe:

$$\text{c)} \qquad m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2 \quad ,$$

worin für $ds/d\tau$ und $d^2s/d\tau^2$ noch ihre Werte aus den vorigen Gleichungen zu setzen sind.

108 **Aufgabe 4.** Die Krümmung der Bahn darzustellen durch die Änderungen der allgemeinen Koordinaten p_ϱ des Systems mit der Bahnlänge.

Wir führen in den Ausdruck **106** an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten die p_ϱ ein, indem wir die x_ν'' ausdrücken durch die p_ϱ' und p_ϱ''. Zunächst ist nach **57 b**

$$x_\nu' = \sum_1^r{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, p_\varrho' \quad ,$$

also

$$x_\nu'' = \sum_1^r{}_\varrho\, (\alpha_{\nu\varrho}\, p_\varrho'' + \alpha_{\nu\varrho}'\, p_\varrho') \quad ,$$

also

$$x_\nu''^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \left(\alpha_{\nu\varrho}\,\alpha_{\nu\sigma}\, p_\varrho''\, p_\sigma'' + 2\,\alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}\, p_\varrho'\, p_\sigma'' + \alpha_{\nu\varrho}'\,\alpha_{\nu\sigma}'\, p_\varrho'\, p_\sigma'\right) \quad .$$

Man bilde diese Gleichungen für alle ν, multipliziere eine jede mit m_ν/m und addiere alle. Links entsteht c^2. Rechts kann die Summation nach ν mit Hilfe der schon eingeführten Größen $a_{\varrho\sigma}$ in den ersten beiden Gliedern ausgeführt werden. Im ersten Glied ergibt die Summation unmittelbar nach **57c** $a_{\varrho\sigma}$. Als Faktor von p''_σ im zweiten Gliede wird nacheinander erhalten: **(108)**

$$2\sum_1^r{}_\varrho\, p'_\varrho \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\alpha'_{\nu\varrho} = 2\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\varrho}\right)$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau\left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \qquad \text{(nach 63)}$$

$$= \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\tau\, p'_\varrho p'_\tau\left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma}\right) \quad .$$

Beim Übergang von der zweiten in die dritte Form und von der vierten in die fünfte Form ist Gebrauch gemacht von der Bemerkung, daß, wenn $F(\varrho,\sigma)$ ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Indices ϱ und σ enthält, alsdann identisch

$$\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma F(\varrho,\sigma) = \sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma F(\sigma,\varrho) \qquad \textbf{a)}$$

ist.

Der Faktor des dritten Gliedes läßt sich nicht durch die $a_{\varrho\sigma}$ ausdrücken. Um im Endresultat die Beziehung auf die rechtwinkligen Koordinaten gleichwohl verschwinden zu lassen, sei gesetzt:

$$a_{\varrho\sigma\lambda\mu} = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\mu} \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Es wird dann schließlich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{e)}\qquad c^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \left\{ a_{\varrho\sigma} p''_\varrho p''_\sigma + \sum_1^r{}_\tau \left(2\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) p'_\varrho p'_\tau p''_\sigma \right.$$
$$\left. + \sum_1^r{}_\lambda \sum_1^r{}_\mu a_{\varrho\sigma\lambda\mu} p'_\varrho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu \right\} .$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in **57** eingeführten Funktionen der p_ϱ; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Größen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4} r^2 (r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 **1.** Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 **2.** Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschließen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.

3. Die zur Betrachtung zugelassenen Verrückungen heißen mögliche Verrückungen, die übrigen unmögliche. Die möglichen Verrückungen werden auch virtuelle genannt. Mögliche Verrückungen heißen sie stets, wenn sie als engerer Begriff den denkbaren gegenübergestellt werden; virtuelle Verrückungen werden sie nur dann genannt, wenn sie als weiterer Begriff einem engeren, z. B. den wirklichen Verrückungen entgegengestellt werden. 111

4. Mögliche Bahnen heißen alle Bahnen, welche sich aus möglichen Verrückungen zusammensetzen. Mögliche Lagen sind alle Lagen, welche durch mögliche Bahnen erreicht werden können. 112

5. Es sind also alle Lagen möglicher Bahnen mögliche Lagen. Aber es geht aus dem Gesagten nicht hervor, und es soll auch nicht gesagt sein, daß jede denkbare Bahn durch mögliche Lagen auch eine mögliche Bahn sei. Vielmehr kann eine Verrückung auch zwischen unendlich benachbarten möglichen Lagen als eine unmögliche Verrückung bezeichnet sein. 113

6. Zwischen zwei möglichen Lagen gibt es immer eine mögliche Bahn. Denn führt von irgend einer wirklichen Lage zu beiden Lagen auch nur e i n e mögliche Bahn, so bilden diese beiden Bahnen zusammen schon eine mögliche Bahn zwischen den beiden Lagen; führte zu einer von beiden keine mögliche Bahn, so wäre diese Lage auch keine mögliche Lage. 114

Definition 1. Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein stetiger, wenn er den folgenden drei Voraussetzungen nicht widerspricht: 115

1. Daß die Angabe aller möglichen endlichen Verrückungen enthalten sei in der Angabe aller möglichen unendlich kleinen Verrückungen, (Stetigkeit im Endlichen);

2. daß jede mögliche unendlich kleine Verrückung in gerader, stetiger Bahn durchlaufen werden könne, (Stetigkeit im Unendlichkleinen);

3. daß jede unendlich kleine Verrückung, welche aus einer bestimmten Lage möglich ist, auch möglich ist aus jeder unendlich benachbarten Lage, abgesehen von Abweichungen

von der Ordnung der Entfernung der Lagen oder von höherer Ordnung, (stetige Veränderlichkeit der möglichen Verrückungen).

116 **Folgerung.** Wenn in einem System nur stetige Zusammenhänge sich finden, so ist die Summe irgendwelcher möglichen unendlich kleinen Verrückungen aus derselben Lage wieder eine mögliche Verrückung aus der gleichen Lage. (Superposition unendlich kleiner Verrückungen.)

Denn nach **115**, 3 müssen sich die einzelnen Verrückungen hintereinander durchlaufen lassen, und nach **115**, 2 ist dann die direkte Verrückung aus der Anfangs- in die Endlage selbst auch eine mögliche Verrückung.

117 **Definition 2.** Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein innerer, wenn er nur die gegenseitige Lage der Punkte des Systems betrifft.

118 **Folgerung.** Wenn in einem System nur innere Zusammenhänge sich finden, so ist jede Verrückung des Systems, welche die Konfiguration nicht ändert, eine mögliche Verrückung, und umgekehrt.

119 **Definition 3.** Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein gesetzmäßiger, wenn er unabhängig von der Zeit besteht.

Ein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht also in der Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems zu jeder Zeit, oder unabhängig von der Zeit, gewisse Verrückungen möglich, andere unmöglich sind.

120 **Anmerkung.** Solange wir von der Geometrie der Systeme handeln, kommt der Unterschied zwischen gesetzmäßigem und ungesetzmäßigem Zusammenhange nicht in Betracht, da unsere Überlegungen die Zeit nicht enthalten. Sind die Zusammenhänge eines Systems zu zwei Zeiten verschieden, so haben wir es für unsere jetzige Betrachtung zu beiden Zeiten mit zwei verschiedenen Systemen zu tun. Es läuft praktisch auf dasselbe hinaus, wenn wir voraussetzen, daß in diesem ersten Buche die Zusammenhänge sämtlich gesetzmäßige seien.

121 **Definition 1.** Ein System materieller Punkte, welches keinen anderen als stetigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein materielles System.

Definition 2. Ein materielles System, welches keinen 122
anderen als inneren und gesetzmäßigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein freies System.

Definition 3. Ein materielles System, zwischen dessen 123
möglichen Lagen alle denkbaren stetigen Übergänge zugleich auch mögliche Übergänge sind, heißt ein holonomes System.

Der Name soll andeuten, daß ein solches System integralen (*ὅλος*) Gesetzen (*νόμος*) gehorcht, während die materiellen Systeme im allgemeinen nur Differentialgesetzen unterworfen sind. (Vergleiche **132** ff.)

Analytische Darstellung.

Bemerkung. Ein System materieller Punkte genügt den 124
Bedingungen eines materiellen Systems, wenn die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Bedingungen unterworfen sind als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind.

Denn die erste Art der Stetigkeit, welche die Definition (**115**) verlangt, muß vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Differentialen der Koordinaten des Systems gesprochen wird; den beiden andern Arten wird durch die Einschränkung der zugelassenen Differentiale genügt.

Umkehrung. Genügt ein System materieller Punkte den 125
Bedingungen eines materiellen Systems, so sind die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Einschränkungen unterworfen, als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen unter sich, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind.

Zum Beweise fassen wir eine mögliche Lage des Systems ins Auge und die möglichen Verrückungen aus ihr. Für eine beliebig herausgegriffene dieser Verrückungen mögen sich die $3n$ Änderungen dx_ν verhalten wie:

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots\ldots : \varepsilon_{13n} \quad .$$

(125) Verstehen wir nun unter du_1 eine ganz beliebige unendlich kleine Größe, so ist durch den Satz von Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1$$

ein Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun in demselben alle möglichen Verrückungen überhaupt enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Trifft letzteres zu, so wählen wir eine beliebige zweite Verrückung aus, welche nicht durch jene Form dargestellt werden kann, und es mögen für diese die $3n$ Änderungen dx_ν sich verhalten wie:

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots\ldots : \varepsilon_{23n} \quad .$$

Verstehen wir nun unter du_2 eine zweite beliebige unendlich kleine Größe, so ist durch das System der Gleichungen:

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu}\, du_1 + \varepsilon_{2\nu}\, du_2$$

nach Voraussetzung (116) ein allgemeinerer Satz möglicher Verrückungen gegeben. Entweder sind nun wenigstens in diesem alle möglichen Verrückungen enthalten, oder dies ist nicht der Fall. Wenn letzteres eintritt, so verfahren wir wie vorher, indem wir eine neue Größe du_3 einführen, und wir wiederholen das Verfahren so lange, bis es wegen Erschöpfung aller möglichen Verrückungen sich nicht wiederholen läßt. Seine Fortsetzung wird spätestens unmöglich, wenn wir $3n$ Größen du_λ eingeführt haben; denn alsdann stellt die Form:

$$dx_\nu = \sum_1^{3n}{}_\lambda\, \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda$$

alle möglichen Verrückungen des Systems auch dann dar, wenn alle denkbaren Verrückungen möglich sind, wenn also gar keine Zusammenhänge zwischen den Punkten des Systems bestehen. Im allgemeinen muß also das Verfahren notwendig früher zu Ende kommen, und es lassen sich daher alle möglichen Verrückungen des Systems darstellen durch Bedingungsgleichungen der Form:

$$dx_\nu = \sum_1^l {}_\lambda \varepsilon_{\lambda\nu}\, du_\lambda \quad , \qquad \text{a)}$$

in welcher unter allen Umständen

$$l \gtreqless 3n$$

ist. Damit aber dieser Form durch willkürlich gewählte du_λ genügt werden könne, ist hinreichende Bedingung, daß die dx_ν den $3n - l$ homogenen linearen Gleichungen genügen, welche durch Elimination der du_λ aus den Gleichungen **a)** sich ableiten lassen. Die Größen $\varepsilon_{\lambda\nu}$ müssen nach **115**, 3 stetige Funktionen der Lage sein. Weiteren Einschränkungen als diesen brauchen aber nach **124** die dx_ν nicht unterworfen zu werden.

Anmerkung. Die Zahl und der Inhalt der Gleichungen, welche wir zwischen den dx_ν nach dem angegebenen Verfahren ableiten, ist unabhängig von der besonderen Wahl der benutzten Verrückungen. **126**

Denn benutzen wir andere Verrückungen wie vorher und drücken daher die dx_ν durch andere Größen dv_λ aus, so können wir die Werte der dx_ν in diesen in die vorher erhaltenen Eliminationsgleichungen einsetzen. Würden dieselben nicht identisch befriedigt, so wären die dv_λ nicht unabhängig voneinander, was gegen die Voraussetzung ginge, unter welcher sie bestimmt wurden. Jene Gleichungen werden also identisch befriedigt, und sie können daher nicht verschieden sein von den Gleichungen oder von linearen Kombinationen der Gleichungen, welche durch Elimination der dv_λ aus den Formen erhalten werden, in welchen sie die dx_ν darstellen. Größer als die Zahl der mit Hilfe der dv_λ zu erhaltenden Gleichungen kann demnach die Zahl der mit Hilfe der du_λ erhaltenen nicht sein; sie kann aber auch nicht kleiner sein, sonst würde das umgekehrte Verfahren erlauben, zu erweisen, daß die du_λ nicht unabhängig voneinander wären.

Folgerung 1. Der Zusammenhang eines materiellen Systems kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage des Systems und eines **127**

Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Denn Beziehungen zwischen diesen Differentialen können nach **125** nicht anders als durch einen solchen Satz von Gleichungen gegeben werden. Dies hindert allerdings nicht, daß zwischen den Koordinaten auch endliche Gleichungen bestehen. Aber alle diese endlichen Gleichungen ließen sich vollständig ersetzen durch eine einzige mögliche Lage und ebenso viele homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen. Diese letzteren aber können den unmittelbar gegebenen Differentialgleichungen nicht widersprechen; sie gehen also entweder aus denselben hervor oder sind ihnen zur Erzielung einer vollständigen Beschreibung hinzuzufügen.

128 **Bezeichnung.** Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \, x_{\iota\nu} \, dx_\nu = 0 \quad .$$

Dabei wird angenommen, daß i solcher Gleichungen vorhanden seien, und es sind also dem ι in den einzelnen Gleichungen die Werte 1, 2, usw. bis i beizulegen. Die Größen $x_{\iota\nu}$ sind als stetige Funktionen der x_ν zu betrachten.

129 **Folgerung 2.** Der Zusammenhang eines materiellen Systems, dessen Lagen durch allgemeine Koordinaten dargestellt sind, kann analytisch vollständig beschrieben werden durch Angabe einer einzigen möglichen Lage und eines Satzes homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Koordinaten.

