Gesammelte Werke

Untersuchungen über sie Ausbreitung der elektrischen Kraft

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1984

14. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper

14. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper.

(Wiedemann's Ann. 41. p. 369. 1890.)

Eine Darstellung der elektrodynamischen Vorgänge in ruhenden Körpern, welche ich vor kurzem veröffentlichte,[1]) fiel dem Inhalte nach zusammen mit der Theorie Maxwell's, genügte aber in Hinsicht der Form grösseren Ansprüchen an systematische Ordnung. Von vornherein und mit Strenge war die Anschauung zur Geltung gebracht, dass elektrische und magnetische Kräfte in jedem Punkte ihrer Wirksamkeit besonderen Zuständen des daselbst befindlichen raumerfüllenden Mittels entsprechen und dass die Ursachen, welche das Zustandekommen und die Aenderungen dieser Zustände bedingen, unter Ausschluss jeder Fernwirkung lediglich in den Verhältnissen der unmittelbaren Nachbarschaft zu suchen seien. Es war weiter vorausgesetzt worden, dass der elektrische und magnetische Zustand des raumerfüllenden Mittels für jeden Punkt vollständig bestimmt sei durch je eine einzige Richtungsgrösse und es hatte sich gezeigt, dass die Beschränkung, welche in dieser Voraussetzung liegt, nur minder bedeutungsvolle Erscheinungen von der Betrachtung ausschloss. Die Einführung von Potentialen in die Grundgleichungen war vermieden.

Es tritt nun die Frage auf, ob unter strenger Festhaltung an den gleichen Anschauungen und an den gleichen Beschränkungen die Theorie so erweitert werden könne, dass sie auch den Ablauf der elektrodynamischen Erscheinungen in bewegten

---

[1]) Siehe No. 13. p. 208.

Körpern umfasst. Wir beachten zunächst, dass wenn von bewegten Körpern schlechthin die Rede ist, wir stets nur an die Bewegung der ponderabelen Materie denken. Die gleichzeitig eintretenden Bewegungen des Aethers aber können nach unserer Anschauung nicht ohne Einfluss sein und von diesen haben wir keine Kenntniss. Damit ist schon gesagt, dass ohne die Einführung willkürlicher Annahmen über die Bewegung des Aethers die aufgeworfene Frage zur Zeit überhaupt nicht behandelt werden könne. Es lassen uns ferner die wenigen vorliegenden Andeutungen über die Bewegung des Aethers vermuthen, dass die gestellte Frage streng genommen zu verneinen sei. Es scheint nämlich aus den vorhandenen Andeutungen hervorzugehen, dass der Aether auch im Inneren der greifbaren Materie sich unabhängig von dieser bewege; diese Vorstellung ist sogar kaum zu umgehen angesichts der Thatsache, dass wir aus keinem umschlossenen Raume den Aether entfernen können. Wollen wir nun dieser Vorstellung unsere Theorie anpassen, so haben wir in jedem Punkte des Raumes die elektromagnetischen Zustände des Aethers und der greifbaren Materie in gewissem Sinne als unabhängig zu betrachten. Die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern gehören alsdann zur Classe derjenigen, welche sich nicht bewältigen lassen, ohne die Einführung mindestens je zweier Richtungsgrössen für den elektrischen und den magnetischen Zustand.

Anders liegt die Sache, wenn wir uns ausgesprochenermaassen begnügen, die elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne in dem Umfange darzustellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind. Wir dürfen behaupten, dass unter den so eingeschränkten Erscheinungen sich keine findet, welche uns zwingt, eine von der ponderabeln Materie unabhängige Bewegung des Aethers im Inneren derselben zuzugeben; es geht dies schon aus dem Umstande hervor, dass aus dieser Classe von Erscheinungen ein Anhalt über die Grösse der gegenseitigen Verschiebung nicht gewonnen wird. Wenigstens die eigentlichen elektrischen und magnetischen Erscheinungen müssen sich also vertragen mit der Vorstellung, dass eine solche Verschiebung überhaupt nicht stattfindet, dass vielmehr der hypothetisch im Inneren der ponderabeln Materie vorausgesetzte Aether sich nur zugleich mit dieser bewege.

Diese Vorstellung schliesst die Möglichkeit ein, in jedem Punkte des Raumes nur die Zustände eines einzigen raumerfüllenden Mittels in Betracht zu ziehen, sie gestattet hierdurch, die aufgeworfene Frage zu bejahen. Wir adoptiren sie für die vorliegende Abhandlung. Die auf solcher Grundlage aufgebaute Theorie wird dann freilich nicht den Vorzug besitzen, auf jede ihr vorgelegte Frage die richtige oder auch nur eine bestimmte Antwort zu geben; sie giebt aber wenigstens auf jede ihr vorgelegte Frage mögliche Antworten an, d. h. Antworten, welche weder mit den beobachteten Erscheinungen, noch mit den an ruhenden Körpern gewonnenen Anschauungen in Widerspruch treten.

