

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

Einleitung

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

## Einleitung.

---

Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vor auszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknöthigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. Damit diese Forderung überhaupt erfüllbar sei, müssen gewisse Übereinstimmungen vorhanden sein zwischen der Natur und unserem Geiste. Die Erfahrung lehrt uns, daß die Forderung erfüllbar ist und daß also solche Übereinstimmungen in der Tat bestehen. Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir



an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äußeren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden; wir vermögen so den Tatsachen vorauseilen und können nach der gewonnenen Einsicht unsere gegenwärtigen Entschlüsse richten. — Die Bilder, von welchen wir reden, sind unsere Vorstellungen von den Dingen; sie haben mit den Dingen die eine wesentliche Übereinstimmung, welche in der Erfüllung der genannten Forderung liegt, aber es ist für ihren Zweck nicht nötig, daß sie irgend eine weitere Übereinstimmung mit den Dingen haben. In der Tat wissen wir auch nicht und haben auch kein Mittel zu erfahren, ob unsere Vorstellungen von den Dingen mit jenen in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein in eben jener einen fundamentalen Beziehung.

Eindeutig sind die Bilder, welche wir uns von den Dingen machen wollen, noch nicht bestimmt durch die Forderung, daß die Folgen der Bilder wieder die Bilder der Folgen seien. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich, und diese Bilder können sich nach verschiedenen Richtungen unterscheiden. Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich tragen, und wir fordern also zunächst, daß alle unsere Bilder logisch zulässige oder kurz zulässige seien. Unrichtig nennen wir zulässige Bilder dann, wenn ihre wesentlichen Beziehungen den Beziehungen der äußeren Dinge widersprechen, das heißt wenn sie jener ersten Grundforderung nicht genügen. Wir verlangen demnach zweitens, daß unsere Bilder richtig seien. Aber zwei zulässige und richtige Bilder derselben äußeren Gegenstände können sich noch unterscheiden nach der Zweckmäßigkeit. Von zwei Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das zweckmäßigere sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes widerspiegelt als das andere, welches, wie wir sagen wollen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von zwei Bildern dasjenige zweckmäßiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält, welches also



das einfachere ist. Ganz werden sich leere Beziehungen nicht vermeiden lassen, denn sie kommen den Bildern schon deshalb zu, weil es eben nur Bilder und zwar Bilder unseres besonderen Geistes sind und also von den Eigenschaften seiner Abbildungsweise mitbestimmt sein müssen.

Wir haben bisher die Anforderungen aufgezählt, welche wir an die Bilder selbst stellen; etwas ganz anderes sind die Anforderungen, welche wir an eine wissenschaftliche Darlegung solcher Bilder stellen. Wir verlangen von der letzteren, daß sie uns klar zum Bewußtsein führe, welche Eigenschaften den Bildern zugelegt seien um der Zulässigkeit willen, welche um der Richtigkeit willen, welche um der Zweckmäßigkeit willen. Nur so gewinnen wir die Möglichkeit an unsern Bildern zu ändern, zu bessern. Was den Bildern beigelegt wurde um der Zweckmäßigkeit willen, ist enthalten in den Bezeichnungen, Definitionen, Abkürzungen, kurzum in dem, was wir nach Willkür hinzutun oder wegnehmen können. Was den Bildern zukommt um ihrer Richtigkeit willen, ist enthalten in den Erfahrungstatsachen, welche beim Aufbau der Bilder gedient haben. Was den Bildern zukommt, damit sie zulässig seien, ist gegeben durch die Eigenschaften unseres Geistes. Ob ein Bild zulässig ist oder nicht, können wir eindeutig mit ja und nein entscheiden und zwar mit Gültigkeit unserer Entscheidung für alle Zeiten. Ob ein Bild richtig ist oder nicht, kann ebenfalls eindeutig mit ja und nein entschieden werden, aber nur nach dem Stande unserer gegenwärtigen Erfahrung und unter Zulassung der Berufung an spätere reifere Erfahrung. Ob ein Bild zweckmäßig sei oder nicht, dafür gibt es überhaupt keine eindeutige Entscheidung, sondern es können Meinungsverschiedenheiten bestehen. Das eine Bild kann nach der einen, das andere nach der andern Richtung Vorteile bieten, und nur durch allmähliches Prüfen vieler Bilder werden im Laufe der Zeit schließlich die zweckmäßigsten gewonnen.

Dies sind die Gesichtspunkte, nach welchen man, wie mir scheint, den Wert physikalischer Theorien und den Wert der Darstellung physikalischer Theorien zu beurteilen hat. Jeden-



falls sind es die Gesichtspunkte, von welchen aus wir jetzt die Darstellungen betrachten wollen, welche man von den Prinzipien der Mechanik gegeben hat. Dabei ist es freilich zunächst nötig, bestimmt zu erklären, was wir mit diesem Namen bezeichnen.

In strengem Sinne verstand man ursprünglich in der Mechanik unter einem Prinzip jede Aussage, welche man nicht wieder auf andere Sätze der Mechanik selbst zurückführte, sondern welche man als unmittelbares Ergebnis anderer Quellen der Erkenntnis angesehen wissen wollte. Es konnte infolge der geschichtlichen Entwicklung nicht ausbleiben, daß Sätze, welche unter besonderen Voraussetzungen einmal mit Recht als Prinzipien bezeichnet wurden, später diesen Namen, wiewohl mit Unrecht, beibehielten. Seit LAGRANGE ist die Bemerkung häufig wiederholt worden, daß die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen im Grunde nur Lehrsätze allgemeinen Inhalts seien. Man kann aber mit gleichem Rechte bemerken, daß auch die übrigen sogenannten Prinzipien nicht unabhängig voneinander diesen Namen führen können, sondern daß jedes von ihnen auf den Rang einer Folgerung oder eines Lehrsatzes herabsteigen muß, sobald die Darstellung der Mechanik auf eines oder mehrere der übrigen gegründet wird. Der Begriff des mechanischen Prinzipes ist demnach kein scharf festgehaltener. Wir wollen deshalb zwar jenen Sätzen in Einzelaussagen ihre herkömmliche Benennung belassen; wenn wir aber schlechthin und allgemein von den Prinzipien der Mechanik reden, so wollen wir darunter nicht jene einzelnen konkreten Sätze verstanden wissen, sondern jede übrigens beliebige Auswahl unter ihnen und unter ähnlichen Sätzen, welche der Bedingung genügt, daß sich aus ihr ohne weitere Berufung auf die Erfahrung die gesamte Mechanik rein deduktiv entwickeln läßt. Bei dieser Bezeichnungsweise stellen die Grundbegriffe der Mechanik zusammen mit den sie verkettenden Prinzipien das einfachste Bild dar, welches die Physik von den Dingen der sinnlichen Welt und den Vorgängen in ihr herzustellen vermag. Und da wir von den Prinzipien der Mechanik durch verschiedene Auswahl der Sätze, welche wir zugrunde legen, verschiedene Darstellungen geben können, so erhalten



wir verschiedene solche Bilder der Dinge, welche Bilder wir prüfen und miteinander vergleichen können in bezug auf ihre Zulässigkeit, ihre Richtigkeit und ihre Zweckmäßigkeit.

## 1.

Ein erstes Bild liefert uns die gewöhnliche Darstellung der Mechanik. Wir verstehen hierunter die in den Einzelheiten abweichende, in der Hauptsache übereinstimmende Darstellung fast aller Lehrbücher, welche das Ganze der Mechanik behandeln, fast aller Vorlesungen, welche sich über den gesamten Inhalt dieser Wissenschaft verbreiten. Diese Darstellung bildet den königlichen Weg und die große Heerstraße, auf welcher die Schar der Schüler in das Innere der Mechanik eingeführt wird; sie folgt genau dem Gang der historischen Entwicklung und der Reihenfolge der Entdeckungen; ihre Hauptstationen sind gekennzeichnet durch die Namen eines ARCHIMEDES, GALILEI, NEWTON, LAGRANGE. Als gegebene Vorstellungen legt diese Darstellung zugrunde die Begriffe des Raumes, der Zeit, der Kraft und der Masse. Die Kraft ist dabei eingeführt als die vor der Bewegung und unabhängig von der Bewegung bestehende Ursache der Bewegung. Zuerst treten auf nur Raum und Kraft für sich, und ihre Beziehungen werden in der Statik behandelt. Die reine Bewegungslehre oder Kinematik begnügt sich, die beiden Begriffe Raum und Zeit in Verbindung zu setzen. Die GALILEISCHE Vorstellung von der Trägheit liefert einen Zusammenhang zwischen Raum, Zeit und Masse allein. In den NEWTONSchen Gesetzen der Bewegung treten zuerst alle vier Grundbegriffe nebeneinander in Verknüpfung auf. Diese Gesetze bilden die eigentliche Wurzel der weiteren Entwicklung, aber sie geben noch keinen allgemeinen Ausdruck für den Einfluß starrer räumlicher Verbindungen; hier erweitert das D'ALEMBERTSche Prinzip das



allgemeine Ergebnis der Statik auf den Fall der Bewegung und schließt als letztes den Reigen der nicht auseinander ableitbaren, unabhängigen Grundaussagen. Alles weitere dagegen ist deduktive Ableitung. In der Tat sind die aufgezählten Begriffe und Gesetze nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, um den gesamten Inhalt der Mechanik aus ihnen mit Denknötwendigkeit zu entwickeln und alle übrigen sogenannten Prinzipien als Lehrsätze und Folgerungen aus besonderen Voraussetzungen erscheinen zu lassen. Jene aufgezählten Begriffe und Gesetze geben uns also ein erstes System der Prinzipien der Mechanik in unserer Ausdrucksweise; damit zugleich also auch das erste allgemeine Bild von den natürlichen Bewegungen der Körperwelt.

Es erscheint nun von vornherein sehr fernliegend, daß man an der logischen Zulässigkeit dieses Bildes auch nur zweifeln könne. Es erscheint fast unmöglich, daß man daran denke, logische Unvollkommenheiten aufzufinden in einem Systeme, welches von unzähligen und von den besten Köpfen immer und immer wieder durchdacht worden ist. Aber ehe man hieraufhin die Untersuchung abbricht, wird man fragen müssen, ob auch alle und ob die besten Köpfe immer von dem Systeme befriedigt gewesen sind. In jedem Falle muß es billig gleich im Anfang wundernehmen, wie leicht es ist, Betrachtungen an die Grundgesetze anzuknüpfen, welche sich ganz in der üblichen Redeweise der Mechanik bewegen und welche doch das klare Denken unzweifelhaft in Verlegenheit setzen. Versuchen wir dies zunächst an einem Beispiele zu zeigen. Wir schwingen einen Stein an einer Schnur im Kreise herum; wir üben dabei bewußtermaßen eine Kraft auf den Stein aus; diese Kraft lenkt den Stein beständig von der geraden Bahn ab, und wenn wir diese Kraft, die Masse des Steines und die Länge der Schnur verändern, so finden wir, daß die Bewegung des Steines in der Tat stets in Übereinstimmung mit dem zweiten NEWTONSchen Gesetze erfolgt. Nun aber verlangt das dritte Gesetz eine Gegenkraft zu der Kraft, welche von unserer Hand auf den Stein ausgeübt wird. Auf die Frage nach dieser Gegenkraft lautet die jedem geläufige Antwort: es wirke der Stein auf die Hand zurück infolge der



Schwingkraft, und diese Schwingkraft sei der von uns ausgeübten Kraft in der Tat genau entgegengesetzt gleich. Ist nun diese Ausdrucksweise zulässig? Ist das, was wir jetzt Schwingkraft oder Zentrifugalkraft nennen, etwas anderes als die Trägheit des Steines? Dürfen wir, ohne die Klarheit unserer Vorstellungen zu zerstören, die Wirkung der Trägheit doppelt in Rechnung stellen, nämlich einmal als Masse, zweitens als Kraft? In unseren Bewegungsgesetzen war die Kraft die vor der Bewegung vorhandene Ursache der Bewegung. Dürfen wir, ohne unsere Begriffe zu verwirren, jetzt auf einmal von Kräften reden, welche erst durch die Bewegung entstehen, welche eine Folge der Bewegung sind? Dürfen wir uns den Anschein geben, als hätten wir über diese neue Art von Kräften in unseren Gesetzen schon etwas ausgesagt, als könnten wir ihnen mit dem Namen „Kraft“ auch die Eigenschaften der Kräfte verleihen? Alle diese Fragen sind offenbar zu verneinen; es bleibt uns nichts übrig als zu erläutern: die Bezeichnung der Schwingkraft als einer Kraft sei eine uneigentliche, ihr Name sei wie der Name der lebendigen Kraft als eine historische Überlieferung hinzunehmen, und die Beibehaltung dieses Namens sei aus Nützlichkeitsgründen mehr zu entschuldigen als zu rechtfertigen. Aber wo bleiben alsdann die Ansprüche des dritten Gesetzes, welches eine Kraft fordert, die der tote Stein auf die Hand ausübt und welches durch eine wirkliche Kraft, nicht durch einen bloßen Namen befriedigt sein will?