Durch Benutzung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ, deren Zahl r kleiner als $3n$ ist, ist bereits ein Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems gesetzt. Denken wir uns deshalb den Zusammenhang zuerst nach **128** vollständig beschrieben durch die rechtwinkligen Koordinaten. In den entsprechenden Differentialgleichungen seien die Werte der dx_ν in den dp_ϱ nach Gleichung **57b** eingetragen. Die entstehenden linearen homogenen Gleichungen müssen sich so ordnen lassen, daß unter ihnen $3n - r$ identisch erfüllt sind infolge der $3n - r$ Gleichungen, welche ausdrücken, daß die $3n$ Größen x_ν Funktionen der r Größen p_ϱ sind. Die übrig bleibenden $k = i - 3n + r$ Gleichungen zwischen den dp_ϱ ersetzen bei Benutzung der p_ϱ vollständig die sämtlichen Gleichungen zwischen den dx_ν und genügen daher, nach **127**, zusammen mit der Angabe einer möglichen Lage zur vollständigen Beschreibung des Zusammenhanges des Systems.

Bezeichnung. Die Gleichungen, welche den Zusammenhang eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darstellen, sollen in Zukunft dauernd in der Form geschrieben werden: **130**

$$\sum_1^r{}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho} \, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Zahl dieser Gleichungen wird gleich k angenommen, und es sind also dem $\varkappa$ nacheinander die Werte 1, 2, usw. bis k zu erteilen. Die Größen $p_{\varkappa\varrho}$ sind als stetige Funktionen der p_ϱ zu betrachten.

Anmerkung. Die Gleichungen **128** bzw. **130** werden auch die Differentialgleichungen oder die Bedingungsgleichungen des Systems genannt werden. **131**

Lehrsatz. Lassen sich aus den Differentialgleichungen eines materiellen Systems eine gleiche Zahl von endlichen Gleichungen zwischen den Koordinaten des Systems ableiten, so ist das System ein holonomes System (**123**). **132**

Denn die Koordinaten einer jeden möglichen Lage müssen alsdann den endlichen Gleichungen genügen. Die Unterschiede der Koordinaten zweier benachbarter Lagen genügen also einer gleichen Zahl von homogenen linearen Differentialgleichungen, und da diese der ebenso großen Zahl der gegebenen Differentialgleichungen des Systems nicht widersprechen können, auch diesen letzteren. Die Verrückung zwischen irgend zwei möglichen Lagen ist also eine mögliche Verrückung, welches die Behauptung ist.

133 **Umkehrung.** Ist ein materielles System ein holonomes System, so lassen seine Differentialgleichungen eine ebenso große Zahl von endlichen oder Integralgleichungen zwischen den Koordinaten selbst zu.

Man betrachte von den r Koordinaten des Systems, zwischen deren Differentialen die k Gleichungen bestehen, irgendwelche $r-k$, etwa die ersten $r-k$ als unabhängig veränderlich. Man gehe von einer beliebigen Anfangslage des Systems auf verschiedenen möglichen Bahnen zu einer Lage über, für welche die unabhängigen Koordinaten bestimmte Werte haben. Käme man nun mit stetig sich ändernder Bahn zu stetig sich ändernden Werten der übrigen Koordinaten, also zu verschiedenen Lagen, so wären diese Lagen mögliche Lagen, die Verrückungen zwischen ihnen also nach Voraussetzung mögliche Verrückungen. Es gäbe also von Null verschiedene Wertsysteme der Differentiale, welche den Differentialgleichungen genügen, obwohl die ersten $r-k$ dieser Differentiale gleich Null gesetzt sind. Dies ist nicht möglich, da die Gleichungen homogen und linear sind. Also kommen wir stets zu denselben Werten nicht nur der ersten $r-k$, sondern auch der übrigen Koordinaten. Die letzteren sind also bestimmte Funktionen der ersteren. Die k endlichen Gleichungen, welche dies ausdrücken, sind, da sie den Differentialgleichungen nicht widersprechen können, Integralgleichungen derselben.

Bewegungsfreiheit.

134 **Definition.** Die Zahl der willkürlich anzunehmenden unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten eines materiellen Systems heißt die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems oder auch der Grad der Freiheit seiner Bewegung.

Bemerkungen dazu.

135 1. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ist gleich der Zahl seiner Koordinaten, vermindert um die Zahl der Differentialgleichungen des Systems.

2. Die Zahl der Freiheiten eines materiellen Systems ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. 136

In der Bezeichnung von **128**—**130** ist die Zahl der Freiheiten gleich $r-k$, also (**129**) gleich $3n-i$, also stets dieselbe Zahl, welche Zahlen auch durch r und k dargestellt sind.

3. Die Zahl der Freiheiten eines Systems ändert sich nicht mit der Lage des Systems. 137

Da der Zusammenhang ein stetiger ist, so kann sich die Zahl der Freiheiten in benachbarten Lagen nicht um ein Endliches unterscheiden, also, da eine stetige Änderung dieser Zahl ausgeschlossen ist, auch nicht in endlich entfernten Lagen.

4. Der Beweis des Satzes **125** enthält eine Lösung der Aufgabe: Die Zahl der Bewegungsfreiheiten des vollständig bekannten materiellen Systems, allerdings nicht ohne Probieren, zu finden. Die Zahl l der nach der Methode jenes Beweises gefundenen Hilfsgrößen du_λ ist die gesuchte Zahl. 138

Ist von vornherein bekannt, daß die möglichen Lagen des Systems sich durch r allgemeine Koordinaten p_ϱ darstellen lassen, so können in jenem Beweise auch diese Koordinaten anstatt der x_ν benutzt werden.

Definition. Eine Koordinate eines materiellen Systems, deren Änderungen unabhängig von den Änderungen aller übrigen Koordinaten geschehen können, heißt eine freie Koordinate des Systems. 139

Folgerung. Eine freie Koordinate kommt in den Differentialgleichungen ihres Systems nicht vor, und umgekehrt ist jede Koordinate, welche in den Differentialgleichungen nicht vorkommt, eine freie Koordinate. 140

Anmerkung 1. Ob eine bestimmte Koordinate eines Systems eine freie Koordinate ist, oder nicht, hängt ab von der Wahl der übrigen, gleichzeitig benutzten Koordinaten. 141

Denn kommt eine gewisse Koordinate in den Differentialgleichungen des Systems nicht vor, und wählen wir nun an Stelle einer der Koordinaten, welche in diesen Gleichungen vorkommen, eine Funktion dieser und jener ersten als Koordinate, so verliert jene erste die Eigenschaft, freie Koordinate zu sein, welche sie bis dahin hatte.

142 **Anmerkung 2.** In einem freien System ist jede Koordinate der absoluten Lage eine freie Koordinate.

Vergleiche **118** und **122**.

143 **Lehrsatz.** Lassen sich die möglichen Lagen eines materiellen Systems durch Koordinaten darstellen, welche sämtlich freie Koordinaten sind, so ist das System ein holonomes (**123**).

Jede Verrückung des Systems zwischen möglichen Lagen wird durch ein Wertsystem der Differentiale der freien Koordinaten ausgedrückt; jedes solche Wertsystem ist aber möglich, da es keinen Bedingungen unterworfen ist, und daher ist jede Verrückung zwischen möglichen Lagen eine mögliche Verrückung.

144 **Umkehrung.** In einem holonomen System lassen sich alle möglichen Lagen durch freie Koordinaten darstellen.

Hat ein holonomes System r Koordinaten, zwischen welchen k Differentialgleichungen bestehen, so lassen sich k der Koordinaten als Funktionen der übrigen $r-k$ darstellen (vergl. **133**). Diese $r-k$ willkürlich ausgewählten Koordinaten bestimmen also bereits die Lage des Systems vollständig und können unter Weglassung der übrigen Koordinaten als freie Koordinaten des Systems benutzt werden. Auch irgendwelche $r-k$ Funktionen der ursprünglichen r Koordinaten können offenbar der gleichen Absicht dienen.

145 **Anmerkung 1.** Die Zahl der freien Koordinaten eines holonomen Systems ist gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten.

146 **Anmerkung 2.** Ist die Zahl der Koordinaten eines materiellen Systems gleich der Zahl seiner Bewegungsfreiheiten, so sind die Koordinaten sämtlich freie Koordinaten, und das System ist ein holonomes.

Denn bestände auch nur eine einzige Differentialgleichung zwischen den Koordinaten, so wäre schon die Zahl der Koordinaten größer als die der Bewegungsfreiheiten. Kleiner als die Zahl der Bewegungsfreiheiten kann die Zahl der Koordinaten überhaupt nicht sein.

Anmerkung 3. Die möglichen Lagen eines Systems, welches kein holonomes ist, lassen sich nicht vollständig allein durch freie Koordinaten darstellen. 147

Denn das Gegenteil dieser Behauptung stände in Widerspruch zu **143**.

Verrückungen senkrecht zu den möglichen Verrückungen.

Lehrsatz. Lassen sich in einem System die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ darstellen durch k Größen $\gamma_\varkappa$ in der Form: 148

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems (**130**) entnommen sind, so steht die Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus der gleichen Lage.

Es sei nämlich ds' die Länge einer beliebigen möglichen Verrückung aus der gleichen Lage, und es seien die dp'_ϱ die Änderungen der Koordinaten für diese Verrückung. Multiplizieren wir nun die Gleichungen der Reihe nach mit dp'_ϱ und addieren sie, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen **85** und **130**:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, d\bar{p}_\varrho\, dp'_\varrho = ds\, ds' \cos s{,}s' = \sum_1^k {}_\varkappa\, \gamma_\varkappa \sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp'_\varrho = 0 \quad ,$$

also $\cos s{,}s' = 0$; $s{,}s' = 90^0$, was zu beweisen war.

Zusatz. Die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ einer Verrückung ds nach den Koordinaten p_ϱ sind eindeutig bestimmt durch k unter ihnen und die Angabe, daß die Verrückung senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems. 149

Es seien nämlich wieder die dp'_ϱ die Änderungen der p_ϱ für eine beliebige mögliche Verrückung. Mit Hilfe der k Bedingungsgleichungen können wir k derselben ausdrücken als homogene lineare Funktionen der übrigen $r-k$ und diese Werte einsetzen in die Gleichung:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, d\bar{p}_\varrho \, dp'_\varrho = 0 \quad .$$

Die in dieser Gleichung noch vorhandenen dp'_ϱ sind nun völlig willkürlich, es muß also der Faktor einer jeden dieser Größen verschwinden. Dies gibt $r-k$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $d\bar{p}_\varrho$, welche gestatten, $r-k$ derselben als eindeutige, weil lineare Funktionen der übrigen k darzustellen.

150 **Umkehrung.** Steht eine denkbare Verrückung senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines Systems, so lassen sich die r Komponenten $d\bar{p}_\varrho$ derselben nach den p_ϱ stets durch passende Bestimmung von k Größen $\gamma_\varkappa$ darstellen in der Form:

$$d\bar{p}_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \, \gamma_\varkappa \quad .$$

Bestimmen wir nämlich die $\gamma_\varkappa$ aus irgendwelchen k dieser Gleichungen und berechnen mit diesen Werten die sämtlichen Komponenten, so müssen wir auf die gegebenen Werte der $d\bar{p}_\varrho$ kommen. Denn die so berechnete Verrückung steht nach 148 senkrecht auf allen möglichen und hat mit der gegebenen Verrückung k Komponenten gemein, sie hat also mit derselben nach 149 alle r Komponenten nach den p_ϱ gemein.

Abschnitt 5. Von den ausgezeichneten Bahnen der materiellen Systeme.

I. Geradeste Bahnen.

Definitionen.

151 1. Ein Bahnelement eines materiellen Systems heißt gerader als ein anderes, wenn es eine geringere Krümmung hat.

152 2. Geradestes Bahnelement nennen wir ein mögliches

Bahnelement, welches gerader ist als alle anderen möglichen Bahnelemente, welche mit ihm die Lage und die Richtung gemein haben.

3. Eine Bahn, deren sämtliche Elemente geradeste Elemente sind, heißt eine geradeste Bahn. 153

Analytische Darstellung. Alle Bahnelemente, unter welchen ein geradestes Bahnelement das geradeste ist, haben Lage und Richtung, also die Werte der Koordinaten und der ersten Differentialquotienten der Koordinaten nach der unabhängigen Variabeln gemein. Die Krümmung ist aber, außer durch jene Werte, auch noch mitbestimmt durch die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten. Durch die Werte dieser also unterscheiden sich jene Bahnelemente, und es müssen also für das geradeste Bahnelement die zweiten Differentialquotienten solche Funktionen der Koordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten sein, welche die Krümmung zu einem Minimum machen. 154

Die Gleichungen, welche diese Bedingung ausdrücken, müssen erfüllt sein für alle Lagen einer geradesten Bahn, sie sind also zugleich die Differentialgleichungen einer solchen Bahn.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems darzustellen in den rechtwinkligen Koordinaten des Systems. 155

Es möge als unabhängige Variabele die laufende Bahnlänge gewählt werden. Da nur mögliche Bahnen in Betracht zu ziehen sind, unterliegen die $3n$ Größen x'_ν nach **128** und **100** i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x'_\nu = 0 \quad . \qquad \text{a)}$$

Also unterliegen die $3n$ Größen x''_ν i Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, x''_\nu + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, x'_\nu\, x'_\mu = 0 \ , \qquad \text{b)}$$

welche durch Differentiation aus jenen folgen.

Unter der Voraussetzung, daß diesen Gleichungen **b)** nicht widersprochen werde, sollen die Größen x''_ν so bestimmt werden, daß die Krümmung c (**106**) oder, was dasselbe sagt, daß der Wert von $\frac{1}{2}c^2$, nämlich

c)
$$\frac{1}{2}\sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} x''^2_\nu \quad ,$$

ein Minimum werde.

Nach den Regeln der Differentialrechnung verfahren wir wie folgt: Wir multiplizieren jede der Gleichungen **b)** mit einem nachträglich zu bestimmenden Faktor, welcher für die ι te Gleichung Ξ_ι heißen möge; wir addieren die partiellen Differentialquotienten der linken Seiten der entstandenen Gleichungen nach einer jeden der Größen x''_ν zu dem nach der gleichen Größe genommenen partiellen Differentialquotienten der Form **c)**, welche zu einem Minimum zu machen ist; wir setzen schießlich die entstandenen Aggregate gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Gleichungen von der Form:

d)
$$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_1^{i}{}_\iota x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **b)** $3n+i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n+i$ Größen x''_ν und Ξ_ι ergeben, und aus welchen sich diese Größen und dann aus **c)** der Wert der kleinsten Krümmung selbst ergeben. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist also notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei, und die Gleichungen **d)** sind also die verlangten Differentialgleichungen.