Wir setzen also voraus, dass dem raumerfüllenden Mittel in jedem Punkte eine einzige bestimmte Geschwindigkeit beizulegen sei, deren Componenten in Richtung der x, y, z wir mit α, β, γ bezeichnen. Wir sehen diese Grössen überall als endlich an und behandeln sie als stetig von Punkt zu Punkt veränderlich. Unstetige Aenderungen lassen wir zwar auch zu, behandeln sie aber nur als den Grenzfall einer sehr schnellen stetigen Aenderung. Ausserdem unterwerfen wir jede zulässige Unstetigkeit der Beschränkung, dass sie nirgends zur Bildung leerer Räume führen darf; diese Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die drei Differentialquotienten $d\alpha/dx$, $d\beta/dy$, $d\gamma/dz$ überall endlich bleiben. Wo wir im Raum greifbare Materie finden, entnehmen wir der Bewegung dieser eindeutig die Werthe der α, β, γ. Wo wir im Raume greifbare Materie nicht vorfinden, dürfen wir den α, β, γ jeden willkürlichen Werth beilegen, welcher mit den gegebenen Bewegungen an der Grenze des leeren Raumes vereinbar und von gleicher Grössenordnung ist. Wir dürfen z. B. für α, β, γ diejenigen Werthe setzen, welche sich im Aether finden würden, wenn sich derselbe wie irgend ein beliebig gewähltes Gas bewegte. Im übrigen sollen sämmtliche Bezeichnungen der vorhergehenden Arbeit hier in gleicher Bedeutung übernommen werden. Elektrische und magnetische Kraft betrachten wir hier als Zeichen für den Zustand der bewegten Materie in gleichem Sinne, in welchem wir sie früher als Zeichen für die Zustände der ruhenden Materie betrachteten. Elektrische und magnetische Polarisation gelten uns nur als ein zweites gleichwerthiges Mittel, dieselben Zustände zu bezeichnen.

Auch den Kraftlinien, durch welche wir diese Polarisationen darstellen, legen wir keine andere Bedeutung bei.

1. Aufstellung der Grundgleichungen für bewegte Körper.

In einem jeden Punkte eines ruhenden Körpers ist die zeitliche Aenderung des magnetischen Zustandes lediglich bedingt durch die Vertheilung der elektrischen Kraft in der Nachbarschaft des Punktes. In einem bewegten Körper kommt zu dieser Aenderung eine zweite, welche sich der ersteren in jedem Augenblick überdeckt und welche von der Verzerrung herrührt, welche die Nachbarschaft des betrachteten Punktes bei der Bewegung erleidet. Wir behaupten nun, es sei der Einfluss der Bewegung derart, dass, wenn er allein wirksam wäre, er die magnetischen Kraftlinien mit der Materie fortführen würde. Oder genauer bestimmt: Denken wir uns in einem bestimmten Augenblicke den magnetischen Zustand der Substanz nach Richtung und Grösse dargestellt durch ein System von Kraftlinien, so würde ein durch die nämlichen materiellen Punkte gelegtes System von Kraftlinien auch in jedem späteren Augenblick den magnetischen Zustand nach Richtung und Grösse darstellen, wenn nämlich der Einfluss der Bewegung allein zur Geltung käme. Die entsprechende Aussage gilt für die Aenderung, welche die elektrische Polarisation durch die Bewegung erleidet. Diese Aussagen reichen hin, um die für ruhende Körper entwickelte Theorie auf bewegte Körper auszudehnen, sie genügen offenbar den Anforderungen, welche unser System an sie stellt und es wird sich zeigen, dass sie die beobachteten Thatsachen enthalten.[1])

Um zunächst unsere Behauptung in Zeichen zu kleiden, fassen wir während eines Zeitelementes dt ein kleines Flächenstück im Inneren der bewegten Materie ins Auge, welches im Beginn des betrachteten Zeitelementes der yz-Ebene parallel liegt und während der Bewegung sich mit der Materie verschiebt und verzerrt. Wir ziehen die magnetischen Kraftlinien in solcher Dichte, dass im Beginn der Zeit dt das betrachtete Flächenstück von der Anzahl $\mathfrak{L}$ derselben durchsetzt wird. Ueberall und stets ist dann durch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Kraftlinien zu bezeichnen, welche ein gleich grosses, beziehlich der yz, xz, xy-Ebene