Ich glaube nicht, daß diese Schwierigkeiten künstlich oder mutwillig heraufbeschworen sind; sie drängen sich uns von selbst auf. Sollte sich nicht ihr Ursprung bis in die Grundgesetze zurückverfolgen lassen? Die Kraft, von welcher die Definition und die ersten beiden Gesetze reden, wirkt auf einen Körper in einseitig bestimmter Richtung. Der Sinn des dritten Gesetzes ist, daß die Kräfte stets zwei Körper verbinden und ebensogut vom ersten zum zweiten, wie vom zweiten zum ersten gerichtet sind. Die Vorstellung der Kraft, welche dieses Gesetz und die Vorstellung, welche jene Gesetze voraussetzen und in uns erwecken, scheinen mir um ein Geringes verschieden; dieser geringe Unterschied aber reicht vielleicht aus,



um die logische Trübung zu erzeugen, deren Folgen in unserem Beispiele zum Ausbruch kamen. Doch haben wir nicht nötig, auf die Untersuchung weiterer Beispiele einzugehen. Wir können allgemeine Wahrnehmungen als Zeugen für die Berechtigung unserer Zweifel aufrufen. Eine erste solche Wahrnehmung scheint mir die Erfahrung zu bilden, daß es sehr schwer ist, gerade die Einleitung in die Mechanik denkenden Zuhörern vorzutragen ohne einige Verlegenheit, ohne das Gefühl, sich hier und da entschuldigen zu müssen, ohne den Wunsch, recht schnell über die Anfänge hinwegzugelangen zu Beispielen, welche für sich selbst reden. Ich meine, NEWTON selbst müsse diese Verlegenheit empfunden haben, wenn er die Masse etwas gewalttätig definiert als Produkt aus Volumen und Dichtigkeit. Ich meine, die Herren THOMSON und TAIT müssen ihm nachempfunden haben, wenn sie anmerken, dies sei eigentlich mehr eine Definition der Dichtigkeit als der Masse und sich gleichwohl mit derselben als einzigen Definition der Masse begnügen. Auch LAGRANGE, denke ich, müsse jene Verlegenheit und den Wunsch, um jeden Preis vorwärtszukommen, verspürt haben, als er seine Mechanik kurzerhand mit der Erklärung einleitete, eine Kraft sei eine Ursache, welche einem Körper eine Bewegung erteilt „oder zu erteilen strebt“, gewiß nicht ohne die logische Härte einer solchen Überbestimmung zu empfinden. Ein zweites Zeugnis nehme ich aus der Tatsache, daß wir schon für die elementaren Sätze der Statik, für den Satz vom Parallelogramm der Kräfte, den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten usw. zahlreiche Beweise besitzen, welche von ausgezeichneten Mathematikern herrühren, welche den Anspruch machen, streng zu sein und welche doch wieder nach dem Urteil anderer hervorragender Mathematiker diesem Anspruch keineswegs genügen. In einer logisch vollendeten Wissenschaft, in der reinen Mathematik, ist eine Meinungsverschiedenheit in solcher Frage schlechterdings undenkbar. Als ein sehr belastendes Zeugnis aber erscheinen mir auch die über Gebühr oft gehörten Behauptungen: das Wesen der Kraft sei noch rätselhaft, es sei eine Hauptaufgabe der Physik, das Wesen der Kraft zu erforschen, und ähnliche Aussagen mehr. In gleichem Sinne bestürmt man den Elektriker immer wieder nach dem Wesen



der Elektrizität. Warum fragt nun niemand in diesem Sinne nach dem Wesen des Goldes oder nach dem Wesen der Geschwindigkeit? Ist uns das Wesen des Goldes bekannter als das der Elektrizität, oder das Wesen der Geschwindigkeit bekannter als das der Kraft? Können wir das Wesen irgend eines Dinges durch unsere Vorstellungen, durch unsere Worte erschöpfend wiedergeben? Gewiß nicht. Ich meine, der Unterschied sei dieser: Mit den Zeichen „Geschwindigkeit“ und „Gold“ verbinden wir eine große Zahl von Beziehungen zu anderen Zeichen, und zwischen allen diesen Beziehungen finden sich keine uns verletzenden Widersprüche. Das genügt uns, und wir fragen nicht weiter. Auf die Zeichen „Kraft“ und „Elektrizität“ aber hat man mehr Beziehungen gehäuft, als sich völlig miteinander vertragen; dies fühlen wir dunkel, verlangen nach Aufklärung und äußern unsern unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach dem Wesen von Kraft und Elektrizität. Aber offenbar irrt die Frage in bezug auf die Antwort, welche sie erwartet. Nicht durch die Erkenntnis von neuen und mehreren Beziehungen und Verknüpfungen kann sie befriedigt werden, sondern durch die Entfernung der Widersprüche unter den vorhandenen, vielleicht also durch Verminderung der vorhandenen Beziehungen. Sind diese schmerzenden Widersprüche entfernt, so ist zwar nicht die Frage nach dem Wesen beantwortet, aber der nicht mehr gequälte Geist hört auf, die für ihn unberechtigte Frage zu stellen.

Wir haben in diesen Ausführungen die Zulässigkeit des betrachteten Bildes so stark verdächtigt, daß es scheinen muß, als sei es unsere Absicht, diese Zulässigkeit zu bestreiten und schließlich zu verneinen. Soweit geht indes unsere Absicht und unsere Überzeugung nicht. Mögen die logischen Unbestimmtheiten, welche uns um die Sicherheit der Grundlagen besorgt machten, auch wirklich bestehen, sie haben sicherlich keinen einzigen der zahllosen Erfolge verhindert, welche die Mechanik in ihrer Anwendung auf die Tatsachen errungen hat. Sie können also auch nicht bestehen in Widersprüchen zwischen den wesentlichen Zügen unseres Bildes, also nicht in Widersprüchen zwischen denjenigen Beziehungen der Mechanik, welche Beziehungen der Dinge entsprechen. Sie



müssen sich vielmehr beschränken auf die unwesentlichen Züge, auf alles dasjenige, was wir selbst nach Willkür dem von der Natur gegebenen wesentlichen Inhalte hinzugedichtet haben. Dann aber lassen sich jene Verlegenheiten auch vermeiden. Vielleicht treffen unsere Einwände überhaupt nicht den Inhalt des entworfenen Bildes, sondern nur die Form der Darstellung dieses Inhalts. Wir sind gewiß nicht zu streng, wenn wir meinen, diese Darstellung sei noch niemals zur wissenschaftlichen Vollendung durchgedrungen, es fehle ihr noch durchaus die hinreichend scharfe Unterscheidung dessen, was in dem entworfenen Bilde aus Denknöwendigkeit, was aus der Erfahrung, was aus unserer Willkür stammt. In diesem Urteile treffen wir zusammen mit hervorragenden Physikern, welche sich mit diesen Fragen beschäftigt und über dieselben geäußert haben,<sup>1)</sup> freilich ohne daß von einer Übereinstimmung aller gesprochen werden könnte.<sup>2)</sup> Jenes Urteil findet ferner eine Bestätigung in der wachsenden Sorgfalt, welche in den neueren Lehrbüchern der Mechanik der logischen Zergliederung der Elemente gewidmet wird.<sup>3)</sup> In Übereinstimmung mit den Verfassern dieser Lehrbücher und mit jenen Physikern sind wir selbst der Überzeugung, daß die vorhandenen Lücken nur Lücken der Form sind, und durch geeignete Anordnung der Definitionen, Bezeichnungen und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit vermieden werden kann. In diesem Sinne geben wir, wie jedermann, die Zulässigkeit des Inhalts der Mechanik zu. Es erfordert aber die Würde und Größe des Gegenstandes durchaus, daß die logische Reinheit nicht nur mit gutem Willen zugegeben, sondern daß sie durch eine vollendete Darstellung auch so erwiesen werde, daß es nicht möglich sei, sie auch nur zu verdächtigen.

1) Siehe E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig 1883, S. 228. Siehe ferner in der „Nature“ von 1893 eine neuerdings von Herrn O. LODGE angeregte und im Schoße der Physical Society in London fortgeführte Diskussion über die Grundgesetze der Mechanik.

2) Siehe THOMSON & TAIT, Theoretische Physik, § 205 ff.

3) Siehe E. BUDDE, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme, Berlin 1890, S. 111—138. Die daselbst gegebene Darstellung gibt zugleich ein deutliches Bild von der Größe der Schwierigkeiten, welchen die widerspruchsfreie Anwendung der Elemente begegnet.



Leichter und der allgemeinen Zustimmung sicherer können wir das Urteil fällen über die Richtigkeit des von uns betrachteten Bildes. Niemand wird widersprechen, wenn wir versichern, daß diese Richtigkeit nach dem ganzen Umfange unserer bisherigen Erfahrung eine vollkommene sei, daß alle diejenigen Züge unseres Bildes, welche überhaupt den Anspruch machen, beobachtbare Beziehungen der Dinge wiederzugeben, solchen Beziehungen auch wirklich und richtig entsprechen. Wir beschränken allerdings unsere Zuversicht auf den Inhalt der bisherigen Erfahrung; was zukünftige Erfahrungen anlangt, so werden wir noch Gelegenheit haben, auf die Frage nach der Richtigkeit zurückzukommen. Manchem wird freilich diese Vorsicht nicht nur übertrieben, sondern geradezu sinnwidrig dünken; in der Meinung vieler Physiker erscheint es als einfach undenkbar, daß auch die späteste Erfahrung an den feststehenden Grundsätzen der Mechanik noch etwas zu ändern finden könne. Und doch kann das, was aus Erfahrung stammt, durch Erfahrung wieder vernichtet werden; jene allzugünstige Meinung von den Grundgesetzen kann also offenbar nur deshalb entstehen, weil in ihnen die Elemente der Erfahrung einigermaßen versteckt und mit den unabänderlichen denotwendigen Elementen verschmolzen sind. Die logische Unbestimmtheit der Darstellung, welche wir vorher schlechtweg rügten, bietet also auch einen gewissen Vorteil; sie gibt den Fundamenten den Schein der Unabänderlichkeit; es war vielleicht in den Anfängen der Wissenschaft weise, sie einzuführen und eine zeitlang bestehen zu lassen. Man stellte die Richtigkeit des Bildes auf alle Fälle sicher dadurch, daß man sich vorbehielt, im Notfalle aus einer Erfahrungstatsache eine Definition zu machen oder umgekehrt. In einer vollendeten Wissenschaft aber ist solches Tasten, ein solcher Schein der Sicherheit nicht erlaubt; in der gereiften Erkenntnis ist die logische Reinheit in erster Linie zu berücksichtigen; nur logisch reine Bilder sind zu prüfen auf ihre Richtigkeit, nur richtige Bilder zu vergleichen nach ihrer Zweckmäßigkeit. Das dringende Bedürfnis verfährt oft umgekehrt: Die Bilder werden erfunden passend für einen beabsichtigten Zweck, dann geprüft auf ihre Richtigkeit, endlich und zuletzt gesäubert von inneren Widersprüchen.



Ist diese letzte Bemerkung nur einigermaßen zutreffend, so erscheint es uns nur natürlich, daß das beachtete System der Mechanik höchste Zweckmäßigkeit aufweist, sobald es angewandt wird auf die einfachen Erscheinungen, für welche es zuerst erdacht wurde, also vor allem auf die Wirkung der Schwerkraft und die Aufgaben der praktischen Mechanik. Wir dürfen uns aber hierbei nicht beruhigen; wir haben uns zu erinnern, daß wir hier nicht die Bedürfnisse des täglichen Lebens und nicht den Standpunkt vergangener Zeiten vertreten wollen, daß wir vielmehr den gesamten Umfang der heutigen physikalischen Erkenntnis ins Auge fassen und daß wir überdies von der Zweckmäßigkeit in einem besonderen Sinne reden, welchen wir im Eingange genau bestimmt haben. Darnach haben wir die Pflicht, zunächst zu fragen: Ist das entworfen Bild vollkommen deutlich? Enthält es alle Züge, welche die heutige Erkenntnis an den natürlichen Bewegungen zu unterscheiden vermag? Diese Frage beantworten wir nun entschieden mit nein. Nicht alle Bewegungen, welche die Grundgesetze zulassen und welche die Mechanik als mathematische Übungsaufgaben behandelt, kommen in der Natur vor; wir können von den natürlichen Bewegungen, Kräften, festen Verbindungen mehr aussagen, als es die angenommenen Grundgesetze tun. Seit der Mitte dieses Jahrhunderts sind wir fest überzeugt, daß keine Kräfte in der Natur wirklich vorkommen, welche eine Verletzung des Prinzips von der Erhaltung der Energie bedingen würden. Weit älter ist die Überzeugung, daß nur solche Kräfte vorkommen, welche sich darstellen lassen als Summe von Wechselwirkungen zwischen unendlich kleinen Elementen der Materie. Auch diese Elementarkräfte sind nicht frei. Als allgemein zugegebene Eigenschaften derselben können wir anführen, daß sie unabhängig sind vom absoluten Werte der Zeit und vom absoluten Orte im Raume. Andere Eigenschaften sind umstritten. Man hat bald vermutet, bald in Frage gestellt, ob die Elementarkräfte nur bestehen können in Anziehungen und Abstoßungen nach der Verbindungslinie der wirkenden Massen; ob ihre Größe nur bedingt sei durch die Entfernung, oder ob sie nicht auch abhängen könne von der absoluten oder der relativen Geschwindigkeit und nur von dieser, oder ob nicht auch die Be-



schleunigung oder noch höhere Differentialquotienten des Wegs nach der Zeit in Betracht kommen könnten. So wenig man sich also einig ist über alle bestimmten Eigenschaften, welche den Elementarkräften beizulegen sind, so sehr stimmt man doch überein in der Meinung, daß sich mehr solche allgemeine Eigenschaften angeben und aus der schon vorhandenen Beobachtung ableiten lassen, als die Grundgesetze enthalten. Man ist überzeugt, daß die Elementarkräfte, unbestimmt gesprochen, einfacher Natur sein müssen. Was in dieser Hinsicht von den Kräften gilt, kann man in gleicher Weise von den festen Verbindungen der Körper sagen, welche mathematisch durch Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt werden und deren Einfluß durch das D'ALEMBERTsche Prinzip bestimmt ist. Mathematisch kann man jede beliebige endliche oder Differentialgleichung zwischen den Koordinaten hinschreiben und verlangen, daß sie befriedigt werde; aber nicht immer läßt sich eine physikalische, eine natürliche Verbindung angeben, welche die Wirkung jener Gleichung hat; oft liegt die Vermutung, bisweilen die Überzeugung vor, daß eine solche Verbindung durch die Natur der Dinge ausgeschlossen sei. In welcher Weise aber sind die zulässigen Bedingungsgleichungen einzuschränken? Wo ist die Grenzlinie zwischen ihnen und den vorstellbaren? Man hat sich häufig begnügt, nur endliche Bedingungsgleichungen in Betracht zu ziehen. Diese Einschränkung aber geht zu weit, denn nicht integrierbare Differentialgleichungen können als Bedingungsgleichungen bei natürlichen Problemen wirklich auftreten.