156 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **d)** sind aber auch die hinreichenden Bedingungen, zunächst für das Eintreten eines Minimums. Denn die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 c^2}{\partial x''_\nu\, \partial x''_\mu}$$

verschwinden, sobald ν und μ verschieden sind, und sind notwendig positiv, sobald ν und μ gleich sind. Der Wert der Krümmung läßt also keine anderen ausgezeichneten Werte zu, als allein ein Minimum.

Die Erfüllung der Gleichungen **d)** für alle Lagen einer möglichen Bahn ist demnach auch hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei.

Anmerkung 2. Unter Berücksichtigung von **72** können die Gleichungen **d)** in der Form geschrieben werden: 157

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s, x_\nu) = -\sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota \quad .$$

Die Gleichungen **d)** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge beständig ändern muß, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar gibt eine jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung der Bahn gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

Aufgabe 2. Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten des Systems auszudrücken. 158

Wir wählen wieder als unabhängige Variabele die Bahnlänge. Die Koordinaten p_ϱ und ihre Differentialquotienten p'_ϱ genügen (**130**) den k Gleichungen

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, p'_\varrho = 0 \quad , \qquad \textbf{a)}$$

also die Größen p''_ϱ den Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, p''_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p'_\varrho\, p'_\sigma = 0 \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Unter allen Werten der p''_ϱ, welche diesen Gleichungen genügen, sind diejenigen zu bestimmen, welche den Wert der

Krümmung c oder, was auf dasselbe hinausläuft, den Wert von $\frac{1}{2}c^2$, also die halbe rechte Seite der Gleichung **108 c** zu einem Minimum machen. Verfahren wir nach den Regeln der Differentialgleichung wie in **155**, und nennen wir $\Pi_\varkappa$ den Faktor, mit welchem wir die $\varkappa$te der Gleichungen **b)** multiplizieren, so erhalten wir als notwendige Bedingungen für das Minimum r Gleichungen von der Form:

$$\text{d)}\quad \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right) p'_\sigma p'_\tau + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \Pi_\varkappa = 0 \quad ,$$

in welchen nämlich dem ϱ für jede Gleichung ein bestimmter Wert von 1 bis r zu erteilen ist. Zusammen mit den Gleichungen **b)** bilden sie $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen p''_ϱ und $\Pi_\varkappa$, aus welchen sich diese Größen und dann nach **108** die kleinste Krümmung bestimmen lassen. Die Erfüllung der Gleichungen **d)** längs aller Lagen einer möglichen Bahn ist die notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine geradeste sei.

159 **Anmerkung 1.** Die Erfüllung der Gleichungen **d)** ist aber auch die hinreichende Bedingung für das Eintreten eines Minimums und also einer geradesten Bahn. Denn der Ausdruck **108** ist nur eine Transformation des Ausdrucks **106** für die Krümmung; wie dieser (**156**) läßt daher auch jener nur einen einzigen ausgezeichneten Wert, und zwar ein Minimum zu.

160 **Anmerkung 2.** Nach **75** haben wir:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p'_\sigma \quad ,$$

also ist:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho) = \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p''_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} p'_\sigma p'_\tau \quad .$$

Es lassen sich daher die Gleichungen **158d** auch schreiben in der Form:

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho) = \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma\sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p'_\sigma p'_\tau - \sum_1^k{}_\varkappa p_{\varkappa\varrho} \Pi_\varkappa \quad .$$

Die Gleichungen **158d** geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn beim Fortschreiten in ihrer Länge ändern muß, damit die Bahn eine geradeste bleibe; und zwar gibt jetzt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

Lehrsatz. Aus einer gegebenen Lage in einer gegebenen Richtung ist stets eine und nur eine geradeste Bahn möglich. 161

Denn ist eine Lage und eine Richtung in ihr gegeben, so geben die Gleichungen **155d** oder **158d** stets bestimmte, und zwar eindeutig bestimmte Werte für die Änderung der Richtung; es ist also durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt die Anfangslage und die Richtung im nächsten Bahnelement, also auch die im Folgenden, und so fort ins Unendliche.

Folgerung. Es ist im allgemeinen nicht möglich, von einer beliebigen Lage eines gegebenen Systems zu einer beliebigen anderen Lage eine geradeste Bahn zu ziehen. 162

Denn die Mannigfaltigkeit der möglichen Verrückungen aus einer Lage ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, die Mannigfaltigkeit der möglichen Richtungen in einer Lage und daher die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen aus ihr also um die Einheit kleiner. Die Mannigfaltigkeit der Lagen, welche auf geradesten Bahnen von einer gegebenen Lage aus zu erreichen sind, ist also wieder gleich der Zahl der Freiheiten. Aber die Mannigfaltigkeit der möglichen Lagen kann der Zahl der benutzten Koordinaten gleich sein, und ist daher im allgemeinen größer als jene.

Bemerkung 1. Um alle geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen durch die p_ϱ bezeichnet sind, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ darstellen zu können, ist nicht die Kenntnis irgendwelcher $3n$ Funktionen erforderlich, welche die Lagen der einzelnen Punkte des Systems 163 als Funktionen der p_ϱ vollständig bestimmen. Es genügt vielmehr, daß neben den Bedingungsgleichungen des Systems in den p_ϱ die $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ der p_ϱ bekannt gegeben seien.

Denn die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen 158d können explizite hingeschrieben werden, sobald nur neben den $p_{\varkappa\varrho}$ die $a_{\varrho\sigma}$ als Funktionen der p_ϱ gegeben sind.

164 **Bemerkung 2.** Um die geradesten Bahnen eines materiellen Systems, dessen Lagen man durch die p_ϱ bezeichnet hat, durch Gleichungen zwischen eben diesen p_ϱ angeben zu können, genügt neben der Kenntnis der Bedingungsgleichungen zwischen den p_ϱ die Kenntnis der Länge einer jeden möglichen unendlich kleinen Verrückung als Funktion eben jener Koordinaten p_ϱ und deren Änderungen.

Denn ist ds der Ausdruck jener Länge in der verlangten Form, so ist (57d)

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 ds^2}{\partial dp_\varrho \partial dp_\sigma} \quad .$$

165 **Bemerkung 3.** Um den Wert der Krümmung selbst zu kennen in jeder Lage einer geradesten Bahn, genügt indessen die Kenntnis der $\frac{1}{2}r(r+1)$ Funktionen $a_{\varrho\sigma}$ nicht. Es muß hinzukommen die Kenntnis der $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ Funktionen $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ (108).

Die Kenntnis der Lagen aller einzelnen Punkte als Funktionen der p_ϱ ist auch zur Ermittelung der Krümmung selbst nicht erforderlich.

2. Kürzeste und geodätische Bahnen.

166 **Definition 1.** Kürzeste Bahn eines materiellen Systems zwischen zweien seiner Lagen heißt eine mögliche Bahn zwischen diesen Lagen, deren Länge kleiner ist als die Länge irgend einer anderen, ihr unendlich benachbarten Bahn zwischen denselben Lagen.

Bemerkungen dazu.

1. Es ist durch die Definition nicht ausgeschlossen, und es kann in der Tat eintreten, daß es mehrere kürzeste Bahnen zwischen zwei Lagen gibt. Die kürzeste unter diesen heißt die absolut kürzeste Bahn. Sie ist zugleich die kürzeste Bahn, welche überhaupt zwischen den beiden Lagen möglich ist. 167

2. Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine kürzeste Bahn möglich. 168

Denn mögliche Bahnen sind zwischen möglichen Lagen stets vorhanden (**114**), unter ihnen also eine absolut kürzeste, welche also auch kürzer ist als ihre Nachbarn, deren sie nach der vorausgesetzten Stetigkeit (**121**, **115**) besitzen muß, welche also eine kürzeste Bahn ist.

3. Eine kürzeste Bahn zwischen zwei Lagen ist zugleich eine kürzeste Bahn zwischen irgend zwei der ihr angehörigen Lagen. Jeder Teil einer kürzesten Bahn ist wieder eine kürzeste Bahn. 169

4. Die Länge einer kürzesten Bahn unterscheidet sich nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung von der Länge aller benachbarten Bahnen zwischen den gleichen Endlagen. Als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung gelten dabei die Längen der Verrückungen, welche nötig sind, um die benachbarten Bahnen in die kürzeste überzuführen. 170

Definition 2. Geodätische Bahn eines materiellen Systems heißt jede Bahn, deren Länge zwischen irgend zweien ihrer Lagen sich nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung unterscheidet von der Länge irgendwelcher unendlich benachbarter Bahnen zwischen den gleichen Lagen. 171

Bemerkungen dazu.

1. Jede kürzeste Bahn zwischen irgend zwei Lagen ist eine geodätische Bahn. 172

Es enthält also auch die Definition **171** nicht etwa einen inneren Widerspruch, sondern es gibt Bahnen, welche dieser Definition genügen.

173 **2.** Zwischen irgend zwei möglichen Lagen eines materiellen Systems ist stets mindestens eine geodätische Bahn möglich (**168** und **172**).

174 **3.** Eine geodätische Bahn ist nicht notwendig zugleich kürzeste Bahn zwischen irgend zweien ihrer Lagen.

Es kann aus den Definitionen nicht gefolgert werden, daß jede geodätische Bahn auch kürzeste Bahn ist, und einfache Beispiele zeigen, daß es in der Tat geodätische Bahnen gibt, welche nicht zugleich kürzeste Bahnen zwischen ihren Endlagen sind. Solche Beispiele können bereits der Geometrie des einzelnen materiellen Punktes, also der gewöhnlichen Geometrie entnommen, und also aus dieser als bekannt vorausgesetzt werden.

175 **4.** Gibt es zwischen zwei Lagen nur eine einzige geodätische Bahn, so ist dieselbe eine kürzeste, und zwar die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn das Gegenteil würde nach **168** und **172** der Voraussetzung widersprechen.

176 **5.** Eine geodätische Bahn ist stets kürzeste Bahn zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten, übrigens noch endlich voneinander entfernten ihrer Lagen.

Es möge zwischen zwei beliebigen Lagen der betrachteten geodätischen Bahn noch eine Anzahl weiterer geodätischer Bahnen geben. Mit einer dieser Bahnen muß die absolut kürzeste Bahn zwischen beiden Lagen zusammenfallen (**172**). Nähern wir nun die Lagen einander längs der betrachteten geodätischen Bahn, so nähert sich die Länge dieser Bahn und zugleich die Länge der absolut kürzesten Bahn der Null, während die übrigen geodätischen Bahnen endlich bleiben. Mindestens von einem gewissen endlichen Abstand der Lagen an muß also die geodätische Bahn, längs welcher die beiden Lagen sich nähern, mit der absolut kürzesten unter ihnen zusammenfallen.

Analytische Darstellung. Damit eine Bahn eine geodätische Bahn sei, ist die notwendige und hinreichende analytische Bedingung, daß das Integral des Bahnelements (**99**), nämlich 177

$$\int ds \quad ,$$

genommen zwischen irgend zwei Lagen der Bahn, nicht variiere, wenn auch den Koordinaten der Lagen der Bahn beliebige stetige Variationen erteilt werden, vorausgesetzt nur, daß 1) diese Variationen verschwinden an den jedesmaligen Grenzlagen des Integrals, und daß 2) auch noch nach Ausführung der Variation die Koordinaten und ihre Differentiale den Bedingungsgleichungen des Systems genügen. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergibt sich ein Satz von Differentialgleichungen, denen die Koordinaten der Bahn, gedacht als Funktionen einer beliebigen Variabelen, genügen müssen, und welche also die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen sind.

Daß jene Differentialgleichungen für alle Punkte einer 178
möglichen Bahn erfüllt seien, ist nach **172** zugleich die notwendige Bedingung dafür, daß die Bahn eine kürzeste sei, und jene Gleichungen sind daher zugleich die Differentialgleichungen der kürzesten Bahnen. Das Verschwinden der Variation des Integrals ist aber noch nicht hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn zwischen seinen Endlagen eine kürzeste sei. Vielmehr ist hierzu weiter erforderlich, daß für jede zulässige Variation der Koordinaten eine zweite Variation des Integrals einen wesentlich positiven Wert habe. Für hinreichend benachbarte Lagen einer Bahn, welche den Differentialgleichungen genügt, ist diese Bedingung nach **176** stets von selber erfüllt.

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der geodätischen 179
Bahnen eines materiellen Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

Die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten x_ν, welche wir zunächst als Funktionen einer beliebigen Variabelen ansehen, sollen vor und nach der Variation den i Gleichungen

(179) a)
$$\sum_1^{3n}{}^{\nu}\, x_{\iota\nu}\, dx_\nu = 0$$

genügen (128). Die $3n$ Variationen δx_ν sind also gebunden an die i Gleichungen, welche aus jenen durch Variation folgen, nämlich:

b)
$$\sum_1^{3n}{}^{\nu}\, x_{\iota\nu}\, d\delta x_\nu + \sum_1^{3n}{}^{\nu} \sum_1^{3n}{}^{\mu} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, \delta x_\mu\, dx_\nu = 0 \quad .$$

Da die Länge ds des Bahnelements nicht von den x_ν, sondern nur von den dx_ν abhängt, so ist seine Variation

$$\delta ds = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, \delta dx_\nu = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, d\delta x_\nu \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c)
$$\delta \int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Nach den Regeln der Variationsrechnung multiplizieren wir jede der Gleichungen **b)** mit einer nachträglich zu bestimmenden Funktion der x_ν, welche für die ι te Gleichung mit ξ_ι bezeichnet werden möge, und addieren die Summe der linken Seiten der entstandenen Gleichungen, welche Summe gleich Null ist, zu dem variierten Element des Integrals. Durch partielle Integration schaffen wir die Differentiale der Variationen fort; endlich setzen wir den Faktor einer jeden der willkürlichen Funktionen δx_ν gleich Null. Wir erhalten so $3n$ Differentialgleichungen der Form:

d)
$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\right) + \sum_1^{i}{}^{\iota}\, x_{\iota\nu}\, d\xi_\iota - \sum_1^{i}{}^{\iota} \sum_1^{3n}{}^{\mu} \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right) \xi_\iota\, dx_\mu = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen **a)** $3n+i$ Gleichungen für die $3n+i$ Funktionen x_ν und ξ_ι bilden. Diese Differentialgleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation des Integrals; jede geodätische Bahn genügt also denselben, und sie stellen also die gesuchte Lösung dar.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **179d** sind aber 180
auch hinreichende Bedingungen dafür, daß die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation des Integrals $\int ds$ gleich den Gliedern, welche bei der partiellen Integration vor das Integralzeichen treten; es wird also in der üblichen Bezeichnungsweise, wenn mit 0 die untere, mit 1 die obere Grenze angedeutet wird:

$$\delta\int ds = \sum_1^{3n}{}_{\nu} \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_1^{i}{}_{\iota}\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota\right)\delta x_\nu\right]_0^1 .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δx_ν verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzwerten, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte hinreichende analytische Bedingung nach **177** erfüllt.