[1]) [Siehe Anmerkung 33 am Schluss des Buches.]

paralleles Flächenstück durchschneiden. Die Zahl der Kraftlinien, welche unser besonderes Flächenstück durchsetzen, ändert sich nun aus verschiedenen Ursachen; wir wollen den Beitrag, welchen jede einzelne Ursache liefert, gesondert betrachten. Insofern erstens die genannte Anzahl sich verändern würde, wenn auch das Flächenstück in seiner ursprünglichen Lage verharrte, beträgt die Aenderung $d\mathfrak{L}\,/\,dt\,.\,dt$, wenn wir nämlich mit dem Symbol $d\mathfrak{L}\,/\,dt$ die Aenderungsgeschwindigkeit von $\mathfrak{L}$ in einem Punkte bezeichnen, welcher in Bezug auf unser Coordinatensystem ruht. Insofern zweitens das Flächenelement mit der Geschwindigkeit α, β, γ zu Orten fortgetragen wird, an welchen andere Werthe des $\mathfrak{L}$ herrschen, beträgt die Aenderungsgeschwindigkeit $(\alpha d\mathfrak{L}/dx + \beta d\mathfrak{L}/dy + \gamma d\mathfrak{L}/dz)\,dt$. Insofern sich drittens die Ebene des Elementes mit der Geschwindigkeit $d\alpha\,/\,dy$ um die z-Axe und mit der Geschwindigkeit $d\alpha\,/\,dz$ um die y-Axe dreht, werden Kraftlinien in das Element aufgenommen, welche ursprünglich demselben parallel waren, es beträgt der Beitrag aus dieser Quelle $-\,(\mathfrak{M} d\alpha\,/\,dy + \mathfrak{N} d\alpha\,/\,dz)dt$. Endlich vergrössert das Element seinen Inhalt mit der Geschwindigkeit $d\beta\,/\,dy + d\gamma\,/\,dz$ und wächst hierdurch die betrachtete Zahl um den Betrag $\mathfrak{L}(d\beta/dy + d\gamma/dz)\,dt$. Sind die aufgezählten Beiträge sämmtlich Null, so ist eine Aenderung der betrachteten Zahl nicht möglich, wir haben also die Ursachen der Aenderung erschöpft und da sämmtliche Beiträge sehr klein sind, so entspricht ihre Summe der Gesammtänderung. Wir können aber diese letztere auch in anderer, mehr physikalischer Weise zerlegen, nämlich in den Beitrag, welchen das Vorhandensein der elektrischen Kräfte in der Nachbarschaft allein und den Beitrag, welchen die Bewegung allein hervorbringen würde, wenn jedesmal die andere dieser Ursachen fehlte. Nach den für ruhende Leiter geltenden Gesetzen ist der erstere Beitrag gleich $1\,/\,A\,.\,(dZ\,/\,dy - dY\,/\,dz)dt$; der letztere ist nach unserer neu hinzugetretenen Behauptung gleich Null; der erstere allein stellt also schon die Gesammtänderung dar. Wir setzen die beiden für die Gesammtänderung erhaltenen Ausdrücke einander gleich, dividiren durch dt, multipliciren mit A, addiren und subtrahiren die Glieder $\alpha d\mathfrak{M}/dy + \alpha d\mathfrak{N}/dz$, ordnen in zweckmässiger Weise und erhalten so, indem wir die gleichen Ueberlegungen auch für die übrigen Componenten der magnetischen und für die Componenten der elektrischen Kraft durchführen, das folgende System der Grundgleichungen für bewegte Körper:

$$
(1_a)\left\{\begin{aligned}
&A\left\{\frac{d\mathfrak{L}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})+\alpha\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{M}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})-\frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})+\beta\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx},\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{N}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L}-\frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(1_b)\left\{\begin{aligned}
&A\left\{\frac{d\mathfrak{X}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})+\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi Au,\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})-\frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})+\beta\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}-4\pi Av,\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}-4\pi Aw.
\end{aligned}\right.
$$

zu deren Vervollständigung die linearen Beziehungen gehören, welche die Polarisationen und die Strömungscomponenten mit den Kräften verbinden. Die Constanten dieser Relationen sind als Functionen der sich ändernden Zustände der bewegten Materie und insofern auch als Functionen der Zeit zu betrachten.[1])

Unsere Ableitung der Gleichungen (1_a) und (1_b) erforderte nicht, dass das benutzte Coordinatensystem absolut im Raume ruhte. Wir können daher unsere Gleichungen von dem zuerst gewählten Coordinatensystem ohne Aenderung der Form auf jedes beliebige andere, im Raume beliebig bewegte Coordinatensystem dadurch transformiren, dass wir unter α, β, γ die rela-