Kurzum, sowohl was die Kräfte, als was die festen Verbindungen anlangt, enthält unser System der Prinzipien zwar alle die natürlichen Bewegungen, aber es umfaßt gleichzeitig sehr viele Bewegungen, welche nicht natürliche sind. Ein System, welches diese letzteren oder doch einen Teil derselben ausschliesse, würde mehr wirkliche Beziehungen der Dinge zueinander widerspiegeln und also in diesem Sinne zweckmäßiger sein. Doch haben wir die Pflicht, auch noch in einer zweiten Richtung nach der Zweckmäßigkeit unseres Bildes zu fragen. Ist unser Bild auch einfach? Ist es sparsam an unwesentlichen Zügen, an Zügen also, welche von uns zwar zulässiger



aber doch willkürlicher Weise den wesentlichen Zügen der Natur hinzugefügt werden? Unsere Bedenken bei Beantwortung dieser Frage knüpfen sich wiederum an den Begriff der Kraft. Es kann nicht geleugnet werden, daß in sehr vielen Fällen die Kräfte, welche unsere Mechanik zur Behandlung physikalischer Fragen einführt, nur als leergehende Nebenräder mitlaufen, um überall da außer Wirksamkeit zu treten, wo es gilt, wirkliche Tatsachen darzustellen. In den einfachen Verhältnissen, an welche die Mechanik ursprünglich anknüpfte, ist das freilich nicht der Fall. Die Schwere eines Steines, die Kraft des Armes scheinen ebenso wirklich, ebenso der unmittelbaren Wahrnehmung zugänglich, wie die durch sie erzeugten Bewegungen. Aber wir brauchen nur etwa zur Bewegung der Gestirne überzugehen, um schon andere Verhältnisse zu haben. Hier sind die Kräfte niemals Gegenstand der unmittelbaren Erfahrung gewesen; alle unsere früheren Erfahrungen beziehen sich nur auf den scheinbaren Ort der Gestirne. Wir erwarten auch in Zukunft nicht die Kräfte wahrzunehmen, sondern die zukünftigen Erfahrungen, welche wir erwarten, betreffen wiederum nur die Lage der leuchtenden Punkte am Himmel, als welche uns die Gestirne erscheinen. Nur bei der Ableitung der zukünftigen Erfahrungen aus den vergangenen treten als Hilfsgrößen vorübergehend die Gravitationskräfte ein, um wieder aus der Überlegung zu verschwinden. Ganz allgemein liegt die Sache so bei der Betrachtung der molekularen Kräfte, der chemischen, vieler elektrischen und magnetischen Wirkungen. Und wenn wir nun nach reiferer Erfahrung zurückkehren zu den einfachen Kräften, über deren Bestehen wir keinen Zweifel hatten, so werden wir belehrt, daß diese mit überzeugender Gewißheit von uns wahrgenommenen Kräfte jedenfalls nicht wirkliche waren. Der Trieb jedes Körpers gegen die Erde hin, welchen wir mit Händen zu greifen glaubten, dieser Trieb, so sagt uns die reifere Mechanik, ist als solcher nicht wirklich, er ist das als Einzelkraft nur vorgestellte Ergebnis einer unfaßbaren Anzahl wirklicher Kräfte, welche die Atome des Körpers gegen alle Atome des Weltalls hinziehen. Auch hier sind dann also die wirklichen Kräfte niemals Gegenstand der früheren Erfahrung gewesen, noch erwarten wir sie in zukünftigen Erfahrungen anzutreffen. Nur



während des Prozesses, mit welchem wir die zukünftigen Erfahrungen aus den vergangenen ableiten, treten sie leise ein und wieder aus. Doch selbst wenn die Kräfte nur von uns in die Natur hineingetragen wären, dürften wir darum ihre Einführung noch nicht als unzweckmäßig bezeichnen. Wir waren uns von vornherein klar darüber, daß sich unwesentliche Nebenbeziehungen in unsern Bildern nicht ganz würden vermeiden lassen. Nur möglichste Einschränkung dieser Beziehungen, nur weise Besonnenheit in ihrem Gebrauch durften wir verlangen. Kann man aber behaupten, daß die Physik in dieser Richtung immer mit Sparsamkeit zu Werke gehen konnte? Mußte sie nicht vielmehr die Welt bis zum Übermaß erfüllen mit den verschiedensten Arten von Kräften, mit Kräften, welche selbst niemals in die Erscheinung treten, sogar mit solchen, welche nur ganz ausnahmsweise überhaupt eine Wirkung haben? Wir sehen etwa ein Stück Eisen auf dem Tische ruhen, wir vermuten demnach, daß keine Bewegungsursachen, keine Kräfte da seien. Die Physik, welche auf unserer Mechanik aufgebaut und durch dies Fundament notwendig bestimmt ist, belehrt uns eines anderen. Jedes Atom des Eisens wird zu jedem anderen Atom des Weltalls durch die Gravitationskraft hingezogen. Jedes Atom des Eisens ist aber auch magnetisch und dadurch mit jedem anderen magnetischen Atom des Weltalls durch neue Kräfte verbunden. Aber die Körper des Alls sind auch erfüllt mit bewegter Elektrizität, und von diesen bewegten Elektrizitäten gehen weitere verwickelte Kräfte aus, welche an jedem magnetischen Atom des Eisens ziehen. Und insofern die Teile des Eisens selbst Elektrizität enthalten, haben wir wieder andere Kräfte in Betracht zu ziehen, neben diesen dann noch verschiedene Arten von Molekularkräften. Einige dieser Kräfte sind nicht klein; wäre von allen Kräften nur ein Teil wirksam, so könnte dieser Teil das Eisen in Stücke reißen. In Wahrheit aber sind alle Kräfte so gegeneinander abgeglichen, daß die Wirkung der gewaltigen Zurüstung Null ist, daß trotz tausend vorhandenen Bewegungsursachen Bewegung nicht eintritt, daß das Eisen eben ruht. Wenn wir nun diese Vorstellungen unbefangenen Denkenden vortragen, wer wird uns glauben? Wen werden wir überzeugen, daß wir noch von wirklichen Dingen reden und



nicht von Gebilden einer ausschweifenden Einbildungskraft? Wir selbst aber werden nachdenklich werden, ob wir wirklich die Ruhe des Eisens und seiner Teile in einfacher Weise geschildert und abgebildet haben. Ob sich die Verwicklung überhaupt vermeiden läßt, ist zunächst ja fraglich; aber das ist nicht fraglich, daß ein System der Mechanik, welches sie vermeidet oder ausschließt, einfacher und in diesem Sinne zweckmäßiger ist, als das hier betrachtete, welches solche Vorstellungen nicht nur zuläßt, sondern uns geradezu aufzwingt.

Fassen wir noch einmal in kürzester Form die Bedenken zusammen, welche uns bei Betrachtung der gewöhnlichen Darstellungsweise der Prinzipien der Mechanik aufstießen. Was die Form anlangt, schien uns, daß der logische Wert der einzelnen Aussagen nicht hinreichend klar festgelegt worden sei. Was die Sache anlangt, schien uns, daß die von der Mechanik betrachteten Bewegungen sich nicht völlig mit den zu betrachtenden natürlichen Bewegungen decken. Manche Eigenschaften der natürlichen Bewegungen werden in der Mechanik nicht berücksichtigt; viele Beziehungen, welche die Mechanik betrachtet, fehlen wahrscheinlich in der Natur. Auch wenn diese Ausstellungen als gerechtfertigt anerkannt werden, dürfen sie uns freilich nicht zu der Meinung verleiten, daß die gewöhnliche Darstellung der Mechanik ihren Wert und ihre bevorzugte Stellung deshalb einbüßen müsse oder je einbüßen werde; aber sie rechtfertigen es doch hinreichend, daß wir uns auch nach anderen Darstellungen umsehen, welche in den getadelten Beziehungen Vorteile bieten und den darzustellenden Dingen noch enger angepaßt sind.

## 2.

Ein zweites Bild der mechanischen Vorgänge ist weit jüngeren Ursprungs als das erste. Seine Entwicklung aus und neben jenem ist eng verknüpft mit den Fortschritten,



welche die physikalische Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten gemacht hat. Noch bis in die Mitte des Jahrhunderts erschien als letztes Ziel und als letzte anzustrebende Erklärung der Naturerscheinungen die Rückführung derselben auf unzählige Fernkräfte zwischen den Atomen der Materie. Diese Anschauungsweise entsprach vollständig dem Systeme der mechanischen Prinzipien, welches wir als das erste bezeichnet haben; sie wurde durch jenes bedingt, wie jenes durch sie. Jetzt, gegen Ende des Jahrhunderts hat die Physik einer anderen Denkweise ihre Vorliebe zugewandt. Beeinflußt von dem überwältigenden Eindrücke, welchen die Auffindung des Prinzipes von der Erhaltung der Energie ihr gemacht hat, liebt sie es, die in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen als Umsetzungen der Energie in neue Formen zu behandeln, und die Rückführung der Erscheinungen auf die Gesetze der Energieverwandlung als ihr letztes Ziel zu betrachten. Diese Behandlungsart kann auch schon von vornherein auf die elementaren Vorgänge der Bewegung selbst angewandt werden; alsdann entsteht eine neue, von der ersten verschiedene Darstellung der Mechanik, in welcher von Anfang an der Begriff der Kraft zurücktritt zugunsten des Begriffs der Energie. Eben dieses so entstandene neue Bild der elementaren Bewegungsvorgänge ist es, welches wir als das zweite bezeichnen und welchem wir jetzt unsere Aufmerksamkeit widmen wollen. Wenn wir bei Besprechung des ersten Bildes den Vorteil hatten, daß wir das Bild selbst als deutlich vor den Augen aller Physiker stehend voraussetzen konnten, so ist das bei diesem zweiten Bilde nun freilich nicht der Fall. Dasselbe ist sogar wohl noch niemals in allen seinen Einzelheiten ausgemalt worden, es gibt meines Wissens kein Lehrbuch der Mechanik, welches sich von vornherein auf den Standpunkt der Energielehre stellte und den Begriff der Energie vor dem Begriff der Kraft einführte. Vielleicht ist auch noch niemals eine Vorlesung über Mechanik nach diesem Plane eingerichtet worden. Aber die Möglichkeit eines solchen Planes hat schon den Begründern der Energielehre eingeleuchtet; die Bemerkung, daß man auf diese Weise den Begriff der Kraft mit seinen Schwierigkeiten vermeiden könne, ist öfters gemacht; in einzelnen besonderen



Anwendungen treten in der Wissenschaft immer häufiger Schlußreihen auf, welche ganz dieser Denkweise angehören. Wir können daher recht wohl eine Skizze entwerfen, welche uns die groben Umrisse des Bildes vorführt; wir können im allgemeinen den Plan angeben, nach welchem die beabsichtigte Darstellung der Mechanik geordnet werden müßte. Wie im ersten Bilde, so gehen wir auch hier aus von vier voneinander unabhängigen Grundbegriffen, deren Beziehungen zueinander den Inhalt der Mechanik bilden sollen. Zwei derselben haben einen mathematischen Charakter: Raum und Zeit; die beiden anderen: Masse und Energie, werden eingeführt als in gegebener Menge vorhandene, unzerstörbare und unvermehrbar physikalische Wesenheiten. Freilich wird es nötig sein, neben dieser Erklärung auch deutlich anzugeben, durch welche konkreten Erfahrungen wir in letzter Instanz das Vorhandensein von Masse und Energie feststellen wollen. Hier nehmen wir an, daß dies möglich und daß es geschehen sei. Daß die Menge der Energie, welche mit bestimmten Massen verbunden ist, von dem Zustande dieser Massen abhängig ist, ist selbstverständlich. Es ist aber als eine erste allgemeine Erfahrung einzuführen, daß die vorhandene Energie sich stets in zwei Teile zerfallen läßt, von welchen der eine allein durch die gegenseitige Lage der Massen bedingt ist, der andere aber von ihrer absoluten Geschwindigkeit abhängt. Der erste Teil wird als potentielle Energie, der zweite Teil als kinetische Energie definiert. Die Form für die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Geschwindigkeit der bewegten Körper ist in allen Fällen die gleiche und bekannt; die Form für die Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Lage der Körper kann nicht allgemein angegeben werden, sie bildet vielmehr die besondere Natur und die charakteristische Eigentümlichkeit der gerade betrachteten Massen. Es ist die Aufgabe der Physik, diese Form für die uns umgebenden Naturkörper aus früheren Erfahrungen zu ermitteln. Bis hierher treten in den Betrachtungen im wesentlichen nur drei Elemente, nämlich Raum, Masse und Energie in Beziehung. Um die Beziehungen aller vier Grundbegriffe und damit den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen festzulegen, bedienen wir uns eines der Integralprinzipien der gewöhnlichen Mechanik, welche sich zu ihren



Aussagen des Energiebegriffs bedienen. Welches derselben wir anwenden, ist ziemlich gleichgültig; wir können und wir wollen etwa das HAMILTONSche Prinzip wählen. Wir würden dann also als einziges erfahrungsmäßiges Grundgesetz der Mechanik den Satz aufstellen, daß jedes System natürlicher Massen sich so bewegt, als sei ihm die Aufgabe gestellt, gegebene Lagen in gegebener Zeit zu erreichen und zwar in solcher Weise, daß die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie im Mittel über die ganze Zeit so klein ausfalle wie möglich. Ist dieses Gesetz auch in der Form nicht einfach, so gibt es doch durch eine einzige Bestimmung die natürlichen Umwandlungen der Energie zwischen ihren Formen in eindeutiger Weise wieder, es gestattet daher den Ablauf der wirklichen Erscheinungen für die Zukunft vollständig vorauszubestimmen. Mit der Aufstellung dieses neuen Gesetzes sind die unentbehrlichen Grundlagen der Mechanik abgeschlossen. Was wir noch hinzufügen können, sind nur mathematische Ableitungen und etwa Vereinfachungen oder Hilfsbezeichnungen, welche vielleicht zweckmäßig, aber jedenfalls nicht notwendig sind. Zu diesen letzteren gehört dann auch der Begriff der Kraft, welcher in den Grundlagen selbst nicht auftrat. Seine Einführung ist zweckmäßig, sobald wir nicht nur Massen in Betracht ziehen, welche mit konstanten Mengen von Energie verbunden sind, sondern auch solche Massen, welche Energie an andere Massen abgeben oder von ihnen empfangen. Aber die Einführung geschieht nicht durch neue Erfahrung, sondern durch eine Definition, welche in mehr als einer Weise gefaßt werden kann. Dementsprechend sind auch die Eigenschaften der so definierten Kräfte nicht aus der Erfahrung zu ermitteln, sondern lassen sich aus der Definition und dem Grundgesetz ableiten, und selbst die Bestätigung dieser Eigenschaften durch die Erfahrung ist überflüssig, es wäre denn, daß man noch an der Richtigkeit des ganzen Systems zweifelte. Der Kraftbegriff als solcher kann also in diesem System keine logischen Schwierigkeiten mehr bereiten; auch für die Beurteilung der Richtigkeit des Systems kann er nicht in Frage kommen, nur auf die größere oder kleinere Zweckmäßigkeit desselben kann er Einfluß haben.



In der angedeuteten Weise also hätten wir etwa die Prinzipien der Mechanik zu ordnen, um sie der Anschauungsweise der Energielehre anzupassen. Es fragt sich nun aber, ob das entstandene zweite Bild vor dem erstbetrachteten etwas voraus habe, und wir wollen deshalb seine Vorzüge und Nachteile näher ins Auge fassen.