Anmerkung 2. Benutzen wir die laufende Länge der 181
Bahn als unabhängige Variabele, so nehmen unter Berücksichtigung von **55** und **100** die Gleichungen **179d** nach Division durch ds die Formen an:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^{i}{}_{\iota}\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota' - \sum_1^{i}{}_{\iota} \sum_1^{3n}{}_{\mu} \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right) \xi_\iota\, x_\mu' = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

welche zusammen mit den i durch Differentiation von **179a** erhaltenen Gleichungen:

$$\sum_1^{3n}{}_{\nu}\, x_{\iota\nu}\, x_\nu'' + \sum_1^{3n}{}_{\nu} \sum_1^{3n}{}_{\mu} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, x_\nu'\, x_\mu' = 0 \qquad \text{b)}$$

$3n+i$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $3n+i$ Größen x_ν'' und ξ_ι' darstellen, und also erlauben, diese Größen als eindeutige Funktionen der Größen x_ν, x'_ν und ξ_ι anzugeben.

182 **Anmerkung 3.** Unter Benutzung von **72** kann den Gleichungen **181a** die Form gegeben werden:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{d}{ds}(\cos s,x_\nu) = -\sum_1^i{}^\iota x_{\iota\nu}\,\xi'_\iota + \sum_1^i{}^\iota \sum_1^{3n}{}^\mu \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi'_\iota x'_\mu \quad .$$

Die Gleichungen **181a** geben also an, wie sich die Richtung der Bahn bei gegebenem Anfang derselben beständig ändern muß, damit die Bahn eine geodätische bleibe; und zwar gibt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der rechtwinkligen Koordinaten ändert.

183 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen eines materiellen Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben darzustellen.

Die r Koordinaten p_ϱ des Systems sind gebunden an die k Gleichungen (**130**):

a)
$$\sum_1^r{}^\varrho p_{\varkappa\varrho}\,dp_\varrho = 0$$

und also die r Variationen δp_ϱ an die Gleichungen:

b)
$$\sum_1^r{}^\varrho p_{\varkappa\varrho}\,d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\,\delta p_\sigma\,dp_\varrho = 0 \quad .$$

Die Länge ds einer unendlich kleinen Verrückung hängt jetzt nicht allein von den Differentialen dp_ϱ, sondern auch von den Werten der p_ϱ selbst ab, es ist also:

$$\delta ds = \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\,d\delta p_\varrho + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho}\,\delta p_\varrho \quad .$$

Dies vorausgesetzt, soll

c)
$$\delta\int ds = \int \delta ds = 0$$

gemacht werden. Indem wir nach den Regeln der Variation verfahren, genau wie in **179**, und indem wir mit $\pi_\varkappa$ den Faktor der $\varkappa$ ten Gleichung **b)** bezeichnen, erhalten wir r Differentialgleichungen von der Form:

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\right) - \frac{\partial ds}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, d\pi_\varkappa \qquad \text{d)}$$

$$- \sum_1^k{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa\, dp_\sigma = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **a)** $r + k$ Differentialgleichungen für die $r + k$ Funktionen p_ϱ und $\pi_\varkappa$ der unabhängigen Variabelen bilden. Diese Gleichungen sind notwendige Bedingungen für das Verschwinden der Variation, sind also erfüllt in allen Lagen einer geodätischen Bahn; sie enthalten demnach die Lösung der gestellten Aufgabe.

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen **183d** sind aber 184
auch hinreichende Bedingungen dafür, daß die Bahn, welche ihnen genügt, eine geodätische Bahn sei. Denn sind jene Gleichungen erfüllt, so wird die Variation der Bahnlänge (vergl. **180**):

$$\delta \int ds = \sum_1^r{}_\varrho \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \pi_\varkappa\right) \delta p_\varrho\right]_0^1 \quad .$$

Lassen wir also für irgend zwei Lagen der Bahn die Variationen δp_ϱ verschwinden, so verschwindet die Variation des Integrals zwischen jenen Lagen als Grenzlagen, und es ist daher die für geodätische Bahnen verlangte analytische Bedingung erfüllt (**177**).

Anmerkung 2. Wählen wir die Bahnlänge als unab- 185
hängige Variabele, indem wir die Gleichungen **183d** durch ds dividieren und für ds seinen Wert in den p_ϱ und dp_ϱ nach **57d** einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen der geodätischen Bahnen in der Form der r Gleichungen:

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} &\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} p_\sigma'' + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right) p_\sigma' p_\tau' \\ &\quad + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \pi_\varkappa' - \sum_1^k{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa p_\sigma' = 0 \quad , \end{aligned}\right.$$

welche zusammen mit den k aus **183a** abgeleiteten Gleichungen

$$\text{b)} \qquad \sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} p_\varrho'' + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma} p_\varrho' p_\sigma' = 0$$

$r + k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r + k$ Größen p_ϱ'' und $\pi_\varkappa'$ bilden, also gestatten, diese Größen als eindeutige Funktionen der p_ϱ, p_ϱ' und $\pi_\varkappa$ anzugeben.

186 **Anmerkung 8.** Indem wir bei der Einführung der Bahnlänge als unabhängiger Variabele die Gleichung **92** berücksichtigen, erhalten wir die Gleichungen **185a** in der Form:

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s, p_\varrho\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p_\sigma' p_\tau' - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} \pi_\varkappa' + \sum_1^r{}_\varkappa \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) \pi_\varkappa p_\sigma' \quad .$$

Jene Gleichungen geben also wiederum an, wie sich die Richtung der Bahn mit Durchlaufung ihrer Länge ändern muß, damit die Bahn beständig eine geodätische bleibe; und zwar gibt jede einzelne Gleichung an, wie sich die Neigung gegen eine bestimmte der Koordinaten p_ϱ ändert.

187 **Bemerkung 1.** Eine geodätische Bahn ist durch Lage und Richtung eines ihrer Elemente noch nicht bestimmt, sondern aus einer gegebenen Lage in gegebener Richtung ist im allgemeinen eine unendliche Anzahl geodätischer Bahnen möglich.

Sind uns für eine Lage der Bahn die p_ϱ, p_ϱ' und die k Größen $\pi_\varkappa$ gegeben, so sind sie nach **185** auch für das nächste Element eindeutig bestimmt, und die Fortsetzung der Bahn ist also nur in eindeutig bestimmter Weise möglich. Die Angabe der Richtung der Bahn in jener gegebenen Lage aber liefert nur die Größen p_ϱ und p'_ϱ, und genügt also nicht zur Festlegung der Bahn, sondern läßt, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, noch eine $k$fache Unendlichkeit geodätischer Bahnen zu.

Bemerkung 2. Wenn die Differentialgleichungen des betrachteten Systems kein Integral zulassen, also im allgemeinen Falle, können von den $2r$ Größen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und die Richtung in dieser bestimmen, $2r-k$ willkürlich angenommen werden, nämlich die r Größen p_ϱ und $r-k$ der Größen p'_ϱ. Jene $2r-k$ willkürlichen Werte, zusammen mit den k willkürlichen Werten der $\pi_\varkappa$ in jener Lage können als die $2r$ willkürlichen Konstanten angesehen werden, welche zusammen mit den Differentialgleichungen **185a** eine geodätische Bahn bestimmen, und welche in den Integralen jener Gleichungen auch vorhanden sein müssen, da es nach **173** möglich sein soll, jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Lassen nämlich die Differentialgleichungen des Systems keine endliche Beziehung zwischen den p_ϱ ableiten, so ist jedes denkbare Wertsystem dieser Größen auch ein mögliches Wertsystem; eine willkürliche Anfangs- und Endlage sind also zusammen durch $2r$ willkürliche Koordinatenwerte bestimmt. 188

Bemerkung 3. Für jedes Integral, welches die Differentialgleichungen des materiellen Systems zulassen, vermindert sich die Zahl der Konstanten, welche eine geodätische Bahn eindeutig bestimmen, um zwei. 189

Lassen sich nämlich aus den Bedingungsgleichungen des Systems l endliche Gleichungen zwischen den p_ϱ herleiten, so können von den r Koordinaten p_ϱ nur noch $r-l$ willkürlich angenommen werden, von den $2r$ Größen p_ϱ und p'_ϱ, welche eine Lage und eine Richtung in ihr bestimmen, also nur noch $2r-l-k$. Ferner lassen sich in diesem Falle die Differentialgleichungen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in solche Form bringen, daß l derselben unmittelbar integrabele Gleichungen darstellen, nämlich diejenigen Gleichungen, welche durch Differentiation der l endlichen Beziehungen gewonnen werden. Für jede dieser Gleichungen, von welchen eine den Index λ haben möge, wird dann:

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{\lambda\varrho}}{\partial p_\sigma} = 0 \quad .$$

Es verschwinden dann also die entsprechenden Größen π_λ aus den Gleichungen **185a**, und alle p''_ϱ und $\pi'_\varkappa$ sind bereits eindeutig bestimmt durch die $k-l$ Werte der übrigen $\pi_\varkappa$. Im ganzen also behalten wir noch übrig $2r-2l$ willkürliche Bestimmungsstücke; zwei sind für jede endliche Gleichung verloren gegangen.

Übrigens genügen diese $2r-2l$ willkürlichen Konstanten immer noch, wie es sein muß, um jede mögliche Lage des Systems mit jeder andern durch eine geodätische Bahn zu verbinden. Denn bestehen zwischen den p_ϱ l endliche Gleichungen, so genügt es, die Bahn so zu führen, daß zwei ihrer Lagen mit den gegebenen Lagen je $r-l$ Koordinaten gemein haben; die Übereinstimmung in Hinsicht der übrigen wird alsdann von selbst statthaben.

3. Beziehungen zwischen geradesten und geodätischen Bahnen.

190 **Lehrsatz.** In einem holonomen System ist jede geodätische Bahn eine geradeste Bahn und auch umgekehrt jede geradeste eine geodätische Bahn.

Benutzen wir für den Beweis rechtwinklige Koordinaten. Ist das System ein holonomes, so läßt sich den i Bedingungsgleichungen desselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren und Addition in geeigneter Ordnung eine solche Form geben, in welcher jede derselben ohne weiteres integrierbar ist, in welcher nämlich die linke Seite einer jeden mit dem exakten Differentiale eines der i Integrale der Gleichungen zusammenfällt. Für jedes Wertsystem der ι, μ, ν ist alsdann:

a) $$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad ,$$

und die Differentialgleichungen der geodätischen Bahnen werden alsdann nach **181a**:

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \xi_\iota' = 0 \quad . \qquad \text{b)}$$

Dieselben unterscheiden sich offenbar nur in der Bezeichnung von den Gleichungen der geradesten Bahnen (**155d**):

$$\frac{m_\nu}{m} x_\nu'' + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, \Xi_\iota = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

da weder die ξ_ι noch die Ξ_ι in den übrigen zu befriedigenden Gleichungen vorkommen. Jede mögliche Bahn, welche nach geeigneter Bestimmung der ξ_ι den ersten dieser Gleichungen genügt, genügt den zweiten, indem man setzt $\Xi_\iota = \xi_\iota'$, und nicht minder ist jede Lösung der zweiten zugleich eine Lösung der ersten. Die Befriedigung der Gleichungen **b)** und **c)** ist aber schon hinreichende Bedingung dafür, daß die Bahn eine geodätische, bez. eine geradeste sei.

Folgerung 1. In einem holonomen System ist aus einer möglichen Lage in einer möglichen Richtung nur eine einzige geodätische Bahn möglich (**161**). **191**

Folgerung 2. In einem holonomen System ist zwischen irgend zwei möglichen Lagen immer mindestens eine geradeste Bahn möglich (**173**). **192**

Lehrsatz. Ist in einem materiellen System jede geodätische Bahn zugleich eine geradeste Bahn, so ist das System ein holonomes. **193**

Denn von jeder möglichen Lage aus ist in gegebener Richtung nach **161** nur eine einzige geradeste, also nach Voraussetzung nur eine einzige geodätische Bahn möglich. Gleichwohl ist nach **173** jede mögliche Lage durch eine dieser Bahnen zu erreichen. Es ist also die Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems gleich der Zahl seiner unabhängigen Koordinaten, also nach **146** das System ein holonomes.

194 **Folgerung.** In einem System, welches kein holonomes ist, ist im allgemeinen eine geodätische Bahn nicht zugleich eine geradeste Bahn.

Dies geht übrigens schon daraus hervor, daß in jeder Richtung nur eine geradeste, aber viele geodätische Bahnen möglich sind (**161** und **187**).

195 **Bemerkung.** In einem Systeme, welches kein holonomes ist, ist eine geradeste Bahn im allgemeinen nicht zugleich eine geodätische Bahn.