[1]) [Siehe Anmerkung 34 am Schluss des Buches.]

tiven Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das neugewählte Coordinatensystem verstehen, und ebenso die von der Richtung abhängenden Constanten ε, μ, λ, X', Y', Z' in jedem Augenblicke auf dieses beziehen. Daraus geht hervor, dass die absolute Bewegung eines starren Körpersystems keinen Einfluss auf irgend welche inneren elektrodynamischen Vorgänge in demselben habe, sofern nur wirklich alle in Betracht kommenden Körper, also auch der Aether, an der Bewegung theilnehmen. Es geht ferner aus dieser Ueberlegung hervor, dass wenn sich auch nur ein einzelner Theil eines bewegten Systems bewegt wie ein starrer Körper, dass dann in diesem Theile sich die Vorgänge gerade so abspielen, als wie in ruhenden Körpern. Hat also die vorhandene Bewegung dennoch einen Einfluss auf diesen Theil, so kann doch dieser Einfluss nur entstanden sein in denjenigen Gebieten des Systems, in welchen Verzerrungen der Elemente stattfinden und muss sich von dort secundär fortgepflanzt haben zu denjenigen Gebieten, welche sich nach Art starrer Körper bewegen. Wird beispielsweise eine feste Metallmasse im magnetischen Felde plötzlich verschoben, so hat nach unseren Gleichungen diese Bewegung unmittelbar, d. h. gleichzeitig nur auf die Oberfläche und die Umgebung der Metallmasse einen Einfluss und ruft hier elektrische Kräfte hervor, welche sich dann secundär, d. h. etwas später in das Innere der Masse fortpflanzen und hier Strömungen erzeugen.

Die aufgestellten Gleichungen sind nach Form und Absicht verwandt mit denjenigen, durch welche von Helmholtz im 78. Bande des Borchardt'schen Journals das Verhalten der elektrischen und magnetischen Kräfte in bewegten Körpern darstellte.[1]) Die Bezeichnungen sind zum Theil von dort entlehnt. Doch sind unsere Gleichungen von den dort gegebenen nicht etwa nur der Form nach verschieden, vielmehr auch dem Inhalt nach hinsichtlich solcher Glieder, welche bisher an der Erfahrung nicht geprüft werden können. Maxwell selbst scheint mir von einer consequenten Einreihung der Erscheinungen in bewegten Körpern in sein System abgesehen zu haben.[2]) Die zahlreichen

[1]) v. Helmholtz. Ges. Abhandl. 1. p. 745, Borchardt's Journ. f. Mathem. 78. p. 273. 1874.

[2]) [Siehe Anmerkung 35 am Schluss des Buches.]

Betrachtungen, welche er derartigen Erscheinungen widmet, beschränken sich auf Fälle, oder begnügen sich mit Annäherungen, welche eine Unterscheidung zwischen den Theorien der Fernkräfte und denen der vermittelten Wirkung nicht nöthig machen.

2. Physikalische Bedeutung der einzelnen Glieder.

Die Gleichungen (1_a) und (1_b) geben uns den zukünftigen Werth der Polarisationen in jedem festen Punkte des Raumes oder, wenn wir lieber wollen, in jedem Theilchen der bewegten Materie als eindeutig bestimmte Folgeerscheinung der gegenwärtigen elektromagnetischen Zustände und der gegenwärtigen Bewegung in der Nachbarschaft des betrachteten Punktes. Dies ist nach der Anschauung unseres Systemes die physikalische Bedeutung derselben. Ganz anders fasst die übliche Anschauung die durch jene Gleichungen gegebene Verknüpfung auf. Sie sieht in den linksstehenden Aenderungsgeschwindigkeiten der Polarisationen die Ursache, in den rechtsstehenden inducirten Kräften die Folgeerscheinung. Entstanden ist diese Vorstellung durch den Umstand, dass uns die Polarisationen und ihre Aenderungen meist eher und deutlicher bekannt werden, als die gleichzeitig stattfindenden Kräfte, dass also die linken Seiten der Gleichungen in Hinsicht unserer Kenntniss das frühere sind. Es hat auch diese Vorstellung sehr grosse Vortheile in den uns am meisten interessirenden Fällen; vom allgemeinen Standpunkte aus aber begegnet sie dieser Schwierigkeit, dass die Kräfte nicht eindeutig durch die Aenderungsgeschwindigkeiten der Polarisationen entgegengesetzter Art bestimmt sind, sondern von diesen Aenderungen unabhängige Summanden enthalten. Die übliche Theorie hilft sich, indem sie diese Summanden als elektrostatische oder magnetische Kräfte den ihrer Angabe nach durch unsere Gleichungen allein bestimmten elektrodynamischen Kräften entgegenstellt. Obwohl wir eine solche Sonderung nicht billigen und daher die übliche Vorstellung über den Causalzusammenhang nicht annehmen können, ist es doch nicht ohne Interesse, zu zeigen, in welcher Weise in den einzelnen Gliedern unserer Gleichungen die von der üblichen Theorie eingeführten Partialkräfte enthalten sind. Zu dem Ende zerlegen wir die Kräfte in der Form $X = X_1 + X_2$ etc., $L = L_1 + L_2$ etc. und setzen:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = A\,(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{N}), & L_1 = A\,(\beta\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{Y}), \\ Y_1 = A\,(\alpha\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{L}), & M_1 = A\,(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z}), \\ Z_1 = A\,(\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M}), & N_1 = A\,(\alpha\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{X}), \end{cases}$$