Diesmal liegt es in unserem Interesse, daß wir uns zuerst an die Zweckmäßigkeit halten, weil in bezug auf diese ein Fortschritt am unzweifelhaftesten hervortritt. Denn unser zweites Bild der natürlichen Bewegungen ist zunächst entschieden deutlicher; es gibt mehr Eigentümlichkeiten derselben wieder als das erste. Wenn wir das HAMILTONSche Prinzip aus den allgemeinen Grundlagen der Mechanik ableiten wollen, müssen wir den letzteren gewisse Voraussetzungen über die wirkenden Kräfte und über die Beschaffenheit etwaiger fester Verbindungen hinzufügen. Diese Voraussetzungen sind höchst allgemeiner Art, aber sie bedeuten darum doch ebenso viele wichtige Einschränkungen der durch das Prinzip dargestellten Bewegungen. Und umgekehrt lassen sich daher auch aus dem Prinzip eine ganze Reihe von Beziehungen, insbesondere von Wechselbeziehungen zwischen jeder Art von möglichen Kräften ableiten, welche in den Prinzipien des ersten Bildes fehlen, welche aber in dem zweiten Bilde, und gleichzeitig, worauf es ankommt, in der Natur sich finden. Der Nachweis, daß dem so sei, bildet den eigentlichen Inhalt und das Ziel der Arbeiten, welche VON HELMHOLTZ unter dem Titel: „Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung“ veröffentlicht hat. Wir treffen aber die Sachlage wohl genauer, wenn wir sagen, die Tatsache selbst, welche bewiesen werden soll, bilde die Entdeckung, welche in jener Arbeit mitgeteilt und dargelegt wird. Denn einer Entdeckung bedurfte in der Tat die Erkenntnis, daß aus so allgemeinen Voraussetzungen sich so besondere, wichtige und zutreffende Folgerungen ziehen lassen. Auf jene Abhandlung können wir uns daher auch berufen zur Erhärtung unserer Behauptung im einzelnen, und insofern jene Abhandlung zur Zeit den äußersten Fortschritt der Physik bezeichnet, können wir uns der Frage überhoben halten, ob ein noch engerer Anschluß an die Natur



erreichbar sei, etwa durch Einschränkung der für die potentielle Energie zulässigen Formen. Lieber wollen wir betonen, daß unser jetziges Bild auch in Hinsicht der Einfachheit die Klippen vermeidet, an welchen die Zweckmäßigkeit unseres ersten Bildes sich gefährdet fand. Denn fragen wir nach dem eigentlichen Grunde, aus welchem die Physik es heutzutage liebt, ihre Betrachtungen in der Ausdrucksweise der Energielehre zu halten, so dürfen wir antworten: weil sie es auf diese Weise am besten vermeidet, von Dingen zu reden, von welchen sie sehr wenig weiß und welche auf die wesentlich beabsichtigten Aussagen auch keinen Einfluß haben. Wir bemerkten schon gelegentlich, daß die Rückführung der Erscheinungen auf die Kraft uns zwingt, unsere Überlegung beständig an die Betrachtung der einzelnen Atome und Moleküle anzuknüpfen. Nun sind wir ja allerdings gegenwärtig überzeugt davon, daß die wägbare Materie aus Atomen besteht; auch haben wir von der Größe dieser Atome und ihren Bewegungen in gewissen Fällen einigermaßen bestimmte Vorstellungen. Aber die Gestalt der Atome, ihr Zusammenhang, ihre Bewegungen in den meisten Fällen, alles dies ist uns gänzlich verborgen; ihre Zahl ist in allen Fällen unübersehbar groß. Unsere Vorstellung von den Atomen ist daher selbst ein wichtiges und interessantes Ziel weiterer Forschung, keineswegs aber ist sie besonders geeignet, als bekannte und gesicherte Grundlage mathematischer Theorien zu dienen. Einen so streng denkenden Forscher, wie es GUSTAV KIRCHHOFF war, berührte es daher fast peinlich, die Atome und ihre Schwingungen ohne zwingende Notwendigkeit in den Mittelpunkt einer theoretischen Ableitung gestellt zu sehen. Die willkürlich angenommenen Eigenschaften der Atome mögen ohne Einfluß auf das Endresultat sein; das letztere mag richtig sein. Gleichwohl sind die Einzelheiten der Ableitung selbst zum großen Teile mutmaßlich falsch; die Ableitung ist ein Scheinbeweis. Die ältere Denkweise der Physik läßt hier kaum eine Wahl, einen Ausweg zu. Dagegen bietet die Auffassung der Energielehre und damit unser zweites Bild der Mechanik den Vorteil, daß in die Voraussetzungen der Probleme nur die der Erfahrung unmittelbar zugänglichen Merkmale, Parameter, oder willkürlichen Koordinaten der betrachteten Körper eintreten; daß die Be-



trachtungen mit Hilfe dieser Merkmale in endlicher und geschlossener Form fortschreiten und daß auch das Endresultat unmittelbar wieder in greifbare Erfahrung kann übersetzt werden. Außer der Energie selbst in ihren wenigen Formen treten keine Hilfskonstruktionen in die Betrachtung ein. Unsere Aussagen können sich auf die bekannten Eigentümlichkeiten der betrachteten Körpersysteme beschränken, ohne daß wir unsere Unkenntnis der Einzelheiten durch willkürliche und einflußlose Hypothesen verdecken müßten. Nicht nur das Endresultat, sondern auch alle Schritte der Ableitung desselben können als richtig und sinnvoll vertreten werden. Dies sind die Vorzüge, welche diese Methode der heutigen Physik lieb gemacht haben, welche also auch unserem zweiten Bilde der Mechanik eigen sind, und welche wir in unserer Bezeichnungsweise als Vorzüge der Einfachheit, also der Zweckmäßigkeit aufzufassen haben.

Leider werden wir wieder unsicherer über den Wert unseres Systems, wenn wir seine Richtigkeit und seine logische Zulässigkeit prüfen. Schon die Frage nach der Richtigkeit gibt zu gerechtfertigten Zweifeln Anlaß. Keineswegs dürfen wir der Übereinstimmung mit der Natur schon deshalb sicher sein, weil sich das HAMILTONSche Prinzip ja auch aus den zugegebenen Grundlagen der NEWTONSchen Mechanik ableiten läßt. Wir haben zu bedenken, daß diese Ableitung nur dann stattfindet, wenn gewisse Voraussetzungen zutreffen, und daß andererseits unser System nicht nur den Anspruch macht, einige Bewegungen der Natur richtig zu beschreiben, sondern daß es behauptet, alle Bewegungen der Natur zu umfassen. Wir haben also zu untersuchen, ob auch wirklich neben den NEWTONSchen Gesetzen jene besonderen Voraussetzungen Allgemeingültigkeit haben, und ein einziges Beispiel der Natur, welches widerspräche, würde die Richtigkeit des Systems als solches umwerfen, wenn es auch die Gültigkeit des HAMILTONSchen Prinzips als allgemeinen Lehrsatzes nicht im mindesten erschütterte. Hier entsteht nun das Bedenken, nicht sowohl ob unser Bild die gesamte Mannigfaltigkeit der Kräfte, sondern ob es auch wirklich die gesamte Mannigfaltigkeit der starren Verbindungen enthielte, welche zwischen den Körpern der Natur auftreten können. Die Anwendung des HAMILTONSchen



Prinzips auf ein materielles System schließt nicht aus, daß zwischen den gewählten Koordinaten desselben feste Zusammenhänge bestehen, aber sie verlangt immerhin, daß diese Zusammenhänge sich mathematisch ausdrücken lassen durch endliche Gleichungen zwischen den Koordinaten; sie gestattet nicht das Auftreten solcher Zusammenhänge, welche mathematisch nur durch Differentialgleichungen wiedergegeben werden können. Die Natur selbst aber scheint Zusammenhänge der letzteren Art nicht einfach auszuschließen. Denn dieselben treten zum Beispiel auf, sobald dreidimensionale Körper mit ihren Oberflächen ohne Gleitung aufeinander rollen. Durch diese Verbindung, welche wir in unserer Umgebung oft vorfinden, ist die Lage beider Körper zueinander nur insofern beschränkt, als sie stets einen Punkt der Oberfläche gemein haben müssen; die Bewegungsfreiheit der Körper aber ist noch um einen Grad weiter beschränkt. Es lassen sich also aus der Verbindung mehr Gleichungen zwischen den Änderungen der Koordinaten herleiten als zwischen den Koordinaten selbst, unter jenen muß daher mindestens eine sein, welche mathematisch als eine nicht integrabele Differentialgleichung zu bezeichnen ist. Auf derartige Fälle nun gestattet das HAMILTONSche Prinzip keine Anwendung mehr, oder genau gesprochen: Die mathematisch mögliche Anwendung des Prinzips führt zu physikalisch falschen Resultaten. Man beschränke die Betrachtung auf den einfachen Fall einer Kugel, welche allein ihrer Trägheit folgend auf einer festen horizontalen Ebene ohne Gleitung rollt; man kann hier ganz wohl durch bloße Betrachtung ohne Rechnung sowohl die Bewegungen übersehen, welche die Kugel wirklich ausführen kann, als auch die Bewegungen, welche dem HAMILTONSchen Prinzip entsprechen würden und welche so ausfallen müßten, daß die Kugel bei konstanter lebendiger Kraft gegebene Ziele in kürzester Zeit erreicht. Man kann sich daher auch ohne Rechnung überzeugen, daß beide Arten von Bewegungen sehr verschiedene Eigentümlichkeiten aufweisen. Wählen wir Anfangs- und Endlage der Kugel beliebig aus, so gibt es doch offenbar stets einen bestimmten Übergang aus einer zur andern, auf welchem die Zeit des Übergangs, also das HAMILTONSche Integral ein Minimum wird. In Wahrheit ist aber gar nicht



aus jeder Lage in jede andere ohne die Mitwirkung von Kräften ein natürlicher Übergang möglich, wenn auch die Wahl der Anfangsgeschwindigkeit vollkommen frei steht. Aber selbst dann, wenn wir Anfangs- und Endlage so wählen, daß eine natürliche freie Bewegung zwischen beiden möglich ist, so ist dies gleichwohl nicht diejenige, welche dem Minimum der Zeit entspricht. Bei gewissen Anfangs- und Endlagen kann der Unterschied sehr auffallend sein. In diesem Falle würde eine Kugel, welche dem Prinzip gemäß sich bewegte, entschieden den Schein eines belebten Wesens annehmen, welches zielbewußt einer bestimmten Lage zusteuert, während neben ihr die Kugel, welche dem Gesetze der Natur folgt, den Eindruck einer toten, gleichförmig dahinkreisenden Masse hervorrufen würde. Es würde nichts helfen, wollten wir an Stelle des HAMILTONSchen Prinzips das Prinzip der kleinsten Wirkungen oder ein anderes Integralprinzip in den Vordergrund rücken, da alle diese Prinzipien nur einen geringen Unterschied der Bedeutung aufweisen und sich in der hier betrachteten Hinsicht ganz gleich verhalten. Übrigens ist der Weg vorgezeichnet, auf welchem allein wir das System verteidigen und gegen den Vorwurf der Unrichtigkeit in Schutz nehmen können. Wir haben zu leugnen, daß starre Verbindungen der angeführten Art mit Strenge in der Natur wirklich vorkommen. Wir haben auszuführen, daß jedes sogenannte Rollen ohne Gleitung in Wahrheit ein Rollen mit geringer Gleitung, also ein Vorgang der Reibung sei. Wir haben uns darauf zu berufen, daß ganz allgemein die Vorgänge in reibenden Flächen zu denjenigen gehören, welche noch nicht auf klar verstandene Ursachen zurückgeführt werden können, sondern für welche nur gerade empirisch die erzeugten Kräfte ermittelt sind; daher gehöre das ganze Problem zu denjenigen, zu deren Behandlung zurzeit die Benützung der Kräfte und damit der Umweg über die gewöhnlichen Methoden der Mechanik noch nicht vermieden werden könne. Überzeugend wirkt freilich diese Verteidigung nicht. Denn ein Rollen ohne Gleiten widerspricht weder dem Energieprinzip noch einem anderen allgemein anerkannten Grundgesetze der Physik; der Vorgang ist in der sichtbaren Welt mit so großer Annäherung verwirklicht, daß man sogar Integrationsmaschinen auf die Voraussetzung seines



genauen Eintretens gegründet hat; wir haben daher kaum ein Recht, sein Vorkommen als unmöglich auszuschließen, am wenigsten aus der Mechanik noch unbekannter Systeme, wie es die Atome oder die Teile des Äthers sind. Aber selbst wenn wir zugeben, daß die fraglichen Verbindungen in der Natur nur angenähert verwirklicht sind, selbst dann bereitet uns das Versagen des HAMILTONSchen Prinzips in diesen Fällen Schwierigkeiten. Von jedem Grundgesetze unseres mechanischen Systems werden wir verlangen müssen, daß es angewandt auf angenähert richtige Verhältnisse immer noch angenähert richtige Resultate gebe, nicht aber gänzlich falsche. Denn da schließlich alle starren Zusammenhänge, welche wir der Natur entnehmen und in die Rechnung einführen, den wirklichen Verhältnissen nur angenähert entsprechen, so geraten wir sonst in gänzliche Unsicherheit, auf welche unter ihnen wir das Gesetz überhaupt noch anwenden dürfen, auf welche nicht mehr. Doch wollen wir die vorgetragene Verteidigung auch nicht gänzlich verwerfen; wir wollen entgegenkommend zugeben, daß die aufgeworfenen Zweifel nur die Zweckmäßigkeit des Systems, nicht aber seine Richtigkeit betreffen, so daß die aus ihnen entspringenden Nachteile durch andere Vorteile aufgewogen werden können.