Die Behauptung ist bewiesen, sobald Beispiele von Systemen vorgezeigt werden, in welchen sich die geradesten Bahnen nicht unter den geodätischen finden. Nehmen wir deshalb der Einfachheit halber an, es bestehe nur eine einzige nicht integrierbare Bedingungsgleichung zwischen den r Koordinaten p_ϱ des Systems, und es sei dieselbe:

a) $$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{1\varrho} p'_\varrho = 0 \quad .$$

Machen wir nun die Annahme, es sei jede geradeste Bahn zugleich eine geodätische. Dann ließe sich für jedes mögliche Wertsystem der p_ϱ und p'_ϱ mindestens ein Wertsystem der p''_ϱ so bestimmen, daß zugleich den Gleichungen **158d** und **185a** genügt ist. Es müßten daher auch für alle möglichen p_ϱ und p'_ϱ die durch paarweise Subtraktion jener Gleichungen zu erhaltenden Gleichungen

$$p_{1\varrho}(\Pi_1 - \pi'_1) + \pi_1 \sum_1^r {}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = 0$$

zu befriedigen sein. Dies sind aber r Gleichungen für die eine Größe $(\Pi_1 - \pi'_1)/\pi_1$, und sie sind nur verträglich miteinander, wenn für alle Wertpaare der ϱ und τ

$$\frac{1}{p_{1\varrho}} \sum_1^r {}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial p_{1\varrho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = \frac{1}{p_{1\tau}} \sum_1^r {}_\sigma \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial p_{1\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma$$

ist. Drücken wir in $r-1$ voneinander unabhängigen dieser

Gleichungen eine der Größen p'_ϱ mit Hilfe von Gleichung **a)** durch die übrigen aus, so sind die Verhältnisse zwischen den letzteren nun völlig willkürliche Größen. Der Koeffizient jeder einzelnen dieser Größen muß also für sich verschwinden. Wir erhalten so als notwendige Folge unserer Annahme im ganzen $(r-1)^2$ Gleichungen zwischen den r Funktionen $p_{1\varrho}$ und ihren r^2 partiellen ersten Differentialquotienten. In besonderen Fällen können diese Gleichungen sämtlich befriedigt sein, denn sie sind befriedigt, wenn die Gleichung **a)** integrabel ist. Aber im allgemeinen haben wir kein Recht, die Funktionen $p_{1\varrho}$ auch nur einer einzigen Bedingung unterworfen vorauszusetzen, und im allgemeinen war also unsere Annahme unzulässig. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Ergebnis (190 bis 195). In holonomen Systemen decken sich die Begriffe der geradesten und der geodätischen Bahnen dem Inhalt nach vollständig; in nichtholonomen Systemen schließt keiner dieser Begriffe den andern ein, sondern beide haben im allgemeinen vollständig verschiedenen Inhalt. **196**

Abschnitt 6. Von der geradesten Entfernung in holonomen Systemen.

Vorbemerkungen.

1. In diesem Abschnitt soll nur von holonomen Systemen die Rede sein und unter einem System schlechthin also ein holonomes verstanden werden. Es kann daher, und es soll vorausgesetzt werden, daß die benutzten Koordinaten p_ϱ des Systems sämtlich freie Koordinaten sind. Die Zahl dieser Koordinaten ist gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten des Systems, also unabhängig von unserer Willkür; wir bezeichnen sie dauernd mit r. **197**

2. Geradeste und geodätische Bahnen fallen in diesem Abschnitt zusammen (196), und die gemeinsamen Diffe- **198**

rentialgleichungen dieser Bahnen können geschrieben werden in der Form der r Gleichungen:

$$d\left(\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho\right)=\frac{\partial ds}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

welche man aus **186** oder aus **160** erhält, indem man bedenkt, daß für die gewählten Koordinaten die sämtlichen Größen $p_{\varkappa\varrho}$ gleich Null sind.

199 3. Zufolge derselben Bemerkung erhält man für die Variation der Länge einer Bahn, welche den vorstehenden Differentialgleichungen genügt, also der Länge einer geodätischen Bahn, aus **184**:

$$\delta\int ds=\sum_1^r{}_\varrho\left[\frac{\partial ds}{\partial dp_\varrho}\delta p_\varrho\right]_0^1 \quad ,$$

oder unter Berücksichtigung von **92**:

$$\delta\int ds=\sum_1^r{}_\varrho\left[\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\cos s,p_\varrho\,\delta p_\varrho\right]_0^1 \quad ,$$

in welchen Gleichungen also die δp_ϱ die Variationen der Koordinaten der Endlage, und die $\cos s,p_\varrho$ die Richtungscosinus der Endelemente der betrachteten geodätischen Bahn bezeichnen.

I. Flächen von Lagen.

200 **Definition.** Unter einer Fläche von Lagen verstehen wir im allgemeinen ein stetig zusammenhängende Gesamtheit von Lagen. Im besonderen aber soll hier unter einer Fläche eine Gesamtheit möglicher Lagen eines holonomen Systems verstanden sein, welche dadurch charakterisiert ist, daß die Koordinaten der ihr angehörigen Lagen einer einzigen endlichen Gleichung unter sich genügen.

Die Gesamtheit der Lagen, welche gleichzeitig zweien oder mehr Flächen angehören, bezeichnen wir auch als den Durchschnitt jener zwei oder mehr Flächen.

Anmerkung 1. Durch jede Lage einer Fläche kann eine 201
unendliche Mannigfaltigkeit von Bahnen gezogen werden, deren sämtliche Lagen der Fläche angehören. Wir sagen von diesen Bahnen, daß sie der Fläche angehören, oder in der Fläche liegen; wir brauchen die gleiche Ausdrucksweise für die Elemente der Bahnen und für unendlich kleine Verrückungen überhaupt.

Anmerkung 2. Eine Bahn, welche nicht einer Fläche 202
angehört, hat mit dieser im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lagen gemeinsam.

Denn die Bahn wird analytisch dargestellt durch $r-1$ Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Lagen, die Fläche durch eine einzige Gleichung. Nach Voraussetzung sind erstere Gleichungen unabhängig von der letzteren. Alle zusammen bilden sie daher r Gleichungen für die r Koordinaten der gemeinsamen Lagen, welche Gleichungen im allgemeinen keine oder eine endliche Zahl reeller Lösungen zulassen.

Anmerkung 3. Aus jeder Lage einer Fläche ist eine 203
$(r-1)$fache Mannigfaltigkeit unendlich kleiner Verrückungen in der Fläche möglich.

Denn von den r unabhängigen Änderungen der Koordinaten, welche die Verrückung charakterisieren, können $r-1$ willkürlich angenommen werden, die $r$te ist dann dadurch bestimmt, daß die Verrückung der gegebenen Fläche angehören soll.

Lehrsatz 1. Es ist stets eine, und im allgemeinen nur 204
eine Richtung anzugeben möglich, welche auf $r-1$ verschiedenen unendlich kleinen Verrückungen eines Systems (197) aus derselben Lage senkrecht steht.

Es sei $d_\tau p_\varrho$ die Änderung der Koordinate p_ϱ für die τte jener $r-1$ Verrückungen; es sei δp_ϱ die Änderung der Koordinate p_ϱ für eine weitere Verrückung. Soll die letztere auf jenen senkrecht sein, so ist notwendig und hinreichend, daß $r-1$ Gleichungen der Form (58)

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\sum_{1}^{r}{}_{\sigma}\, a_{\varrho\sigma}\, d_{\tau}p_{\varrho}\, \delta p_{\sigma} = 0$$

erfüllt seien. Dies sind aber $r-1$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r-1$ Verhältnisse der δp_{ϱ} unter sich; sie können also stets, und zwar im allgemeinen nur durch ein Wertsystem dieser Verhältnisse befriedigt werden. In Ausnahmefällen kann Unbestimmtheit eintreten; solche muß z. B. dann eintreten, wenn irgend drei der $r-1$ Verrückungen so gewählt sind, daß jede Verrückung, welche auf zwei von ihnen senkrecht ist, auch auf der dritten senkrecht steht.

205 **Lehrsatz 2.** Steht eine Richtung senkrecht auf $r-1$ verschiedenen Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, so steht sie senkrecht auf jeder Verrückung, welche der Fläche in dieser Lage angehört.

Die Verrückungen, welche einer Fläche in einer bestimmten Lage angehören, sind dadurch charakterisiert, daß die entsprechenden dp_{ϱ} einer einzigen homogenen linearen Gleichung unter sich genügen, der Gleichung nämlich, welche durch Differentiation der Gleichung der Fläche erhalten wird. Genügen nun die $r-1$ Wertsysteme der $d_{\tau}p_{\varrho}$ jener Gleichung, so genügen auch die Größen

$$dp_{\varrho} = \sum_{1}^{r-1}{}_{\tau}\, \lambda_{\tau}\, d_{\tau}p_{\varrho}$$

derselben, worin die λ_{τ} willkürliche Faktoren bezeichnen. Die dp_{ϱ} gehören also einer beliebigen Verrückung in der Fläche an, und zwar kann jede Verrückung der Fläche in dieser Form dargestellt werden, da die rechte Seite der Gleichung eine $(r-1)$fache willkürliche Mannigfaltigkeit enthält.

Nach Voraussetzung ist nun (**204**):

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\sum_{1}^{r}{}_{\sigma}\, a_{\varrho\sigma}\, d_{\tau}p_{\varrho}\, \delta p_{\sigma} = 0 \quad ;$$

durch Multiplikation dieser Gleichungen mit den λ_{τ} und Addition folgt:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \, dp_\varrho \, \delta p_\sigma = 0 \quad ,$$

welches die Behauptung ist (58).

Definition. Eine Verrückung aus einer Lage einer Fläche 206
heißt senkrecht auf der Fläche, wenn sie senkrecht steht auf jeder Verrückung, welche in der gleichen Lage der Fläche angehört.

Folgerung 1. In jeder Lage einer Fläche gibt es stets 207
eine, und im allgemeinen nur eine Richtung, welche senkrecht auf der Fläche steht.

Folgerung 2. In jeder Lage einer Fläche ist stets eine, 208
und im allgemeinen nur eine geradeste Bahn auf der Fläche senkrecht zu errichten möglich.

Definition 1. Schar von Flächen nennen wir eine Ge- 209
samtheit von Flächen, deren Gleichungen (**200**) sich nur unterscheiden durch den Wert einer in ihnen vorkommenden Konstanten.

Bezeichnung. Jede Schar von Flächen kann analytisch 210
dargestellt werden durch eine Gleichung der Form:

$$R = \text{constans} \quad ,$$

welche nämlich erhalten wird durch Auflösung der Gleichung einer der Flächen nach der variierenden Konstanten, und in welcher die rechte Seite die möglichen Werte eben dieser Konstanten, die linke Seite aber eine Funktion der Koordinaten p_ϱ bezeichnet. Jeder Fläche jener Schar entspricht ein bestimmter Wert der rechts stehenden Konstanten, also ein bestimmter Wert der Funktion R. Solche Flächen, für welche die Werte der Funktion R nur unendlich kleine Unterschiede dR zeigen, nennen wir Nachbarflächen.

Definition 2. Senkrechte Trajektorie einer Schar von 211
Flächen nennen wir eine Bahn, welche die Schar senkrecht durchschneidet, d. h. welche auf jeder Fläche der Schar in den gemeinsamen Lagen (**202**) senkrecht steht.

212 **Lehrsatz.** Damit eine Bahn senkrechte Trajektorie der Schar

a) $$R = \text{constans}$$

sei, ist hinreichende und notwendige Bedingung, daß sie in jeder ihrer Lagen r Gleichungen der Form

b) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho = f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho}$$

genüge, in welchen die $s{,}p_\varrho$ die Neigungen der Bahn gegen die Koordinaten p_ϱ bezeichnen, und in welchen f eine für alle r Gleichungen identische, übrigens mit der Lage sich ändernde Funktion der p_ϱ ist.

Wir konstruieren von der betrachteten Lage der Bahn aus eine unendlich kleine Verrückung, deren Länge $\delta\sigma$ sei, bei deren Durchlaufung sich die p_ϱ um δp_ϱ und R um δR ändern möge, welche endlich mit der betrachteten Bahn den Winkel $s{,}\sigma$ bilden möge. Multiplizieren wir die Gleichungen **b)** der Reihe nach mit den δp_ϱ und addieren, so folgt (**78a** und **85**):

c) $$\delta\sigma \cos s{,}\sigma = \sum_1^r {}_\varrho f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \delta p_\varrho = f \delta R \quad .$$

Gehört nun die Verrückung $\delta\sigma$ einer Fläche der Schar **a)** an, nämlich derjenigen Fläche, welche die betrachtete Lage mit der Bahn gemeinsam hat, so ist $\delta R = 0$, also $s{,}\sigma = 90^0$. Die Richtung der Bahn steht daher senkrecht auf der durchschnittenen Fläche (**206**), und die Gleichungen **b)** bilden die hinreichenden Bedingungen dafür, daß dies in jeder Lage eintrete. Sie bilden aber auch die notwendigen Bedingungen hierfür, da, von Ausnahmefällen abgesehen, in jeder Lage nur eine einzige Richtung der gestellten Forderung genügt.

213 **Zusatz 1.** Der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen der betrachteten Schar in irgend einer Lage ist gleich

$$f dR \quad .$$

Denn lassen wir die Verrückung $\delta\sigma$ des vorigen Beweises nach Richtung und Länge jetzt zusammenfallen mit dem Teil der senkrechten Trajektorie, welcher zwischen beiden Flächen liegt, so fällt $\delta\sigma$ zusammen mit dem betrachteten Abstand, der Winkel s,σ aber wird Null, und so folgt aus Gleichung **212c** die Behauptung.

Zusatz 2. Die in den Gleichungen der senkrechten Trajektorien auftretende Funktion f wird erhalten als Wurzel der Gleichung: 214

$$\frac{1}{f^2} = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir die Werte der r Richtungscosinus nach **212b** einsetzen in die Gleichung 88, welcher sie genügen müssen. Welche Wurzel zu wählen sei, hängt davon ab, ob wir die Richtung der Trajektorie nach wachsenden Werten von R oder nach abnehmenden als positiv rechnen.

2. Geradeste Entfernung.

Definition. Geradeste Entfernung zweier Lagen eines holonomen Systems heißt die Länge einer sie verbindenden geradesten Bahn. 215

Anmerkung. Zwei Lagen können mehr als eine geradeste Entfernung haben. Unter diesen finden sich die Längen der kürzesten Bahnen zwischen beiden Lagen, also auch die Länge der absolut kürzesten Bahn. Wenn von der geradesten Entfernung zweier Lagen als einer eindeutig bestimmten gesprochen wird, so soll von dieser letzteren die Rede sein. 216

Analytische Darstellung. Die geradeste Entfernung zweier Lagen kann als Funktion der Koordinaten dieser Lagen dargestellt werden. Diejenige Lage, welche als Ausgangslage betrachtet wird, werde dauernd mit 0, ihre Koordinaten mit $p_{\varrho 0}$ bezeichnet; diejenige Lage, welche als Endlage betrachtet 217 wird, werde dauernd mit 1, ihre Koordinaten mit p_{ϱ_1} bezeichnet, so daß die Richtung der geradesten Bahn stets positiv gerechnet ist von 0 gegen 1. Die geradeste Entfernung ist alsdann eine für alle Wertsysteme der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} definierte Funktion dieser $2r$. Größen. Den analytischen Ausdruck der geradesten Entfernung, ausgedrückt in eben diesen Variabelen, bezeichnen wir durch S, und nennen diesen analytischen Ausdruck auch kurz die geradeste Entfernung des Systems.