Die wahren Schwierigkeiten erwarten uns nun aber erst, sobald wir versuchen, die Grundlagen des Systems so zu ordnen, daß den Anforderungen der logischen Zulässigkeit mit aller Strenge genügt werde. Wir dürfen bei der Einführung der Energie nicht dem gewöhnlichen Wege folgend von den Kräften ausgehen, von diesen zur Kräftefunktion, zur potentiellen Energie, zur Energie überhaupt fortschreiten. Eine solche Anordnung würde der ersten Darstellung der Mechanik angehören. Vielmehr haben wir, ohne eigentlich mechanische Entwicklungen schon vorauszusetzen, diejenigen einfachen unmittelbaren Erfahrungen anzugeben, durch welche wir allgemein das Vorhandensein eines Vorrats von Energie und die Bestimmung seiner Menge definiert wissen wollen. Wir haben oben nur angenommen, nicht aber bewiesen, daß eine solche Bestimmung möglich sei. Mehrere ausgezeichnete Physiker versuchen heutzutage, der Energie so sehr die Eigen-



schaften der Substanz zu leihen, daß sie annehmen, jede kleinste Menge derselben sei zu jeder Zeit an einen bestimmten Ort des Raumes geknüpft und bewahre bei allem Wechsel desselben und bei aller Verwandlung der Energie in neue Formen dennoch ihre Identität. Diese Physiker müssen notwendig die Überzeugung vertreten, daß sich Definitionen der verlangten Art wirklich geben lassen, und es war daher wohl erlaubt, die Möglichkeit derselben anzunehmen. Sollen wir selbst aber eine konkrete Form dafür aufweisen, welche uns genügt und welche allgemeiner Zustimmung sicher ist, so geraten wir in Verlegenheit; zu einem befriedigenden und abschließenden Ergebnis scheint diese ganze Anschauungsweise noch nicht gelangt. Eine besondere Schwierigkeit muß auch von vornherein der Umstand bereiten, daß die angeblich substanzartige Energie in zwei so gänzlich verschiedenen Formen auftritt, wie es die kinetische und die potentielle Form sind. Die kinetische Energie bedarf im Grunde an sich keiner neuen Grundbestimmung, da sie aus den Begriffen der Geschwindigkeit und der Masse abgeleitet werden kann; die potentielle Energie hingegen, welche eine selbständige Feststellung fordert, widerstrebt zugleich jeder Definition, welche ihr die Eigenschaften einer Substanz beilegt. Die Menge einer Substanz ist eine notwendig positive Größe; die in einem System enthaltene potentielle Energie scheuen wir uns nicht, als negativ anzunehmen. Bedeutet ein analytischer Ausdruck die Menge einer Substanz, so hat eine additive Konstante in dem Ausdruck dieselbe Wichtigkeit wie der Rest; in dem Ausdruck für die potentielle Energie eines Systems hat die additive Konstante niemals eine Bedeutung. Endlich kann der Inhalt eines physikalischen Systems an einer Substanz nur abhängen von dem Zustande des Systems selbst; der Inhalt gegebener Materie an potentieller Energie aber hängt ab von dem Vorhandensein entfernter Massen, welche vielleicht niemals Einfluß auf das System hatten. Ist das Weltall und damit die Menge jener entfernten Massen unendlich, so wird der Inhalt auch endlicher Mengen von Materie an vielen Formen potentieller Energie unendlich groß. Dies sind alles Schwierigkeiten, welche durch die gesuchte Definition der Energie beseitigt oder umgangen werden müßten. Obwohl



wir nun auch nicht behaupten wollen, daß eine solche Umgehung unmöglich sei, so können wir sie doch gegenwärtig noch nicht als geleistet ansehen, und es wird am vorsichtigsten sein, wenn wir es einstweilen noch als eine offene Frage betrachten, ob sich das System überhaupt in logisch einwurfsfreier Form entwickeln läßt.

Es ist vielleicht der Mühe wert, an dieser Stelle auch die Frage zu erörtern, ob ein anderer Einwurf gerechtfertigt sei, den man vielleicht gegen die Zulässigkeit des hier betrachteten Systems richten könnte. Soll ein Bild gewisser äußerer Dinge in unserem Sinne zulässig sein, so müssen die Züge desselben nicht allein unter sich in Einklang stehen, sondern sie dürfen auch nicht den Zügen anderer in unserer Erkenntnis schon feststehender Bilder widersprechen. Daraufhin könnte man nun behaupten: Es sei nicht denkbar, daß das HAMILTONSche Prinzip oder ein Satz von verwandten Eigenschaften in Wahrheit ein Grundgesetz der Mechanik und damit ein Grundgesetz der Natur vorstelle, denn von einem Grundgesetze sei von vornherein Einfachheit und Schlichtheit zu erwarten, das HAMILTONSche Prinzip aber stelle, wenn man es analysiere, eine äußerst verwickelte Aussage dar. Nicht allein mache es die gegenwärtige Bewegung abhängig von Folgen, welche erst in der Zukunft hervortreten können und mite dadurch der leblosen Natur Absichten zu, sondern, was schlimmer sei, es mite der Natur sinnlose Absichten zu. Denn das Integral, dessen Minimum das HAMILTONSche Prinzip fordert, habe keine einfache physikalische Bedeutung; es sei aber für die Natur ein unverständliches Ziel, einen mathematischen Ausdruck zum Minimum zu machen oder seine Variation zum Verschwinden zu bringen. Die gewöhnliche Antwort, welche die heutige Physik auf derartige Angriffe bereit hält, ist diese, daß die Voraussetzungen, von welchen die Betrachtungen ausgehen, metaphysischen Ursprungs seien, daß aber die Physik darauf verzichtet habe und es nicht mehr als Pflicht anerkenne, den Ansprüchen der Metaphysik gerecht zu werden. Sie lege kein Gewicht mehr auf die Gründe, welche von metaphysischer Seite einst zugunsten der Prinzipien vorgebracht seien, welche einen Zweck in der Natur andeuten; ebensowenig aber könne sie jetzt Einwänden meta-



physischen Charakters gegen ebendieselben Prinzipien ihr Ohr leihen. Wenn wir bei solchem Rechten zu entscheiden hätten, so würden wir nicht unbillig denken, wenn wir uns mehr auf Seiten des Angreifers, als des Verteidigers stellten. Kein Bedenken, welches überhaupt Eindruck auf unsern Geist macht, kann dadurch erledigt werden, daß es als metaphysisch bezeichnet wird; jeder denkende Geist hat als solcher Bedürfnisse, welche der Naturforscher metaphysische zu nennen gewohnt ist. Überdies läßt sich in dem vorliegenden Falle, wie wohl in allen ähnlichen, die gesunde und berechtigte Quelle unseres Bedürfnisses ganz wohl aufweisen. Freilich können wir von der Natur nicht a priori Einfachheit fordern, noch auch urteilen, was in ihrem Sinne einfach sei. Aber den Bildern, welche wir uns von ihr machen, können wir als unsern eigenen Schöpfungen Vorschriften machen. Wir urteilen nun mit Recht, daß, wenn unsere Bilder den Dingen gut angepaßt sind, daß dann die wirklichen Beziehungen der Dinge durch einfache Beziehungen zwischen den Bildern müssen wiedergegeben werden. Wenn aber die wirklichen Beziehungen zwischen den Dingen nur durch verwickelte, ja dem unvorbereiteten Geiste sogar unverständliche Beziehungen zwischen den Bildern sich wiedergeben lassen, so urteilen wir, daß diese Bilder den Dingen nur ungenügend angepaßt sind. Unsere Forderung der Einfachheit geht also nicht an die Natur, sondern an die Bilder, welche wir uns von ihr machen, und unser Widerspruch gegen eine verwickelte Aussage als Grundgesetz drückt nur die Überzeugung aus, daß, wenn der Inhalt der Aussage richtig und umfassend sei, er sich durch zweckmäßigere Wahl der Grundvorstellungen auch in einfacherer Form müsse aussprechen lassen. Eine andere Äußerung derselben Überzeugung ist der in uns erwachende Wunsch, von dem äußeren Verständnisse eines derartigen Gesetzes zu seinem tieferen und eigentlichen Sinn vorzudringen, von dessen Vorhandensein wir überzeugt sind. Ist diese Auffassung richtig, so bildet in der That der vorgebrachte Einwurf ein berechtigtes Bedenken gegen das System, aber er trifft dann nicht sowohl seine Zulässigkeit, als vielmehr seine Zweckmäßigkeit, und er käme bei der Beurteilung der letzteren in Betracht. Es ist indessen nicht nötig, deshalb nochmals zur Besprechung jener zurückzukehren.



Überblicken wir noch einmal dasjenige, was wir über die Vorzüge des zweiten Bildes vorzubringen hatten, so können wir von der Gesamtheit desselben nicht allzu befriedigt sein. Obgleich die ganze Richtung der neueren Physik uns anlockt, den Begriff der Energie in den Vordergrund zu stellen und ihn auch in der Mechanik als Grund- und Eckstein unseres Aufbaues zu benutzen, so bleibt es doch mehr als zweifelhaft, ob wir bei diesem Vorgehen die Härten und Rauigkeiten vermeiden können, welche uns in dem ersten Bilde der Mechanik anstößig waren. In der Tat habe ich auch diesem zweiten Wege der Darstellung nicht deshalb eine längere Besprechung gewidmet, um zur Beschreitung desselben zu ermutigen, sondern vielmehr um anzudeuten, aus welchen Gründen ich selbst ihn aufgegeben habe, nachdem ich zuerst ihn zu verfolgen versucht hatte.

## 3.

Eine dritte Anordnung der Prinzipien der Mechanik ist diejenige, welche in dem Hauptteil des Buches ausführlich dargelegt werden soll, deren Hauptzüge wir aber schon hier in der Einleitung vorführen wollen, um sie in demselben Sinne einer Kritik zu unterwerfen, wie es mit den beiden ersten geschehen ist. Von jenen unterscheidet sie sich wesentlich dadurch, daß sie von nur drei unabhängigen Grundvorstellungen ausgeht; denen der Zeit, des Raumes und der Masse. Sie betrachtet daher als ihre Aufgabe, die natürlichen Beziehungen zwischen diesen dreien und allein zwischen diesen dreien darzustellen. Ein vierter Begriff, wie der Begriff der Kraft oder der Energie, an welchen sich vorhin die Schwierigkeiten knüpften, ist als selbständige Grundvorstellung beseitigt. Die Bemerkung, daß drei voneinander unabhängige Vorstellungen nötig, aber auch hinreichend seien zur Entwicklung



der Mechanik, hat schon G. KIRCHHOFF seinem Lehrbuche der Mechanik vorangestellt. Ganz ohne Ersatz kann freilich die so in den Grundvorstellungen ausfallende Mannigfaltigkeit nicht bleiben. In unserer Darstellung suchen wir die entstehende Lücke auszufüllen durch Benützung einer Hypothese, welche hier nicht zum ersten Male aufgestellt wird, welche man aber nicht in die Elemente der Mechanik selbst einzuführen gewohnt ist, und deren Wesen wir etwa in der folgenden Weise erläutern können.

Versuchen wir, die Bewegungen der uns umgebenden Körper zu verstehen und auf einfache und durchsichtige Regeln zurückzuführen, indem wir aber nur dasjenige berücksichtigen, was wir unmittelbar vor Augen haben, so schlägt unser Versuch im allgemeinen fehl. Wir werden bald gewahr, daß die Gesamtheit dessen, was wir sehen und greifen können, noch keine gesetzmäßige Welt bildet, in welcher gleiche Zustände stets gleiche Folgen haben. Wir überzeugen uns, daß die Mannigfaltigkeit der wirklichen Welt größer sein muß als die Mannigfaltigkeit der Welt, welche sich unseren Sinnen unmittelbar offenbart. Wollen wir ein abgerundetes, in sich geschlossenes, gesetzmäßiges Weltbild erhalten, so müssen wir hinter den Dingen, welche wir sehen, noch andere, unsichtbare Dinge vermuten, hinter den Schranken unserer Sinne noch heimliche Mitspieler suchen. Diese tiefer liegenden Einflüsse erkannten wir in den ersten beiden Darstellungen an, und wir dachten sie uns als Wesen einer eigenen und besonderen Art, deshalb schufen wir zu ihrer Wiedergabe in unserem Bilde die Begriffe der Kraft und der Energie. Es steht uns aber noch ein anderer Weg offen. Wir können zugeben, daß ein verborgenes Etwas mitwirke und doch leugnen, daß dieses Etwas einer besonderen Kategorie angehöre. Es steht uns frei, anzunehmen, daß auch das Verborgene nichts anderes sei als wiederum Bewegung und Masse, und zwar solche Bewegung und Masse, welche sich von der sichtbaren nicht an sich unterscheidet, sondern nur in Beziehung auf uns und auf unsere gewöhnlichen Mittel der Wahrnehmung. Diese Auffassungsweise ist nun eben unsere Hypothese. Wir nehmen also an, daß es möglich sei, den sichtbaren Massen des



Weltalls andere denselben Gesetzen gehorchende Massen hinzuzudichten von solcher Art, daß dadurch das Ganze Gesetzmäßigkeit und Verständlichkeit gewinnt, und zwar nehmen wir an, daß dies ganz allgemein und in allen Fällen möglich sei, und daß es daher andere Ursachen der Erscheinungen auch gar nicht gebe, als die hierdurch zugelassenen. Was wir gewohnt sind als Kraft und als Energie zu bezeichnen, ist dann für uns nichts weiter als eine Wirkung von Masse und Bewegung, nur braucht es nicht immer die Wirkung grobsinnlich nachweisbarer Masse und grobsinnlich nachweisbarer Bewegung zu sein. Eine derartige Erklärung einer Kraft aus Bewegungsvorgängen pflegt man eine dynamische zu nennen, und man kann wohl sagen, daß die Physik gegenwärtig derartigen Erklärungen in hohem Grade hold ist. Die Kräfte der Wärme hat man mit Sicherheit auf die verborgenen Bewegungen greifbarer Massen zurückgeführt. Durch MAXWELLS Verdienst ist die Vermutung fast zur Überzeugung geworden, daß wir in den elektrodynamischen Kräften die Wirkung der Bewegung verborgener Massen vor uns haben. Lord KELVIN rückt die Möglichkeit dynamischer Erklärungen der Kräfte mit Vorliebe in den Vordergrund seiner Betrachtungen; in seiner Theorie von der Wirbelnatur der Atome hat er ein dieser Anschauung entsprechendes Bild des Weltganzen zu geben versucht. VON HELMHOLTZ hat in der Untersuchung über die zyklischen Systeme die wichtigste Form der verborgenen Bewegung ausführlich und zum Zwecke allgemeiner Anwendung behandelt; durch ihn ist den Ausdrücken „verborgene“ Masse, „verborgene“ Bewegung die Geltung technischer Ausdrücke im Deutschen verliehen. Hat aber jene Hypothese die Fähigkeit, die geheimnisvollen Kräfte allmählich aus der Mechanik wieder zu eliminieren, so kann sie auch verhindern, daß dieselben überhaupt in die Mechanik eintreten. Und entspricht die Verwertung der Hypothese zu ersterem Zwecke der Denkweise der heutigen Physik, so muß das gleiche von ihrer Benutzung zu letzterem Zwecke gelten. Dies ist der leitende Gedanke, von welchem wir ausgehen und durch dessen Verfolgung dasjenige Bild entsteht, welches wir als das dritte bezeichneten, und dessen allgemeine Umrisse wir nun umfahren wollen.



Zuerst führen wir also ein die drei unabhängigen Grundbegriffe Zeit, Raum und Masse als Gegenstände der Erfahrung, indem wir angeben, durch welche konkreten sinnlichen Erfahrungen wir uns Zeiten, Massen, räumliche Größen bestimmt denken wollen. Was die Massen anbelangt, so behalten wir uns vor, neben den sinnlich wahrnehmbaren Massen durch Hypothese verborgene Massen einzuführen. Wir stellen sodann die Beziehungen zusammen, welche zwischen jenen konkreten Erfahrungen stets obwalten, und welche wir als die wesentlichen Beziehungen zwischen den Grundbegriffen festzuhalten haben. Es ist naturgemäß, daß wir die Grundbegriffe zunächst zu je zweien verbinden. Die Beziehungen, welche Raum und Zeit allein betreffen, können wir als Kinematik voraussenden. Zwischen Masse und Zeit allein besteht keine Verknüpfung. Masse und Raum dagegen treten wieder zusammen zu einer Reihe wichtiger erfahrungsmäßiger Beziehungen. Wir finden nämlich zwischen den Massen der Natur gewisse rein räumliche Zusammenhänge, welche darin bestehen, daß von Anbeginn an für alle Zeiten, und also unabhängig von der Zeit, jenen Massen gewisse Lagen und gewisse Änderungen der Lage als mögliche, alle anderen aber als unmögliche vorgeschrieben und zugeordnet sind. Wir können über diese Zusammenhänge ferner allgemein aussagen, daß sie nur die relative Lage der Massen untereinander betreffen und weitergehend, daß sie gewissen Bedingungen der Stetigkeit genügen, welche ihren mathematischen Ausdruck darin finden, daß sich die Zusammenhänge selbst stets durch homogene lineare Gleichungen zwischen den ersten Differentialen derjenigen Größen wiedergeben lassen, durch welche wir die Lage der Massen bezeichnet haben. Die Zusammenhänge bestimmter materieller Systeme im einzelnen zu erforschen ist nicht Sache der Mechanik, sondern der experimentellen Physik; die bezeichnenden Merkmale, durch welche sich die verschiedenen materiellen Systeme der Natur unterscheiden, sind nach unserer Vorstellung eben einzig und allein die Zusammenhänge ihrer Massen. In den bisherigen Erörterungen haben wir nur je zwei der Grundbegriffe für sich verbunden, nunmehr wenden wir uns der eigentlichen Mechanik im engeren Sinne zu, in welcher alle drei zusammzutreten haben. Es gelingt uns,



ihre erfahrungsmäßige allgemeine Verknüpfung zusammenzufassen in ein einziges Grundgesetz, welches eine sehr nahe Analogie mit dem gewöhnlichen Trägheitsgesetz zieht. In der Tat läßt es sich in der Ausdrucksweise, welche wir benutzen, wiedergeben in der Aussage: jede natürliche Bewegung eines selbständigen materiellen Systems bestehe darin, daß das System mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine seiner geradesten Bahnen verfolge. Diese Aussage ist allerdings nur verständlich, nachdem die benutzte mathematische Redeweise gehörig erörtert ist; der Sinn des Satzes aber läßt sich auch in der gewöhnlichen Sprache der Mechanik wiedergeben. Jener Satz faßt nämlich einfach das gewöhnliche Trägheitsgesetz und das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges in eine einzige Behauptung zusammen. Er sagt also aus, daß, wenn die Zusammenhänge des Systems einen Augenblick gelöst werden könnten, sich dann seine Massen in geradliniger und gleichförmiger Bewegung zerstreuen würden, daß aber, da solche Auflösung nicht möglich ist, sie jener angestrebten Bewegung wenigstens so nahe bleiben als möglich. Wie jenes Grundgesetz in unserem Bilde der erste Erfahrungssatz der eigentlichen Mechanik ist, so ist es auch der letzte. Aus ihm zusammen mit der zugelassenen Hypothese verborgener Massen und gesetzmäßiger Zusammenhänge leiten wir den übrigen Inhalt der Mechanik rein deduktiv ab. Um ihn gruppieren wir die übrigen allgemeinen Prinzipien nach ihrer Verwandtschaft zu ihm und untereinander, als Folgerungen oder als Teilaussagen. Wir bemühen uns zu zeigen, daß bei dieser Anordnung der Inhalt unserer Wissenschaft nicht weniger reich und mannigfaltig ausfällt, als der Inhalt einer Mechanik, welche von vier Grundvorstellungen ausgeht, jedenfalls nicht weniger reich und mannigfaltig als es die Darstellung der Natur verlangt. Übrigens erweist es sich auch hier bald als zweckmäßig, den Begriff der Kraft einzuführen. Aber die Kraft tritt nun nicht auf als etwas von uns Unabhängiges und uns Fremdes, sondern als eine mathematische Hilfskonstruktion, deren Eigenschaften wir völlig in unserer Gewalt haben, und welche also auch für uns nichts Rätselhaftes an sich haben kann. Nach dem Grundgesetze muß nämlich überall da, wo zwei Körper demselben System angehören, die Bewegung des



einen durch die Bewegung des anderen mitbestimmt sein. Der Begriff der Kraft entsteht nun dadurch, daß wir es aus angebbaren Gründen zweckmäßig finden, diese Bestimmung der einen Bewegung durch die andere in zwei Stadien zu zerlegen und uns zu sagen: die Bewegung des ersten Körpers bestimme zunächst eine Kraft, diese Kraft erst bestimme die Bewegung des zweiten Körpers. Auf diese Weise wird jede Kraft zwar stets Ursache einer Bewegung, mit gleichem Rechte aber zugleich auch stets Folge einer Bewegung; sie wird, genau gesprochen, das nur gedachte Mittelglied zwischen zwei Bewegungen. Es ist klar, daß bei dieser Auffassung die allgemeinen Eigenschaften der Kräfte mit Denknöthigkeit aus dem Grundgesetze folgen müssen, und wenn wir in möglichen Erfahrungen diese Eigenschaften bestätigt sehen, so kann uns dies nicht einmal verwundern, wenn anders wir an unserm Grundgesetze nicht zweifeln. Mit dem Begriffe der Energie und mit allen anderen einzuführenden Hilfskonstruktionen liegt die Sache ganz ebenso.

Was wir bisher gesagt haben, betraf den physikalischen Inhalt des vorzuführenden Bildes und erschöpfte denselben im Rahmen dieser Einleitung; es wird zweckmäßig sein, nun auch eine kurze Erörterung der besonderen mathematischen Form zu widmen, in welcher wir denselben wiedergeben werden. Jener Inhalt ist von dieser Form ganz unabhängig und es ist vielleicht nicht ganz klug gehandelt, daß wir einen von dem Herkömmlichen abweichenden Inhalt sogleich in einer ungewohnten Form darbieten. Indessen weichen ja sowohl Form als Inhalt ein jedes für sich nur sehr wenig von wohlbekanntem Dingen ab; außerdem passen eben dieser Inhalt und diese Form so zueinander, daß ihre Vorzüge sich gegenseitig stützen. Das wesentliche Merkmal der benutzten Terminologie besteht nun darin, daß sie gleich von vornherein ganze Systeme von Punkten vorstellt und in Betracht zieht, nicht aber jedesmal von den einzelnen Punkten ausgeht. Einem jeden sind die Ausdrücke „Lage eines Systems von Punkten“ und „Bewegung eines Systems von Punkten“ geläufig. Es ist eine nicht unnatürliche Fortsetzung dieser Redeweise, wenn wir die Gesamtheit der bei der Bewegung durchlaufenen Lagen



eines Systems als seine Bahn bezeichnen. Jeder kleinste Teil dieser Bahn ist alsdann ein Bahnelement. Von zwei Bahnelementen kann das eine ein Teil des andern sein, sie unterscheiden sich alsdann noch nach der Größe und nur nach dieser. Zwei Bahnelemente, welche von derselben Lage ausgehen, können aber auch verschiedenen Bahnen angehören; alsdann ist keines von beiden ein Teil des andern und sie unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich der Größe; wir sagen deshalb, daß sie auch verschiedene Richtung haben. Durch diese Aussagen sind freilich die Merkmale „Größe“ und „Richtung“ für die Bewegung eines Systems noch nicht eindeutig bestimmt; wir können aber unsere Definitionen geometrisch oder analytisch so vervollständigen, daß ihre Folgen weder mit sich selbst noch mit dem Gesagten in Widerspruch geraten, und daß zugleich die definierten Größen in der Geometrie des Systems genau den Größen entsprechen, welche wir in der Geometrie des Punktes mit den gleichen Namen bezeichnen, mit welchen bekannten Größen sie auch stets zusammenfallen, sobald das System sich auf einen Punkt reduziert. Sind aber einmal die Merkmale Größe und Richtung bestimmt, so liegt es nahe genug, die Bahn eines Systems gerade zu nennen, wenn alle ihre Elemente die gleiche Richtung haben; und krumm, sobald die Richtung der Elemente sich von Lage zu Lage ändert. Als Maß der Krümmung bietet sich wie in der Geometrie des Punktes die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung mit der Lage von selber dar. Durch diese Definitionen sind nun aber schon eine ganze Reihe von Beziehungen gegeben, und die Zahl derselben wächst, sobald die Bewegungsfreiheit des betrachteten Systems durch seine Zusammenhänge eingeschränkt ist. Insbesondere lenken alsdann gewisse Klassen von Bahnen die Aufmerksamkeit auf sich, welche sich unter den möglichen durch besondere einfache Eigenschaften auszeichnen. Hierher gehören vor allen Dingen diejenigen Bahnen, welche in jeder ihrer Lagen so wenig wie möglich gekrümmt sind, und welche wir als die geradesten Bahnen des Systems bezeichnen. Sie sind es, von welchen in dem Grundgesetz die Rede ist, und welche wir schon oben bei Anführung desselben erwähnt haben. Hierher gehören ferner diejenigen Bahnen, welche die kürzeste Verbindung zwischen irgend zweien ihrer Lagen bilden, und



welche wir als kürzeste Bahnen des Systems bezeichnen. Unter gewissen Bedingungen fallen die Begriffe der geradesten und der kürzesten Bahnen zusammen. Dies Verhältnis ist uns durch Erinnerung an die Theorie der krummen Oberflächen sogar höchst geläufig, aber allgemein und unter allen Umständen hat es gleichwohl nicht statt. Die Sammlung und Ordnung aller hier auftretenden Beziehungen gehört in die Geometrie der Punktsysteme, und die Entwicklung dieser Geometrie hat eigenen mathematischen Reiz; wir verfolgen dieselbe aber nur so weit, als es der augenblickliche Zweck der physikalischen Anwendung erfordert. Da ein System von  $n$  Punkten eine  $3n$ -fache Mannigfaltigkeit der Bewegung darbietet, welche aber durch die Zusammenhänge des Systems auch auf jede beliebige Zahl vermindert werden kann, so entstehen viele Analogien mit der Geometrie eines mehrdimensionalen Raumes, welche zum Teil so weit gehen, daß dieselben Sätze und Bezeichnungen hier und dort Bedeutung haben können. Es ist aber in unserem Interesse zu betonen, daß diese Analogien nur formale sind, und daß trotz eines gelegentlich fremdartigen Klanges sich unsere Betrachtung ausnahmslos auf konkrete Gebilde des Raumes unserer Sinnenwelt beziehen, daß also auch alle unsere Aussagen mögliche Erfahrungen darstellen und wenn es nötig wäre, durch unmittelbare Versuche, nämlich durch Messung an Modellen bestätigt werden könnten. Den Vorwurf, daß wir beim Aufbau einer Erfahrungswissenschaft die Welt der Erfahrung verlassen, diesen Vorwurf haben wir also nicht zu fürchten. Dagegen haben wir Rede zu stehen auf die Frage, ob sich denn die Weitläufigkeit einer neuen und ungewohnten Ausdrucksweise lohne, und welchen entsprechenden Nutzen wir von der Anwendung derselben erwarten? Als Antwort nennen wir darauf als ersten Nutzen die große Einfachheit und Kürze, mit welcher sich die meisten allgemeinen und umfassenden Aussagen wiedergeben lassen. In der Tat erfordern Sätze, welche ganze Systeme behandeln, hier nicht mehr Worte und nicht mehr Begriffe, als wenn sie unter Benutzung der gewöhnlichen Ausdrucksweise in bezug auf einen einzelnen Punkt ausgesagt würden. Die Mechanik des materiellen Systems erscheint hier nicht mehr als eine Erweiterung und Verwicklung der Mechanik des einzelnen Punktes,



sondern die letztere fällt als selbständige Untersuchung fort oder tritt doch nur gelegentlich als Vereinfachung und besonderer Fall der ersteren auf. Wendet man etwa ein, diese Einfachheit sei künstlich erzeugt, so antworten wir, daß es gar keine andere Methode gebe, einfache Beziehungen zu schaffen, als die künstliche und wohlerwogene Anpassung unserer Begriffe an die darzustellenden Verhältnisse. Will man aber in jenem Vorwurf des Künstlichen den Nebensinn des Gesuchten und Unnatürlichen hervorheben, so dürfen wir dem entgegenhalten, daß man vielleicht mit mehr Recht die Betrachtung ganzer Systeme für das Natürliche und Naheliegende halten könne, als die Betrachtung einzelner Punkte. Denn in Wahrheit ist uns das materielle System unmittelbar gegeben, der einzelne Massenpunkt eine Abstraktion; alle wirkliche Erfahrung wird unmittelbar nur an Systemen gewonnen, und die an einfachen Punkten möglichen Erfahrungen sind daraus durch Verstandesschlüsse abgezogen. Als einen zweiten, allerdings nicht sehr wesentlichen Nutzen heben wir die Vorzüge der Form hervor, welche durch unsere mathematische Einkleidung dem Grundgesetz gegeben werden kann. Ohne jene Einkleidung müßten wir es zerlegen in das erste NEWTONsche Gesetz und das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Beide zusammen würden nun zwar genau dieselbe Tatsache darstellen, aber sie würden neben dieser Tatsache andeutungsweise noch ein wenig mehr enthalten, und dieses Mehr wäre ein Zuviel. Erstens rufen sie die unserer Mechanik fremde Vorstellung wach, daß die Zusammenhänge der materiellen Systeme doch auch gelöst werden könnten, obwohl wir dieselben als von Anbeginn an bestehende und als gänzlich unlösbare bezeichnet haben. Zweitens kann man bei Benutzung des GAUSSschen Prinzips nicht vermeiden, die Nebenvorstellung zu erwecken, daß man nicht nur eine Tatsache, sondern zugleich auch den Grund dieser Tatsache mitteilen wolle. Man kann nicht aussagen, daß die Natur eine Größe, welche man Zwang nennt, beständig so klein als möglich hält, ohne anzudeuten, daß dies geschehe, eben weil jene Größe für die Natur einen Zwang, das heißt ein Unlustgefühl bedeute. Man kann nicht aussagen, daß die Natur verfare wie ein verständiger Rechner, der seine Beobachtung ausgleicht, ohne nahezu legen,