218 **Anmerkung 1.** Die Funktion S ist im allgemeinen eine mehrdeutige Funktion ihrer Unabhängigen. Von den Zweigen dieser Funktion verschwindet einer und nur einer zugleich mit verschwindendem Unterschiede zwischen den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}. Von diesem Zweig ist (**216**) die Rede in solchen Aussagen, in welchen von S als von einer eindeutig bestimmten Funktion gesprochen wird.

219 **Anmerkung 2.** Die Funktion S ist symmetrisch in Hinsicht der p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} in dem Sinne, daß S seinen Wert nicht ändert, wenn die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} für alle Werte des ϱ gleichzeitig miteinander vertauscht werden.

Denn mit dieser Vertauschung vertauschen wir nur die Anfangs- und die Endlage.

220 **Bemerkung.** Wenn die geradeste Entfernung eines Systems in irgend welchen freien Koordinaten desselben gegeben ist, so sind damit die sämtlichen geradesten Bahnen des Systems in eben diesen Koordinaten gegeben, ohne daß eine weitere Kenntnis darüber nötig wäre, in welcher Weise die Lage der einzelnen materiellen Punkte des Systems von jenen Koordinaten abhängt.

Denn die geradeste Entfernung irgend zweier unendlich benachbarter Lagen des Systems ist zugleich die Länge der unendlich kleinen Verrückung zwischen ihnen; läßt sich aber diese letztere durch die gewählten Koordinaten darstellen, so trifft die Behauptung zu nach **163**.

221 **Aufgabe.** Aus der geradesten Entfernung eines Systems den Ausdruck für die Länge seiner unendlich kleinen Verrückungen abzuleiten.

In S setzen wir für die p_{ϱ_0} jetzt p_ϱ, für die p_{ϱ_1} jetzt $p_\varrho + dp_\varrho$, und lassen alsdann die dp_ϱ sehr klein werden. Wir wissen bereits (**57d**), daß sich alsdann die Entfernung der beiden Lagen als Quadratwurzel einer homogenen quadratischen Funktion der dp_ϱ darstellt. S selbst läßt sich also nicht in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der dp_ϱ entwickeln, wohl aber S^2, und in dieser Entwickelung müssen die quadratischen Glieder die ersten sein, welche nicht verschwinden. Drücken wir also durch einen übergesetzten Strich aus, daß in der betreffenden Funktion die $p_{\varrho_0} = p_{\varrho_1} = p_\varrho$ gesetzt werden sollen, so erhalten wir für die Entfernung der beiden Lagen, also für die Größe der Verrückung:

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_1} \partial p_{\sigma_1}}} \, dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und es wird also die Funktion $a_{\varrho\sigma}$:

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_1} \partial p_{\sigma_1}}} \quad .$$

Mit gleichem Rechte wird auch erhalten:

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_0} \partial p_{\sigma_0}}} \quad .$$

Diese Werte der $a_{\varrho\sigma}$ kann man benutzen, um indirekt von der Funktion S zu den geradesten Bahnen zu gelangen. Die folgenden Lehrsätze bieten einen direkteren Weg zu dem gleichen Ziele dar.

Lehrsatz. Eine Fläche, deren sämtliche Lagen gleiche 222
geradeste Entfernung haben von einer festen Lage, wird senkrecht durchschnitten von allen geradesten Bahnen, welche durch jene feste Lage gehen.

Es seien die p_{ϱ_0} die Koordinaten der festen Lage, die p_{ϱ_1} die Koordinaten einer Lage der Fläche. Wir gehen von der letzteren zu einer anderen Lage der Fläche über, für welche die p_{ϱ_1} sich geändert haben um dp_{ϱ_1}. Dabei hat sich die geradeste Entfernung von der festen Lage 0 nach der Voraussetzung um Nichts geändert; nach **199** aber hat sie sich geändert um $\sum_1^r \varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} dp_{\varrho_1}$, wenn s,p_{ϱ_1} den Winkel bezeichnet, welchen die geradeste Bahn in 1 mit der Richtung von p_ϱ bildet. Es ist also:

$$\sum_1^r \varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} dp_{\varrho_1} = 0 \quad ,$$

und diese Gleichung sagt aus, daß die geradeste Bahn auf der Verrückung der dp_{ϱ_1} senkrecht steht (**85** und **78a**). Da dies gilt für jede beliebige Verrückung, welche in 1 der Fläche angehört, so folgt (**206**) die Behauptung.

223 **Folgerung 1.** Die geradesten Bahnen, welche durch eine feste Lage hindurch gehen, sind die senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche der Bedingung genügen, daß die sämtlichen Lagen einer jeden gleiche geradeste Entfernung von jener festen Lage haben.

224 **Folgerung 2.** Die sämtlichen geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage 0 hindurch gehen, genügen den r Gleichungen:

a) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s.p_{\varrho_1} = \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

in welchen die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der variabelen Lage der Bahn und die $\cos s,p_{\varrho_1}$ als die Richtungscosinus der Bahn in dieser Lage zu betrachten sind.

Denn die Gleichungen **a)** sind die Gleichungen der senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche durch die Gleichung

b) $$S = \text{constans}$$

dargestellt wird. Wäre nämlich S eine beliebige Funktion der variabelen Koordinaten p_{ϱ_1}, so wären nach **212** die Gleichungen der senkrechten Trajektorien:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} = f \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \tag{c}$$

und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen wäre gleich fdS. Nach der besonderen Natur unserer Funktion S (**217**, **222**) ist aber dieser Abstand gleich dS selbst, also folgt

$$f = 1 \quad , \tag{d}$$

und die allgemeinen Gleichungen **c)** nehmen die besondere Form **a)** an.

Anmerkung 1. Die Gleichungen **224a**, welche Differentialgleichungen erster Ordnung sind, können auch angesehen werden als die Gleichungen geradester Bahnen in endlicher Form, sobald wir nämlich in denselben die p_{ϱ_0} als die Variabelen, die $2r$ Größen p_{ϱ_1} und s,p_{ϱ_1} aber als Konstanten betrachten. **225**

Denn bestimmen wir aus jenen Gleichungen eine Reihe von Lagen 0 in solcher Weise, daß bei festgehaltenen Werten der p_{ϱ_1} auch die Werte der s,p_{ϱ_1} unverändert bleiben, so erhalten wir solche Lagen 0, von welchen aus die nach der Lage 1 gezogenen geradesten Bahnen in dieser Lage 1 eine feste Richtung haben. Da nun aber nur eine einzige geradeste Bahn von dieser Eigenschaft möglich ist, so müssen alle so bestimmten Lagen 0 dieser einen Bahn angehören, ihre Gesamtheit bildet diese Bahn, und diese letztere wird also selbst dargestellt durch die Gleichungen **224a**.

Anmerkung 2. Im Beweise des Lehrsatzes **222** hätten wir mit gleichem Rechte die Lage 1 als die feste, die Lage 0 als die variabele Lage einführen können. Anstatt zu den Gleichungen **224a** wären wir alsdann gelangt zu den Gleichungen: **226**

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s,p_{\varrho_0} = -\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \tag{a}$$

Der Unterschied im Vorzeichen der rechten Seite erklärt sich daraus, daß nunmehr das Fortschreiten von der festen Lage aus nach **217** als Fortschreiten in negativer Richtung zu bezeichnen ist. Wie die Gleichungen **224a** stellen auch die Gleichungen **226a** geradeste Bahnen dar. Es sind Differentialgleichungen erster Ordnung aller geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage der p_{ϱ_1} hindurchgehen, und zugleich die endlichen Gleichungen der einen bestimmten Bahn, welche durch die Lage der p_{ϱ_0} hindurchgeht und in dieser mit den Koordinaten die Winkel s,p_{ϱ_0} bildet.

227 **Folgerung 3.** Die geradeste Entfernung S eines Systems genügt als Funktion der p_{ϱ_0} der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

a) $$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_0}} = 1 \quad ,$$

und ebenso als Funktion der p_{ϱ_1} der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

b) $$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_1}} = 1 \quad .$$

Denn beide Gleichungen folgen aus **214** und **224d**; sie werden auch unmittelbar erhalten, indem man die Richtungscosinus einer geradesten Bahn, ausgedrückt durch S nach **224a** oder **226a**, einsetzt in die Gleichung **88**, welcher die Winkel einer jeden beliebigen Richtung mit den Koordinaten genügen.

228 **Lehrsatz.** Errichtet man in allen Lagen einer beliebigen Fläche geradeste Bahnen senkrecht zur Fläche, und trägt auf allen die gleiche Länge ab, so wird die so erhaltene neue Fläche von jenen geradesten Bahnen ebenfalls senkrecht durchschnitten.

Die Lagen der ursprünglichen Fläche seien mit 0, die der neu konstruierten mit 1 bezeichnet. Es seien die s,p_{ϱ_0} bez. s,p_{ϱ_1} die Winkel, welche eine bestimmte der geradesten Bahnen an der ersten bez. an der zweiten Fläche mit den

Koordinaten bildet. Gehen wir von dieser geradesten Bahn zu irgend einer benachbarten über, so ändert sich die Länge der Bahn nach 199 um

$$\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1}\, dp_{\varrho_1} - \sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s,p_{\varrho_0}\, dp_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn die dp_{ϱ_1} und dp_{ϱ_0} die Änderungen der p_ϱ in den Lagen 1 und 0 bezeichnen. Nach der Konstruktion ist aber diese Änderung gleich Null, und ebenso ist nach der Konstruktion

$$\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s,p_{\varrho_0}\, dp_{\varrho_0} = 0 \quad ,$$

da ja die Bahn auf der ursprünglichen Fläche senkrecht steht. Daher ist nun auch

$$\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1}\, dp_{\varrho_1} = 0 \quad ,$$

und da die dp_{ϱ_1} jede beliebige Verrückung in der Fläche der Lagen 1 bezeichnen können, so ist damit die Behauptung erwiesen.

Folgerung 1. Die senkrechten Trajektorien einer be- 229
liebigen Schar von Flächen, von welchen jede in allen ihren Lagen denselben senkrechten geradesten Abstand von ihren Nachbarflächen hat, sind geradeste Bahnen.

Folgerung 2. Ist R eine Funktion der r Koordinaten 230
p_ϱ von solcher Beschaffenheit, daß die Gleichung

$$R = \text{constans} \qquad \textbf{a)}$$

eine Schar von Flächen darstellt, deren jede von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand dR hat, so sind die Gleichungen:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \qquad \textbf{b)}$$

die Gleichungen der senkrechten Trajektorien, also die Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind diese Gleichungen Differentialgleichungen erster Ordnung für jene Bahnen.

Denn wäre R eine ganz beliebige Funktion der p_ϱ, so stellten die Gleichungen **212b** die senkrechten Trajektorien der Schar **a)** vor, und es wäre nach **213** der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen gleich $f dR$. Nach unserer besonderen Voraussetzung ist aber dieser Abstand konstant und gleich dR, also ist $f = 1$, und es gehen daher die Gleichungen **212b** in die obigen Gleichungen **b)** über.

231 **Folgerung 3.** Stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, daß jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand dR hat, so genügt die Funktion R der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt aus **214** und **230**; sie wird auch unmittelbar erhalten, wenn wir die Richtungscosinus einer geradesten Bahn nach **230b** einsetzen in die Gleichung **88**, welcher die Winkel einer jeden Richtung mit den Koordinaten genügen.

232 **Lehrsatz 1.** (**Umkehrung von 231.**) Genügt die Funktion R der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

so stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, daß jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen gleichen senkrechten geradesten Abstand hat, und zwar einen Abstand, welcher durch die Änderung von R gemessen wird.

Denn wäre R eine ganz beliebige Funktion, so wären die senkrechten Trajektorien der Schar gegeben durch Gleichungen der Form **212b**, und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen in jeder Lage wäre $f dR$. Aus der besonderen Voraussetzung, welcher wir die Funktion R unterwarfen, folgt aber nach **214**: $f = 1$, und also die Behauptung.

Lehrsatz 2. Ist die Funktion R der p_ϱ eine beliebige 233
Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad , \qquad \textbf{a)}$$

so sind die Gleichungen

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s, p_\varrho = \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \qquad \textbf{b)}$$

Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind es Differentialgleichungen erster Ordnung der durch sie dargestellten geradesten Bahnen.

Der Satz folgt unmittelbar aus **230** und **232**.

Anmerkung. Obwohl jede Bahn, welche durch die Gleich- 234
ungen **233b** dargestellt wird, eine geradeste ist, so läßt sich doch nicht umgekehrt allgemein jede geradeste Bahn in dieser Form darstellen. Die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen, welche in der gegebenen Form enthalten sind, hängt vielmehr ab von der Mannigfaltigkeit, welche die Funktion R als Lösung der Differentialgleichung besitzt, d. h. von der Zahl ihrer willkürlichen Konstanten.

Ist aber im besondern R eine vollständige Lösung, enthält also R r willkürliche Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots . \alpha_{r-1}$, von welchen die erste die notwendig vorhandene additive Konstante bezeichne, so lassen sich alle geradesten Bahnen des Systems in der Form **233b** darstellen. Denn die rechten Seiten dieser r Gleichungen (von welchen nur $r-1$ unabhängig voneinander sind) enthalten dann $r-1$ Konstanten, welche hinreichen, um der dargestellten Bahn in einer willkürlichen Lage eine durch $r-1$ unabhängige Richtungscosinus bestimmte willkürliche Richtung zu erteilen. Können wir aber eine Lage der dargestellten Bahn und ihre Richtung in dieser Lage willkürlich wählen, so können wir alle geradesten Bahnen darstellen.

235 **Lehrsatz 3.** (Jacobis Satz.) Es bezeichne R eine vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$\text{a)} \qquad \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

und es seien ihre willkürlichen Konstanten, von der additiven abgesehen, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{r-1}$. Es geben alsdann die $r-1$ Gleichungen

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial R}{\partial \alpha_\tau} = \beta_\tau \quad ,$$

in welchen die β_τ $r-1$ neue willkürliche Konstanten sind, die Gleichungen der geradesten Bahnen des Systems in endlicher Form.

Zum Beweise zeigen wir, daß die Bahnen, welche durch die Gleichungen **b)** dargestellt werden, senkrechte Trajektorien der Schar

$$\text{c)} \qquad R = \text{constans}$$

sind; alsdann folgt die Behauptung nach **232** und **229**.

Um nun erstens die Richtung der dargestellten Bahn zu finden, differentiieren wir die Gleichungen **b)** in Richtung derselben, d. h. wir bilden jene Gleichungen für zwei um ds entfernte Lagen der Bahn, in welchen sich die p_ϱ um die dp_ϱ unterscheiden, subtrahieren, und dividieren durch ds. Wir erhalten so $r-1$ Gleichungen der Form:

$$\sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} \frac{dp_\sigma}{ds} = 0 \quad ,$$

oder, wenn wir in dieselben nach **79** und **78** die Richtungs- (235)
cosinus des betrachteten Bahnelementes einführen:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \qquad \mathbf{d)}$$

welche Gleichungen nunmehr $r-1$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r-1$ Verhältnisse der Richtungscosinus untereinander bleiben.

Zweitens bemerken wir, daß die Gleichung **a)** für alle Werte der Konstanten α_τ gilt; wir können sie also nach diesen Größen differentiieren, und indem wir dies tun, erhalten wir $r-1$ Gleichungen, welche sich schreiben lassen in der Form:

$$\sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \qquad \mathbf{e)}$$

und welche Beziehungen darstellen, welchen die partiellen Differentialquotienten von R zufolge unserer besonderen Voraussetzungen über diese Funktion genügen müssen.

Stellen wir nun die Gleichungen **b)** für die gerade betrachteten Werte der α_τ und β_τ überhaupt eine bestimmte Bahn vor, so müssen aus den Gleichungen **d)** eindeutig bestimmte Werte für die Verhältnisse der Richtungscosinus zu einem unter ihnen folgen. Ganz dieselben eindeutig bestimmten Werte müssen dann aber auch aus den Gleichungen **e)** für die Verhältnisse der Größen $\partial R / \partial p_\varrho$ zu einer unter ihnen sich ergeben. Ist also f ein noch zu bestimmender Faktor, so muß sein:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho = f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Demnach ist nach **212** die betrachtete Bahn die senkrechte Trajektorie der Schar **c)**, was wir beweisen wollten. Der Faktor f wird gleich der Einheit gefunden.

Die Voraussetzung, daß die $r-1$ Gleichungen **b)** für bestimmte Werte der α_τ und β_τ eine bestimmte Bahn bezeichnen, würde nur dann nicht zutreffen, wenn diese Gleichungen nicht unabhängig voneinander wären. Dann aber wären auch die willkürlichen Konstanten nicht voneinander unabhängig und die Lösung wäre keine vollständige Lösung, was wir doch voraussetzten.

236 **Aufgabe.** Aus einer beliebigen vollständigen Lösung R der Differentialgleichung **235a** die geradeste Entfernung S des Systems zu ermitteln.

Unter S ist also wieder zu verstehen die geradeste Entfernung zweier Lagen 0 und 1 mit den Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1}. In den $r-1$ Gleichungen **235b** setzen wir für die p_ϱ das eine Mal die p_{ϱ_0}, das andere Mal die p_{ϱ_1}. Aus den entstehenden $2r-2$ Gleichungen eliminieren wir die β_τ und stellen die α_τ als Funktionen der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} dar. Diese Funktionen werden symmetrisch in bezug auf p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1}, sie geben diejenigen Werte, welche die α_τ haben müssen, damit die durch sie bezeichneten Bahnen durch bestimmte Lagen 0 und 1 hindurchgehen.

Wir haben nun erstens für irgend eine Lage 1 nach **224a** und **233b**:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} = \left(\frac{\partial R}{\partial p_\varrho}\right)_1$$

und zweitens für irgend eine Lage 0 nach **226a** und **233b**:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} = -\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varrho}\right)_0 .$$

Setzen wir in den rechten Seiten dieser Gleichungen für die α_τ ihre Werte in den p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ein, und die p_ϱ selbst in der ersten gleich p_{ϱ_1}, in der zweiten gleich p_{ϱ_0}, so erhalten wir die ersten Differentialquotienten von S nach den sämtlichen unabhängigen Variabelen ausgedrückt als Funktionen dieser Variabelen. S kann also dann durch einfache Integrationen gefunden werden.

Abschnitt 7. Kinematische Begriffe.

I. Vektorgrößen in bezug auf ein System.

Definition. Vektorgröße in bezug auf ein System heißt jede Größe, welche zu dem System in Beziehung steht, und welche dieselbe Art der mathematischen Mannigfaltigkeit hat, wie eine denkbare Verrückung des Systems. 237

Bemerkungen dazu.

1. Eine Verrückung eines Systems ist selbst eine Vektorgröße in bezug auf das System. Jedes Produkt einer Verrückung des Systems mit irgend welchen nicht gerichteten Größen ist eine Vektorgröße in bezug auf das System. 238

2. Jede Vektorgröße in bezug auf ein System kann geometrisch dargestellt werden durch eine denkbare Verrückung des Systems. Die Richtung der sie darstellenden Verrückung nennen wir auch die Richtung der Vektorgröße. Der Maßstab der Darstellung kann und soll stets so gewählt werden, daß die darstellende Verrückung unendlich klein wird. Jeder Vektor in bezug auf ein System, welcher sich mit der Lage des Systems ändert, kann alsdann dargestellt werden als eine unendlich kleine Verrückung des Systems aus der Lage, zu welcher sein augenblicklicher Wert gehört. 239

3. Eine Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen materiellen Punkt ist ein Vektor im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Jeder Vektor in bezug auf einen Punkt kann dargestellt werden durch eine geometrische Verrückung des Punktes, insbesondere durch eine unendlich kleine Verrückung aus seiner gegenwärtigen Lage. 240

4. Unter Komponenten und reduzierten Komponenten eines Vektors sind diejenigen Vektoren gleicher Art verstanden, welche dargestellt sind durch die Komponenten und reduzierten 241

Komponenten derjenigen unendlich kleinen Verrückung, welche den ursprünglichen Vektor darstellt (**48**, **71**).

Die reduzierte Komponente eines bestimmten Vektors in Richtung einer Koordinate p_ϱ nennen wir wiederum kurz die Komponente des Vektors nach p_ϱ, oder noch kürzer den Vektor nach der Koordinate p_ϱ.

Wo es ohne Mißverständnis geschehen kann, wird mit Komponente oder reduzierte Komponente kurz die Größe dieser Komponenten bezeichnet.

242 **Aufgabe 1a.** Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den $3n$ rechtwinkligen Koordinaten die Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ abzuleiten.

Sind die $d\bar{x}_\nu$ die Komponenten nach den x_ν derjenigen Verrückung, welche die Vektorgröße darstellt, und sind die $d\bar{p}_\varrho$ die Komponenten derselben Verrückung nach den p_ϱ, so sind nach **80** die $d\bar{p}_\varrho$ durch die $d\bar{x}_\nu$ gegeben. Den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{x}_\nu$ aber sind die k_ϱ und h_ν beziehlich proportional, also ist

$$k_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho} h_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} h_\nu \quad .$$

243 **Aufgabe 1b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponenten h_ν des Vektors nach den rechtwinkligen Koordinaten abzuleiten.

Die Gleichungen **242** geben nur r Gleichungen für die $3n$ Größen h_ν, aus welchen sich diese letzteren also nicht bestimmen lassen. In der Tat ist auch die Aufgabe im allgemeinen unbestimmt. Denn nicht alle denkbaren Lagen und Verrückungen eines Systems lassen sich durch die p_ϱ ausdrücken, sondern nur ein Teil derselben, unter diesen die möglichen Verrückungen.

Nur in dem Falle also, daß der gegebene Vektor einer Verrückung parallel ist, welche sich durch die p_ϱ und ihre Änderungen darstellen läßt, ist die Aufgabe lösbar; in diesem Falle aber ist nach **81**

$$h_\nu = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho} k_\varrho \quad .$$

Aufgabe 2a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors 244
nach den rechtwinkligen Koordinaten seine Größe h zu bestimmen.

Unter Benutzung von 83 erhält man:

$$h^2 = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \frac{m}{m_\nu} h_\nu \quad .$$

Aufgabe 2b. Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors 245
nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ seine Größe k zu bestimmen.

Die Aufgabe ist wiederum im allgemeinen unbestimmt wie 243.

Nur in dem Falle, daß außer den Komponenten k_ϱ noch die Tatsache bekannt gegeben ist, daß der fragliche Vektor einer durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung parallel ist, ist k durch die k_ϱ bestimmt, und in diesem Falle ist nach 82

$$k^2 = \sum_{1}^{r}{}_{\varrho} \sum_{1}^{r}{}_{\sigma} b_{\varrho\sigma} k_\varrho k_\sigma \quad .$$

Aufgabe 3a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors 246
nach den x_ν die Komponente des Vektors in Richtung einer beliebigen Verrückung ds zu finden.

Ist ds' die Länge, und sind die $d\bar{x}'_\nu$ die reduzierten Komponenten der Verrückung, durch welche wir den Vektor darstellen, so ist die Komponente dieser Verrückung in Richtung von ds nach 48 und 84:

$$ds' \cos s,s' = \frac{1}{ds} \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} dx_\nu \, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Verhältnis zwischen der Größe des Vektors und der Länge der Verrückung, durch welche wir ihn darstellen, so erhalten wir links die gesuchte Komponente; rechts treten an Stelle der $d\bar{x}'_\nu$ die h_ν, und wir erhalten also als Lösung der Aufgabe die gesuchte Größe gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, h_\nu \frac{dx_\nu}{ds}$$

oder nach **72** gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \sqrt{\frac{m}{m_\nu}}\, h_\nu \cos s{,}x_\nu \quad .$$

247 **Aufgabe 3b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponente des Vektors in der Richtung einer beliebigen durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung ds zu bestimmen.

Wenden wir dieselbe Überlegung an, wie in der vorigen Aufgabe, so folgt nach **48** und **85** die gesuchte Größe gleich:

$$\sum_1^{r} {}_\varrho\, k_\varrho \frac{dp_\varrho}{ds}$$

oder nach **78** und **79** gleich:

$$\sum_1^{r} {}_\varrho \sum_1^{r} {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, k_\varrho \sqrt{a_{\sigma\sigma}} \cos s{,}p_\sigma \quad .$$

248 **Anmerkung.** Obwohl also durch die Größen k_ϱ im allgemeinen nicht alle beliebigen Komponenten eines Vektors bestimmt sind, so sind doch durch jene Größen die Komponenten des Vektors in allen solchen Richtungen bestimmt, welche sich durch die p_ϱ darstellen lassen, also in jeder möglichen Richtung.

249 **Lehrsatz 1.** Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_ϱ die Größen k_ϱ sind, senkrecht stehe auf einer Verrückung, für welche die p_ϱ die Änderungen dp_ϱ erleiden, ist notwendige und hinreichende Bedingung die Erfüllung der Gleichung:

$$\sum_1^{r} {}_\varrho\, k_\varrho\, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Dies folgt aus **85**, wenn wir die k_ϱ den $d\bar{p}'_\varrho$ proportional annehmen.

Lehrsatz 2. Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_ϱ die k_ϱ sind, senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems, ist notwendige und hinreichende Bedingung, daß sich die r Größen k_ϱ darstellen lassen in der Form: 250

$$k_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

in welcher die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems entnommen (**130**) und die $\gamma_\varkappa$ k frei zu bestimmende Größen sind.

Dies folgt aus **148** und **150**, wenn wir die k_ϱ durch die $d\bar{p}_\varrho$ dargestellt annehmen.

Bemerkung 1. Vektoren in bezug auf ein und dasselbe System können zusammengesetzt und zerlegt werden wie die denkbaren Verrückungen des Systems. 251

Die Zusammensetzung von Vektoren in bezug auf dasselbe System erfolgt also nach den Regeln der algebraischen Addition (**52**).

Bemerkung 2. Vektoren in bezug auf verschiedene Systeme sind zu betrachten als Größen verschiedener Art; sie können nicht zusammengesetzt, noch addiert werden. 252

Bemerkung 3. Eine Vektorgröße in bezug auf ein gewisses System kann betrachtet werden als eine Vektorgröße in bezug auf jedes größere System, von welchem das ursprüngliche einen Teil bildet. 253

Aufgabe 1. Dieselbe Vektorgröße werde einmal betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröße in bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten h_ν nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν im ersten Falle sollen die Komponenten h'_ν nach den entsprechenden Koordinaten x'_ν im zweiten Falle berechnet werden. 254

Es sei die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Die Koordinaten x_ν des Teilsystems sind zugleich Koordinaten des vollständigen Systems, nur um der verschiedenen Auffassung willen sind sie als solche mit x'_ν bezeichnet. Erteilen wir daher dem Teilsystem eine beliebige

Verrückung, welche eo ipso zugleich eine Verrückung des vollständigen Systems ist, so ist $dx'_\nu = dx_\nu$ für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen $dx'_\nu = 0$ ist. Nun ist nach **73**: $m'd\bar{x}'_\nu = m_\nu dx'_\nu$ und $m d\bar{x}_\nu = m_\nu dx_\nu$, also ist $m'd\bar{x}'_\nu = m d\bar{x}_\nu$. Für einen Vektor, welcher durch jene Verrückung dargestellt wird, ist die Komponente nach x_ν mit $d\bar{x}_\nu$, die nach x'_ν mit $d\bar{x}'_\nu$ porportional. Als Lösung der Aufgabe erhalten wir also:

$$m'h'_\nu = m\,h_\nu$$

für diejenigen ν, welche beiden Systemen gemeinsam sind, während für die übrigen

$$h'_\nu = 0 \qquad \text{ist.}$$

255 **Aufgabe 2.** Dieselbe Vektorgröße werde einmal betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröße in bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ im ersten Falle die Komponenten k'_ϱ nach den entsprechenden Koordinaten p'_ϱ im zweiten zu bestimmen.