daß hier wie dort wohlüberlegte Absicht der Grund des Verfahrens sei. Gewiß liegt gerade ein besonderer Reiz in derartigen Seitenblicken, und dies hat GAUSS selbst in gerechter Freude an seiner schönen und für unsere Mechanik grundlegenden Entdeckung hervorgehoben. Aber doch müssen wir uns gestehen, daß dieser Reiz nur ein Spiel mit dem Geheimnisvollen ist; im Ernste glauben wir selbst nicht an unser Vermögen, durch derartige Andeutungen halb schweigend das Welt-rätsel zu lösen. Unser eigenes Grundgesetz vermeidet solche Winke gänzlich. Indem es genau die Form des gewöhnlichen Trägheitsgesetzes annimmt, gibt es so gut wie dieses eine nackte Tatsache ohne jeden Schein einer Begründung derselben. In demselben Maße, in welchem es dadurch ärmer und ungeschmückter erscheint, in demselben Maße ist es ehrlicher und wahrer. Doch vielleicht verführt mich die Vorliebe für die kleine Abänderung, welche ich selbst an dem GAUSSschen Prinzip angebracht habe, daß ich Vorzüge in ihr erblicke, welche fremden Augen notwendig verborgen sind. Sicher aber wird man, denke ich, dagegen zustimmen, wenn ich als dritten Nutzen unserer Methode anführe, daß dieselbe ein helles Licht auf die von HAMILTON erfundene Behandlungsweise mechanischer Probleme mit Hilfe charakteristischer Funktionen wirft. Diese Behandlungsweise hat in den sechzig Jahren ihres Bestehens Anerkennung und Ruhm genug gefunden, aber sie ist doch mehr aufgefaßt und behandelt worden wie ein neuer Seitenzweig der Mechanik, dessen Wachstum und Weiterbildung neben der gewöhnlichen Methode und unabhängig von derselben vor sich zu gehen habe. In unserer Form der mathematischen Darstellung aber trägt die HAMILTONsche Methode nicht den Charakter eines Seitenzweiges, sondern sie erscheint als die gerade, naturgemäße und sozusagen selbstverständliche Fortsetzung der elementaren Aussagen in allen den Fällen, in welchen sie überhaupt anwendbar ist. Auch das läßt unsere Darstellungsweise klar hervortreten, daß die HAMILTONsche Behandlungsweise nicht in den besonderen physikalischen Grundlagen der Mechanik ihre Wurzeln hat, wie man wohl gewöhnlich annimmt, sondern daß sie im Grunde genommen eine rein geometrische Methode ist, welche begründet und ausgebildet werden kann, ganz unabhängig von



der Mechanik, und welche mit dieser in keiner engeren Beziehung steht, als alle andere von der Mechanik benutzte geometrische Erkenntnis auch. Übrigens ist es von den Mathematikern seit lange bemerkt worden, daß die HAMILTONSche Methode rein geometrische Wahrheiten enthält und zum klaren Ausdruck derselben eine eigentümliche, ihr angepaßte Ausdrucksweise geradezu fordert. Nur ist diese Tatsache in etwas verwirrender Form zutage getreten, nämlich in den Analogien, welche man beim Verfolg der HAMILTONSchen Gedanken zwischen der gewöhnlichen Mechanik und der Geometrie eines vieldimensionalen Raumes gefunden hat. Unsere Ausdrucksweise gibt eine einfache und verständliche Erklärung dieser Analogien; sie gestattet auch die Vorteile derselben zu genießen, und sie vermeidet doch die Unnatürlichkeit, welche in der Verquickung eines Zweiges der Physik mit außersinnlichen Abstraktionen liegt.

Wir haben nunmehr unser drittes Bild der Mechanik nach Inhalt und Form so weit geschildert, als es angeht, ohne dem Buche selbst vorzugreifen; zugleich hinreichend, um es den beabsichtigten Fragen nach seiner Zulässigkeit, seiner Richtigkeit und seiner Zweckmäßigkeit unterwerfen zu können. Was zunächst die logische Zulässigkeit des entworfenen Bildes anlangt, so denke ich, daß dieselbe selbst strengen Anforderungen genügen könne, und hoffe, daß diese Meinung der Zustimmung begegnen möge. Ich lege auf diesen Vorzug der Darstellung das größte Gewicht, ja einzig Gewicht. Ob das entworfenen Bild zweckmäßiger ist als ein anderes, ob es fähig ist, alle zukünftige Erfahrung zu umfassen, ja ob es auch nur alle gegenwärtige Erfahrung umfaßt, alles dies ist mir fast nichts gegen die Frage, ob es in sich abgeschlossen, rein und widerspruchsfrei ist. Denn nicht deshalb habe ich es zu zeichnen versucht, weil die Mechanik nicht bereits für ihre Anwendungen genügend Zweckmäßigkeit zeigte, noch weil dieselbe mit der Erfahrung irgend in Widerstreit geraten wäre, sondern allein um mich von dem drückenden Gefühle zu befreien, daß ihre Elemente nicht frei seien von Dunkelheiten und Unverständlichkeiten für mich. Nicht das einzig mögliche Bild der mechanischen Vorgänge, noch auch das



beste Bild, sondern überhaupt nur ein begreifbares Bild wollte ich suchen und an einem Beispiel zeigen, daß ein solches möglich sei, und wie es etwa aussehen müsse. Die Vollkommenheit ist uns freilich in jeder Richtung unerreichbar, und ich muß mir gestehen, daß trotz vieler Mühe das erlangte Bild nicht in allen Punkten von so überzeugender Klarheit ist, daß es nicht dem Zweifel ausgesetzt und der Verteidigung bedürftig wäre. Doch scheint mir von Einwänden allgemeiner Art nur ein einziger hinreichend nahe zu liegen, daß es sich lohnt, ihn vorwegzunehmen und abzuschneiden. Er betrifft die Natur der starren Verbindungen, welche wir zwischen den Massen annehmen, und welche wir auch in unserem System auf keine Weise entbehren können. Viele Physiker werden zunächst der Ansicht sein, daß mit diesen Verbindungen doch schon Kräfte in die Elemente der Mechanik eingeführt und zwar in heimlicher und deshalb unerlaubter Weise eingeführt seien. Denn — so werden sie sagen — starre Verbindungen sind nicht denkbar ohne Kräfte; starre Verbindungen können nicht auf andere Weise zustande kommen, als indem sie durch Kräfte erzwungen werden. Wir antworten darauf: Euere Behauptung ist allerdings richtig für die Denkweise der gewöhnlichen Mechanik, aber sie ist nicht richtig unabhängig von dieser Denkweise; sie erscheint nicht zwingend dem Geist, welcher die Sache unbefangen und wie zum erstenmal betrachtet. Gesetzt wir finden, auf welche Weise auch immer, daß der Abstand zweier bestimmter punktförmiger Massen zu allen Zeiten und unter allen Umständen derselbe bleibt, so können wir dieser Tatsache Ausdruck verleihen, ohne andere als räumliche Vorstellungen zu benutzen, und die ausgesagte Tatsache hat als Tatsache für die Voraussicht zukünftiger Erfahrung und für alle andern Zwecke ihren Wert unabhängig von einer etwaigen Erklärung, welche wir besitzen oder nicht besitzen. Auf keinen Fall wird der Wert der Tatsache erhöht oder unser Verständnis von ihr verbessert dadurch, daß wir sie in der Form mitteilen: Zwischen jenen Massen wirke eine Kraft, welche ihren Abstand konstant hält, oder: Zwischen ihnen sei eine Kraft tätig, welche verhindert, daß sich ihr Abstand von seinem festen Wert entferne. Aber — so wird man uns wieder einwenden — wir sehen ja, daß die letztere Erklärung, obwohl scheinbar nur eine lächerliche Umschreibung,



gleichwohl richtig ist. Denn alle Verbindungen der wirklichen Welt sind nur angenähert starr, und der Schein der Starrheit wird nur dadurch hervorgebracht, daß die elastischen Kräfte die kleinen Abweichungen von der Ruhelage beständig wieder vernichten. Wir antworten: Von solchen starren Verbindungen der greifbaren Körper, welche nur angenähert verwirklicht sind, wird unsere Mechanik selbstverständlich als Tatsache auch nur aussagen, daß ihnen angenähert genügt werde, und zu dieser Aussage, auf welche es ankommt, bedarf sie wiederum des Begriffs der Kraft nicht. Will unsere Mechanik aber in zweiter Annäherung die Abweichungen und damit die elastischen Kräfte berücksichtigen, so wird sie für diese wie für alle Kräfte eine dynamische Erklärung annehmen; bei der Suche nach den wirklich starren Verbindungen wird sie vielleicht zur Welt der Atome hinabzusteigen haben, aber diese Erörterungen sind hier nicht am Platze, sie berühren nicht mehr die Frage ob es logisch zulässig sei, feste Verbindungen unabhängig von und vor den Kräften zu behandeln. Daß diese Frage zu bejahen sei und nur dies wünschten wir zu erweisen und glauben wir erwiesen zu haben. Steht aber dies fest, so können wir aus der Natur der festen Verbindungen die Eigenschaften der Kräfte und ihr Verhalten ableiten, ohne uns damit einer *petitio principii* schuldig gemacht zu haben. Andere Einwände ähnlicher Art sind möglich, können aber, wie ich glaube, in ähnlicher Art erledigt werden.

Dem Wunsche, die logische Reinheit des Systems auch in allen Einzelheiten zu erweisen, habe ich dadurch Ausdruck gegeben, daß ich für die Darstellung die ältere synthetische Form benutzt habe. Diese Form bietet für jenen Zweck schon darin einen gewissen Vorteil, daß sie uns zwingt, jeder wesentlichen Aussage den beabsichtigten logischen Wert in abwechslungsarmer aber bestimmter Angabe vorzuschicken. Dadurch werden die bequemen Vorbehalte und Vieldeutigkeiten unmöglich gemacht, zu welchen die gewöhnliche Sprache durch den Reichtum ihrer Verknüpfung verlockt. Der wichtigste Vorteil der gewählten Form ist aber dieser, daß sie stets nur auf Vorbewiesenes sich beruft, niemals auf später zu erweisendes, so daß man der ganzen Kette sicher ist, wenn man beim Vor-



wärtsschreiten nur jedes einzelne Glied genügend prüft. In dieser Hinsicht habe ich den Pflichten dieser Art der Darstellung mit Strenge zu genügen gesucht. Im übrigen ist es selbstverständlich, daß die Form allein vor Irrtum und Übersehen keinen Schutz gewähren kann, und bitte ich etwa eingeflossene Fehler nicht um des etwas anspruchsvollen Vortrags willen strenger zu beurteilen. Ich hoffe, solche Fehler werden stets verbesserungsfähig sein und daher keinen wesentlichen Punkt betreffen. Bisweilen bin ich übrigens bewußterweise zur Vermeidung allzu großer Weitläufigkeit hinter der vollen Schärfe zurückgeblieben, welche die Darstellungsweise eigentlich fordert. Es bedarf keiner besonderen Begründung, daß ich den Betrachtungen der eigentlichen Mechanik, welche von physikalischer Erfahrung abhängt, diejenigen Beziehungen vorausgeschickt habe, welche allein Folge der gewählten Definitionen und mathematischer Notwendigkeit sind, und welche, wenn überhaupt, so doch jedenfalls in anderm Sinne als jene mit der Erfahrung zusammenhängen. Nichts hindert übrigens den Leser, mit dem zweiten Buche zu beginnen. Die durchsichtige Analogie mit der Mechanik des einzelnen Punktes und der bekannte Stoff werden ihn den Sinn der vorgetragenen Sätze leicht erraten lassen. Hat er der benutzten Redeweise Zweckmäßigkeit zugebilligt, so ist immer noch Zeit, daß er sich aus dem ersten Buche von ihrer Zulässigkeit überzeuge.

Wenden wir uns jetzt der zweiten wesentlichen Forderung zu, welcher unser Bild zu genügen hat, so ist es zunächst unzweifelhaft, daß das System sehr viele natürliche Bewegungen richtig darstellt. Allein nach den Ansprüchen des Systems genügt dies nicht; es muß als notwendige Ergänzung die Behauptung dahin erweitert werden, daß das System alle natürlichen Bewegungen ohne Ausnahme umfasse. Auch dies kann man, denke ich, behaupten, wenigstens in dem Sinne, daß sich zurzeit keine bestimmten Erscheinungen angeben lassen, welche dem System nachweislich widersprechen. Es ist freilich klar, daß die Ausdehnung auf alle Erscheinungen einer scharfen Prüfung nicht zugänglich ist, daß daher das System über das Ergebnis sicherer Erfahrung ein wenig hinausgeht und also den Charakter einer Hypothese trägt, welche ver-



suchsweise angenommen wird und auf plötzliche Widerlegung durch ein einziges Beispiel oder allmähliche Bestätigung durch sehr viele Beispiele wartet. Vornehmlich sind es zwei Stellen, an welchen ein Hinausgehen über sichere Erfahrung stattfindet: Die eine betrifft unsere Beschränkung der möglichen Zusammenhänge, die andere betrifft die dynamische Erklärung der Kräfte. Mit welchem Rechte können wir versichern, daß alle Zusammenhänge der Natur durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sich ausdrücken lassen? Diese Annahme ist für uns nicht eine nebensächliche, welche wir auch fallen lassen könnten; mit ihr fiel unsere Mechanik; denn es fragt sich, ob auf Verbindungen allgemeinsten Art unser Grundgesetz anwendbar bliebe. Und doch sind Verbindungen allgemeinerer Art nicht nur vorstellbar, sie werden auch in der gewöhnlichen Mechanik ohne Bedenken zugelassen. Dort hindert uns nichts, die Bewegung eines Punktes zu untersuchen, dessen Bahn der einzigen Beschränkung unterworfen ist, daß sie mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bilde, oder daß ihr Krümmungshalbmesser beständig einer gegebenen anderen Länge proportional sei. Diese Bedingungen fallen schon nicht mehr unter diejenigen, welche unsere Mechanik zuläßt. Woher nehmen wir aber die Gewißheit, daß sie auch durch die Natur der Dinge ausgeschlossen seien? Wir können erwidern, daß man vergeblich versuche, diese und ähnliche Verbindungen durch ausführbare Mechanismen zu verwirklichen, und wir können uns in dieser Ansicht auf die gewaltige Autorität von HELMHOLTZs berufen. Aber in jedem Beispiel können Möglichkeiten übersehen worden sein, und noch so viele Beispiele würden nicht hinreichen, die allgemeine Behauptung zu erweisen. Mit mehr Recht können wir, wie mir scheint, als Grund unserer Überzeugung anführen, daß alle Verbindungen eines Systems, welche aus dem Rahmen unserer Mechanik heraustreten, in dem einen oder in dem andern Sinne eine unstetige Aneinanderreihung seiner möglichen Bewegungen bedeuten würden, daß es aber in der Tat eine Erfahrung allgemeinsten Art sei, daß die Natur im Unendlichkleinen überall und in jedem Sinne Stetigkeit aufweise, eine Erfahrung, die sich in dem alten Satze „natura non facit saltus“ zu fester Überzeugung verdichtet hat. Ich habe des-



halb auch im Texte Wert darauf gelegt, die zugelassenen Verbindungen allein durch ihre Stetigkeit zu definieren, und ihre Eigenschaft, sich durch Gleichungen bestimmter Form darstellen zu lassen, erst aus jener abzuleiten. Eigentliche Sicherheit wird indessen auch so nicht erlangt. Denn die Unbestimmtheit jenes alten Satzes läßt es zweifelhaft erscheinen, ob die Grenzen seiner berechtigten Tragweite hinreichend feststehen, und wie weit er überhaupt das Ergebnis wirklicher Erfahrung, wieweit das Ergebnis willkürlicher Voraussetzung ist. Am gewissenhaftesten wird es daher sein, zuzugeben, daß unsere Annahme über die zulässigen Verbindungen den Charakter einer versuchsweise angenommenen Hypothese trage. Ganz ähnlich liegen die Dinge in betreff der dynamischen Erklärung der Kräfte. Wir können allerdings zeigen, daß gewisse Klassen verborgener Bewegungen Kräfte erzeugen, welche, wie die Fernkräfte der Natur, sich mit beliebiger Annäherung als Ableitungen von Kräftefunktionen darstellen lassen. Es stellt sich auch heraus, daß die Formen dieser Kräftefunktionen sehr allgemeiner Natur sein können, und wir leiten in der Tat gar keine Einschränkungen derselben ab. Aber auf der anderen Seite bleiben wir auch den Beweis schuldig, daß sich jede beliebige Form der Kräftefunktionen erzielen läßt, und es bleibt daher die Frage offen, ob nicht etwa gerade eine der in der Natur vorkommenden Formen einer solchen Erklärungsweise sich entzieht. Es bleibt auch hier abzuwarten, ob die Zeit unsere Annahme widerlegen oder durch das Ausbleiben einer Widerlegung mehr und mehr wahrscheinlich machen wird. Ein gutes Vorzeichen können wir darin sehen, daß die Ansicht vieler ausgezeichneten Physiker sich der Hypothese immer mehr zuneigt. Ich erinnere nochmals an die Wirbeltheorie der Atome von Lord KELVIN, welche uns ein Bild des materiellen Weltganzen vorführt, wie es mit den Prinzipien unserer Mechanik in vollem Einklange ist. Und doch verlangt unsere Mechanik keineswegs eine so große Einfachheit und Beschränkung der Voraussetzungen, wie sie sich Lord KELVIN auferlegt hat. Wir würden unsere Grundsätze noch nicht verlassen, wenn wir annähmen, daß die Wirbel um starre oder um biegsame, aber unausdehnbare Kerne kreisten, und auch das welt-erfüllende Medium könnten wir anstatt der bloßen Inkom-



pressibilität viel verwickelteren Bedingungen unterwerfen, deren allgemeinste Form noch zu untersuchen wäre. Es erscheint also keineswegs ausgeschlossen, daß wir mit den von unserer Mechanik zugelassenen Hypothesen zur Erklärung der Erscheinungen auch ausreichen.

Einen Vorbehalt müssen wir indessen hier einschalten. Es ist gewiß eine gerechtfertigte Vorsicht, wenn wir im Texte das Gebiet unserer Mechanik ausdrücklich beschränken auf die unbelebte Natur und die Frage vollkommen offen lassen, wie weit sich ihre Gesetze darüber hinaus erstrecken. In Wahrheit liegt die Sache ja so, daß wir weder behaupten können, daß die inneren Vorgänge der Lebewesen denselben Gesetzen folgen, wie die Bewegungen der leblosen Körper, noch auch behaupten können, daß sie anderen Gesetzen folgen. Der Anschein aber und die gewöhnliche Meinung spricht für einen grundsätzlichen Unterschied. Und dasselbe Gefühl, welches uns antreibt, aus der Mechanik der leblosen Welt jede Andeutung einer Absicht, einer Empfindung, der Lust und des Schmerzes, als fremdartig auszuschneiden, dasselbe Gefühl läßt uns Bedenken tragen, unser Bild der belebten Welt dieser reicheren und bunteren Vorstellungen zu berauben. Unser Grundgesetz, vielleicht ausreichend die Bewegung der toten Materie darzustellen, erscheint wenigstens der flüchtigen Schätzung zu einfach und zu beschränkt, um die Mannigfaltigkeit selbst des niedrigsten Lebensvorganges wiederzugeben. Daß dem so ist, scheint mir nicht ein Nachteil, sondern eher ein Vorzug unseres Gesetzes. Eben weil es uns gestattet das Ganze der Mechanik umfassend zu überblicken, zeigt es uns auch die Grenzen dieses Ganzen. Eben weil es uns nur eine Tatsache gibt, ohne derselben den Schein der Notwendigkeit beizulegen, läßt es uns erkennen, daß alles auch anders sein könnte. Vielleicht wird man solche Erörterungen an dieser Stelle für überflüssig halten. In der Tat ist man auch nicht gewöhnt, sie in der gewöhnlichen Darstellung der Mechanik bei den Elementen behandelt zu sehen. Aber dort gewährt die völlige Unbestimmtheit der eingeführten Kräfte noch einen weiten Spielraum. Man behält sich stillschweigend vor, später etwa einen Gegensatz zwischen den Kräften der belebten und



der unbelebten Natur festzustellen. In unserer Darstellung ist das betrachtete Bild von vornherein so scharf umrissen, daß sich nachträglich kaum mehr tief eingreifende Einteilungen werden vornehmen lassen. Wollen wir daher die aufgeworfene Frage nicht überhaupt ignorieren, so müssen wir gleich im Eingang Stellung zu derselben nehmen.

Über die Zweckmäßigkeit unseres dritten Bildes können wir uns ziemlich kurz fassen. Wir können aussagen, daß dieselbe, wie der Inhalt des Buches zeigen soll, nach Deutlichkeit und Einfachheit etwa derjenigen gleichkommt, welche wir dem zweiten Bilde zusprachen, und daß wir dieselben Vorzüge, welche wir dort rühmten, auch hier hervorheben können. Allerdings ist der Umkreis der zugelassenen Möglichkeiten hier nicht ganz so eng gezogen wie dort, da diejenigen starren Verbindungen, deren Fehlen wir dort hervorhoben, hier durch die Grundannahmen nicht ausgeschlossen sind. Aber diese Erweiterung entspricht der Natur und ist daher ein Vorzug; auch hindert sie nicht, die allgemeinen Eigenschaften der natürlichen Kräfte herzuleiten, in welchen die Bedeutung des zweiten Bildes lag. Einfachheit besteht hier wie dort zunächst im Sinne der physikalischen Anwendung. Auch hier können wir unsere Betrachtung auf beliebige der Beobachtung zugängliche Merkmale der materiellen Systeme beschränken, und aus ihren vergangenen Veränderungen durch Anwendung des Grundgesetzes die zukünftigen ableiten, ohne daß wir nötig hätten, die Lagen aller Einzelmassen des Systems zu kennen, und ohne daß wir nötig hätten, diese Unkenntnis durch willkürliche, einflußlose und wahrscheinlich falsche Hypothesen zu überdecken und zu bemänteln. Im Gegensatz zum zweiten Bilde besitzt aber unser drittes Einfachheit auch in dem Sinne, daß sich seine Vorstellungen der Natur so anschmiegen, daß die wesentlichen Beziehungen der Natur durch einfache Beziehungen zwischen den Begriffen wiedergegeben werden. Das zeigt sich nicht nur im Grundgesetze selbst, sondern auch in den zahlreichen allgemeinen Folgerungen desselben, welche den sogenannten Prinzipien der Mechanik entsprechen. Es muß allerdings zugegeben werden, daß diese Einfachheit nur eintritt, so lange wir es



mit vollständig bekannten Systemen zu tun haben, und daß sie wieder verschwindet, sobald verborgene Massen sich einmischen. Aber in diesen Fällen liegt dann auch der Grund der Verwickelung klar auf der Hand; wir verstehen, daß der Verlust der Einfachheit nicht in der Natur, sondern in unserer mangelhaften Kenntnis derselben beruht; wir begreifen, daß die eintretenden Komplikationen nicht allein eine mögliche, sondern die notwendige Folge unserer besonderen Voraussetzungen sind. Auch das muß zugegeben werden, daß die Mitwirkung verborgener Massen, welche vom Standpunkte unserer Mechanik aus der entlegene und besondere Fall ist, daß diese Mitwirkung gerade der gewöhnliche Fall der Probleme des täglichen Lebens und der Technik ist. Daher ist es auch nützlich, hier nochmals zu betonen, daß wir von einer Zweckmäßigkeit überhaupt nur geredet haben in einem besonderen Sinne, nämlich im Sinne eines Geistes, welcher ohne Rücksicht auf die zufällige Stellung des Menschen in der Natur das Ganze unserer physikalischen Erkenntnis objektiv zu umfassen und in einfacher Weise darzustellen sucht; daß wir aber keineswegs redeten von einer Zweckmäßigkeit im Sinne der praktischen Anwendung und der Bedürfnisse des Menschen. In betreff dieser letzteren kann die für sie ausdrücklich erdachte gewöhnliche Darstellung der Mechanik wohl niemals durch eine zweckmäßigere ersetzt werden. Zu dieser Darstellung verhält sich die von uns hier vorgeführte etwa wie die systematische Grammatik einer Sprache zu einer Grammatik, welche den Lernenden möglichst bald erlauben soll, sich über die Notwendigkeiten des täglichen Lebens zu verständigen. Man weiß, wie verschieden die Anforderungen an beide sind, und wie verschieden ihre Anordnungen ausfallen müssen, wenn beide ihrem Zweck so genau wie möglich entsprechen sollen.



Blicken wir zum Schlusse noch einmal zurück auf die drei Bilder der Mechanik, welche wir vorgeführt haben und suchen wir einen letzten und endgültigen Vergleich zwischen ihnen anzustellen. Das zweite Bild lassen wir nach dem, was wir gesagt haben, fallen. Das erste und dritte Bild wollen wir gleichstellen in bezug auf die Zulässigkeit, indem wir annehmen, daß dem ersten Bilde eine in logischer Hinsicht vollständig befriedigende Gestalt gegeben sei, wie wir angenommen haben, daß sie gegeben werden könne. Wir wollen beide Bilder auch gleichstellen in bezug auf die Zweckmäßigkeit, indem wir annehmen, daß man das erste Bild durch geeignete Zusätze ergänzt habe und indem wir annehmen, daß die nach verschiedener Richtung gehenden Vorzüge einander das Gleichgewicht halten. Dann bleibt als einziger Wertmaßstab die Richtigkeit der Bilder, welche durch die Gewalt der Dinge bestimmt ist, und welche nicht in unserer Willkür liegt. Und hier machen wir nun die wichtige Bemerkung, daß nur das eine oder das andere jener Bilder, nicht aber beide gleichzeitig richtig sein können. Denn suchen wir die wesentlichen Beziehungen beider Darstellungen auf ihren kürzesten Ausdruck zu bringen, so können wir sagen: Das erste Bild nehme als letzte konstante Elemente in der Natur die relativen Beschleunigungen der Massen gegeneinander an, aus diesen leite sie gelegentlich angenähert, aber auch nur angenähert feste Verhältnisse zwischen den Lagen ab. Das dritte Bild aber nehme als die streng veränderlichen Elemente der Natur feste Verhältnisse zwischen den Lagen an, aus diesen leite sie, wo die Erscheinungen es erfordern, angenähert, aber auch nur angenähert unveränderliche relative Beschleunigungen zwischen den Massen her. Könnten wir nun die Bewegungen der Natur nur genau genug erkennen, so wüßten wir sogleich, ob in ihnen die relative Beschleunigung oder ob die relativen Lagenverhältnisse der Massen oder ob beide nur angenähert unveränderlich sind. Wir wüßten dann auch sogleich, welche von unseren beiden Annahmen falsch ist oder ob beide falsch sind, denn richtig können nicht beide gleichzeitig sein. Die größte Einfachheit steht auf seiten des dritten Bildes. Was uns zwingt, gleichwohl zunächst zugunsten des ersten zu



entscheiden, ist der Umstand, daß wir wirklich in den Fernkräften relative Beschleunigungen aufweisen können, welche bis an die Grenze unserer Beobachtung unveränderlich scheinen, während alle festen Verbindungen zwischen den Lagen der greifbaren Körper schon innerhalb der Wahrnehmung unserer Sinne sich schnell nur angenähert als konstant erweisen. Aber dies Verhältnis ändert sich zugunsten des dritten Bildes sobald die verfeinerte Erkenntnis uns etwa zeigt, daß die Annahme unveränderlicher Fernkräfte nur eine erste Annäherung an die Wahrheit liefert, welcher Fall in dem Gebiete der elektrischen und magnetischen Kräfte bereits eingetreten ist. Und die Wage schlägt vollends über zugunsten des dritten Bildes, sobald eine zweite Annäherung an die Wahrheit dadurch erzielt werden kann, daß man die vermeintliche Wirkung der Fernkräfte zurückführt auf Bewegungsvorgänge in einem raumerfüllenden Mittel, dessen kleinste Teile starren Verbindungen unterliegen, ein Fall, der gleichfalls in dem erwähnten Gebiete nahezu verwirklicht erscheint. Hier also liegt das Feld, auf welchem auch der Entscheidungskampf zwischen den verschiedenen von uns betrachteten Grundannahmen der Mechanik ausgefochten werden muß. Die Entscheidung selbst aber setzt voraus, daß vorher die vorhandenen Möglichkeiten nach allen Richtungen hin gründlich erwogen seien. Sie nach einer besonderen Richtung zu entwickeln, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Diese Arbeit ist also notwendig gewesen, auch wenn es noch lange dauern sollte, bis eine Entscheidung möglich ist, und auch dann, wenn diese Entscheidung schließlich zuungunsten des hier ausführlich entwickelten Bildes ausfallen sollte.