Es sei wieder die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Wir setzen voraus, daß die Koordinaten p_ϱ des Teilsystems zugleich Koordinaten des vollständigen Systems sind und nur um der verschiedenen Auffassung willen im letzteren Falle mit p'_ϱ bezeichnet werden. Von den nicht gemeinsamen p'_ϱ setzen wir voraus, daß sie nicht Koordinaten des Teilsystems seien. Unter diesen Voraussetzungen ergibt eine der vorigen (**254**) analoge Betrachtung als Lösung der Aufgabe:

$$m'\,k'_\varrho = m\,k_\varrho$$

für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen

$$k'_\varrho = 0 \qquad \text{ist.}$$

Ohne die gemachten Voraussetzungen aber ist die Aufgabe unbestimmt.

2. Bewegung der Systeme.

Erläuterungen.

1. Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus einer Anfangslage in eine Endlage, betrachtet unter Berücksichtigung der Zeit und der Art des Überganges, heißt eine Bewegung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage (vgl. **27**). 256

Bei einer jeden bestimmten Bewegung durchläuft also das System eine bestimmte Bahn, und zwar hat es in bestimmten Zeiten bestimmte Längen derselben durchlaufen.

2. Jede Bewegung eines Systems durch eine denkbare Bahn heißt eine denkbare Bewegung eines Systems (**11**). 257

3. Jede Bewegung eines Systems durch eine mögliche Bahn heißt eine mögliche Bewegung des Systems (**112**). 258

4. Die Kinematik oder reine Bewegungslehre handelt von den denkbaren und den möglichen Bewegungen der Systeme. 259

Solange es sich um die Betrachtung gesetzmäßiger Systeme (**119**, **120**) handelt, fallen die Betrachtungen der Kinematik mit denen der Geometrie fast zusammen. Erst wenn es sich um ungesetzmäßige Systeme handelt und also die Zeit in die Bedingungsgleichungen der Systeme eintritt, gewinnt die Kinematik vor der Geometrie größere Mannigfaltigkeit. Wir haben indessen nicht nötig, auf eigentlich kinematische Betrachtungen einzugehen, sondern dürfen uns hier mit der Erörterung einer Anzahl von Grundbegriffen begnügen.

Analytische Darstellung. Die Bewegung eines Systems wird analytisch dargestellt, indem bei Darstellung der beschriebenen Bahn die Zeit t als unabhängige Variabele benutzt wird, oder, was dasselbe ist, indem die Koordinaten der Lage des Systems als Funktionen der Zeit angegeben werden. 260

Die Differentialquotienten aller Größen nach der Zeit bezeichnen wir nach Newtons Weise durch übergesetzte Punkte.

Geschwindigkeit.

261 **Definition 1.** Die augenblickliche Bewegungsart eines Systems heißt die Geschwindigkeit des Systems.

Die Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Änderung, welche die Lage des Systems in einer unendlich kleinen Zeit erleidet und durch diese Zeit selbst. Sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

Lage und Geschwindigkeit eines Systems zusammen nennen wir den Zustand des Systems.

262 **Folgerung.** Die Geschwindigkeit eines Systems kann betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Die Richtung der Geschwindigkeit ist alsdann die Richtung des augenblicklichen Bahnelements, die Größe der Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten der zurückgelegten Bahnstrecke nach der Zeit.

Die Größe der Geschwindigkeit heißt auch die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, oder, wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, die Geschwindigkeit schlechthin.

263 **Definition 2.** Eine Bewegung eines Systems, bei welcher die Geschwindigkeit ihre Größe nicht ändert, heißt eine gleichförmige Bewegung.

264 **Anmerkung.** Gerade Bewegung eines Systems ist eine Bewegung in gerader Bahn. Bei einer solchen Bewegung ändert die Geschwindigkeit ihre Richtung nicht.

265 **Aufgabe 1.** Die Größe der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Die Größe v der Geschwindigkeit ist gegeben durch die positive Wurzel der Gleichung (55):

$$m v^2 = m \frac{ds^2}{dt^2} = \sum_1^{3n}{}_\nu \, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

Danach (**241**) sind die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der x_ν gleich

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\dot{x}_\nu \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in der gleichen Richtung, oder die Komponenten nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\,\dot{x}_\nu \quad .$$

Anmerkung. Die Größe der Geschwindigkeit eines Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Geschwindigkeiten aller seiner Massenteilchen. **266**

Aufgabe 2. Die Größe der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ dieser Koordinaten. **267**

Durch Transformation von **265** und **57** erhalten wir die Größe der Geschwindigkeit als positive Wurzel der Gleichung:

$$v^2 = \sum_1^r{}^{\varrho} \sum_1^r{}^{\sigma}\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\varrho\,\dot{p}_\sigma \quad .$$

Danach sind (**241**) die Komponenten in der Richtung der p_ϱ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}}} \sum_1^r{}^{\sigma}\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\sigma \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in derselben Richtung, oder die Komponenten nach den p_ϱ gleich:

$$\sum_1^r{}^{\sigma}\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\sigma \quad .$$

Moment.

268 **Definition.** Das Produkt aus der Masse eines Systems in seine Geschwindigkeit heißt die Bewegungsgröße oder das Moment des Systems.

Das Moment des Systems ist also eine Vektorgröße in bezug auf das System. Die Komponenten des Moments nach irgendwelchen Koordinaten werden gewöhnlich schlechthin die Momente des Systems nach diesen Koordinaten genannt. (**241**).

269 **Bezeichnung.** Die Momente eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ sollen dauernd mit q_ϱ bezeichnet werden.

270 **Aufgabe 1.** Die Momente q_ϱ eines Systems nach den p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Aus **268** und **267** erhalten wir:

$$q_\varrho = m \sum_1^r {}_\sigma \, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad .$$

271 **Aufgabe 2.** Die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Momente des Systems nach diesen Koordinaten.

Durch Auflösung der vorigen Gleichungen erhalten wir:

$$\dot{p}_\varrho = \frac{1}{m} \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} q_\sigma \quad .$$

272 **Anmerkung.** Die Geschwindigkeit und die Bewegungsgröße eines Systems sind solche Vektoren in bezug auf das System, welche stets möglichen Verrückungen des Systems parallel sind (vergl. **243**, **245**).

Beschleunigung.

273 **Definition.** Die augenblickliche Veränderungsweise der Geschwindigkeit eines Systems heißt die Beschleunigung des Systems.

Die Beschleunigung ist bestimmt durch die Änderung, welche die Geschwindigkeit in unendlich kurzer Zeit erleidet und diese Zeit selbst; sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

Folgerung. Die Beschleunigung eines Systems kann be- 274
trachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Bilden wir von der gegenwärtigen Lage des Systems aus zwei Verrückungen, von welchen die eine die gegenwärtige Geschwindigkeit darstellt, die andere die Geschwindigkeit im nächsten Augenblick, so gibt die Differenz derselben eine neue Verrückung, deren Richtung die Richtung der Beschleunigung ist, während die Größe der Beschleunigung gleich ist dem Verhältnis der Länge jener neuen Verrückung zum Differentiale der Zeit.

Aufgabe 1. Die Größe f der Beschleunigung und ihre 275
Komponenten nach den rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Die Komponenten der Geschwindigkeit nach den x_ν, jetzt und nach der Zeit dt, sind (**265**):

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{und} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu + \frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt \quad ,$$

die Komponenten der Differenz beider also $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt$; das Verhältnis dieser zur Zeit dt gibt die Komponenten der Beschleunigung nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu \quad ,$$

woraus die Größe der Beschleunigung folgt als positive Wurzel der Gleichung (**244**):

$$mf^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_\nu^2 \quad .$$

276 **Anmerkung.** Die Größe der Beschleunigung eines materiellen Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Beschleunigungen seiner Massenteilchen.

277 **Aufgabe 2.** Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ darzustellen durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Nach **242** haben wir

$$f_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

und hierin ist einzusetzen, wie in **108**:

$$\ddot{x}_\nu = \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Indem wir dieselbe Umformung benutzen wie in **108**, erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$f_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

278 **Anmerkung 1.** Die Komponenten der Beschleunigung sind also im allgemeinen lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, quadratische Funktionen der ersten Differentialquotienten derselben, beliebig verwickelte Funktionen der Koordinaten selbst.

279 **Anmerkung 2.** Die Beschleunigung eines Systems ist nicht notwendig einer möglichen Verrückung des Systems parallel, noch auch einer Verrückung, welche sich durch die benutzten Koordinaten p_ϱ ausdrücken läßt.

Die Komponenten f_ϱ reichen daher im allgemeinen nicht aus, um die Größe der Beschleunigung, noch auch um ihre Komponenten nach sämtlichen rechtwinkligen Koordinaten zu bestimmen (**243**, **245**). Dagegen reichen die f_ϱ aus, um die Komponente der Beschleunigung in der Richtung einer jeden möglichen Bewegung des Systems zu bestimmen (**248**).

Aufgabe 3. Die Komponente der Beschleunigung in der 280
Richtung der Bahn zu finden.

Die Richtungscosinus der Bahn sind nach **72** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$, also unter Berücksichtigung von **265** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$. Hieraus folgt nach **246** unter Benutzung von **275** für die gesuchte tangentiale Komponente f_t:

$$f_t = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad ,$$

unter s die laufende Länge der Bahn verstanden.

Bemerkung. Zerlegen wir die Beschleunigung eines Systems 281
in zwei Komponenten, von denen die eine die Richtung der Bahn hat, die andere auf der Bahn senkrecht steht, so ist die Größe der letzteren gleich dem Produkt aus der Krümmung der Bahn in das Quadrat der Geschwindigkeit des Systems in der Bahn.

Indem wir in Gleichung **107c** die Zeit t als unabhängige Variabele nehmen, erhalten wir:

$$m\, v^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\, \ddot{s}^2 \quad ,$$

also unter Benutzung von **275** und **280**:

$$v^4 c^2 = f^2 - f_t^2 \quad .$$

Nennen wir nun die zweite, radiale oder centrifugale Komponente der Beschleunigung f_r, so ist, da f_r und f_t senkrecht zueinander sein sollen: $f^2 = f_r^2 + f_t^2$, also:

$$f_r = c\, v^2 \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Energie.

282 **Definition.** Das halbe Produkt aus der Masse eines Systems in das Quadrat der Größe seiner Geschwindigkeit heißt die Energie des Systems.

283 **Aufgabe 1.** Die Energie E eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Es ist nach **265**:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{3n} {}_\nu \, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

284 **Folgerung 1.** Die Energie eines Systems ist die Summe der Energieen seiner Massenteilchen.

285 **Folgerung 2.** Bilden mehrere Systeme zusammen ein größeres System, so ist die Energie des letzteren die Summe der Energieen der ersteren.

286 **Aufgabe 2.** Die Energie eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten des Systems und durch die Momente nach diesen Koordinaten.

Unter Benutzung von **267**, **270** und **271** folgt nacheinander:

a) $$E = \frac{1}{2} m \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma$$

b) $$= \frac{1}{2} \sum_1^r {}_\varrho \, q_\varrho \dot{p}_\varrho$$

c) $$= \frac{1}{2m} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} q_\varrho q_\sigma \quad .$$

287 **Anmerkung** (zu **261** bis **286**). Die Geschwindigkeit, das Moment, die Beschleunigung, die Energie eines Systems sind definiert unabhängig von der analytischen Darstellung, insbesondere also auch unabhängig von der Wahl der Koordinaten des Systems.

Benutzung partieller Differentialquotienten.

Bezeichnung. (Vergl. 90.) Mit $\partial_p E$ soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und deren Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286a**). 288

Mit $\partial_q E$ dagegen soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und die Momente q_ϱ nach diesen Koordinaten als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286c**).

Eine jede der beiden Annahmen schließt die andere aus. Mit ∂E werde, wie gewöhnlich, bezeichnet irgend eine Art des partiellen Differentials von E, also die erste Art oder die zweite, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, oder auch irgend eine dritte Art.

Bemerkung 1. Die Momente q_ϱ eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten. 289

Denn es ist nach Gleichung **286a** und **270**: (vergl. 91)

$$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 2. Die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ der Koordinaten p_ϱ eines Systems lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Momenten. 290

Denn es ist nach Gleichung **286c** und **271**: (vergl. 94)

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 3. Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen durch partielle Differentialquotienten der Energie. 291

Denn nach Gleichung **286a** ist erstens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} = m \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad ,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) = m \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad ,$$

und nach derselben Gleichung zweitens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = \frac{1}{2} m \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vergleichung mit **277** folgt:

a) $$m f_\varrho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

wofür auch geschrieben werden kann unter Berücksichtigung von **289**:

b) $$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

292 **Bemerkung 4.** Ändern wir eine Koordinate p_τ eines Systems zweimal um denselben unendlich kleinen Betrag, indem wir das eine Mal den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal den Momenten nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte lassen, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung.

Denn multipliziert man die Gleichung **95a** mit mds und dividiert durch dt^2, so liefert sie:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = - \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Lehrsatz. Erleidet die Lage eines Systems zweimal dieselbe unendlich kleine Änderung, während das eine Mal die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal die Momente nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte behalten, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung. 293

Denn die Änderung der Energie ist im ersten Falle:

$$\delta_p E = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau$$

und im zweiten Falle:

$$\delta_q E = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad ,$$

also ist nach Bemerkung 4:

$$\delta_p E = -\delta_q E \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung. Die Komponenten der Beschleunigung eines Systems nach seinen Koordinaten p_ϱ lassen sich auch darstellen in der Form: (nach **291b** und **292**) 294

$$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Schlußbemerkung zum ersten Buch.

Wie bereits in der Vorbemerkung (1) ausgesprochen wurde, ist den Überlegungen dieses Buches die Erfahrung völlig fern geblieben. Wenn wir also den gewonnenen Beziehungen in der Folge wieder begegnen, so werden wir 295 wissen, daß sie nicht der Erfahrung entstammen, sondern den gegebenen Gesetzen unserer Anschauung und unseres Denkens, zusammen mit einer Reihe willkürlicher Festsetzungen.

Es ist wahr, daß Bildung der Begriffe und Entwickelung ihrer Beziehungen nur geschahen im Hinblick auf mögliche Erfahrungen; es ist also nicht minder wahr, daß einzig die Erfahrung zu entscheiden hat über Wert oder Unwert unserer Überlegungen. Die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Überlegungen aber kann durch keine mögliche zukünftige Erfahrung weder bestätigt noch widerlegt werden.