wodurch wir dann für die X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2 Gleichungen erhalten, welche aus den für X, Y, Z, L, M, N bestehenden Gleichungen (1_a) und (1_b) durch Weglassung der zweiten und dritten Glieder der linken Seiten hervorgehen. Nun ist zunächst die Resultante der X_1 Y_1 Z_1 eine elektrische Kraft, welche auftritt, sobald ein Körper sich im magnetischen Felde bewegt. Sie steht senkrecht auf der Richtung der Bewegung und der Richtung der magnetischen Kraftlinien, es ist diejenige Kraft, welche in engerem Sinne als die durch Bewegung inducirte elektromotorische Kraft bezeichnet zu werden pflegt. Wir heben hervor, dass die Absonderung derselben aus der Gesammtkraft nach unseren Anschauungen schon deshalb eine physikalische Bedeutung nicht haben kann, weil dieser Anschauung die Vorstellung widerspricht, als könne das magnetische Feld als solches im Inneren eines Körpers eine relative Bewegung gegen denselben besitzen. Ein Gegenstück der Kraft X_1 Y_1 Z_1 ist die Kraft L_1 M_1 N_1, welche sich in einem Nichtleiter bemerkbar machen muss, sobald derselbe durch die Kraftlinien eines elektrischen Feldes bewegt wird; dieselbe ist noch durch keine Erfahrung bestätigt und fehlt in der älteren Elektrodynamik.

Wenden wir weiter unsere Aufmerksamkeit der Resultanten der L_2 M_2 N_2 zu und denken uns zu dem Zwecke die allgemeinen Lösungen der für diese Grössen bestehenden Gleichungen dargestellt als Functionen der Grössen

$$u,\ d\mathfrak{X}\,/\,dt,\ \alpha\,(d\mathfrak{X}\,/\,dx + d\mathfrak{Y})\,/\,dy + d\mathfrak{Z}\,/\,dz)\ \text{etc.}$$

Setzen wir diese letzteren Grössen in den Functionen sämmtlich gleich Null, so bleibt ein erster Theil der Kraft übrig, welcher nicht von elektrodynamischen Ursachen herrührt. Seine Componenten besitzen nothwendigerweise ein Potential, er stellt diejenige Fernkraft dar, welche nach der älteren Anschauung von magnetischen Massen ausgeht. Ein zweiter Theil der Kraft wird gegeben durch denjenigen Theil der Functionen, welcher zugleich und nur zugleich mit den u, v, w verschwindet. Er enthält die magnetische Fernkraft, welche von den eigentlichen elektrischen Strömen auszugehen scheint. Den ganzen elektrodynamischen

Theil der Kraft L_2 M_2 N_2 erhalten wir, wenn wir in dem Ausdruck des zweiten Theiles die Grösse $4\pi A u$ ersetzen durch die Grösse:

$$4\pi A u + A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + A\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

und entsprechend mit den v, w verfahren. Es entspricht dies der Aussage, dass in Hinsicht der Erzeugung einer magnetischen Fernkraft dem eigentlichen Strome gleich zu achten sei erstens die Veränderung einer elektrischen Polarisation, zweitens die convective Bewegung wahrer Elektricität. Der letzte Theil dieser Aussage findet in dem Rowland'schen Versuche die gewünschte Bestätigung.

Endlich beachten wir die Kraft X_2 Y_2 Z_2. Es lässt sich zunächst auch aus dieser Kraft ein von den zeitlichen Veränderungen des Systems unabhängiger Theil absondern, welcher ein Potential besitzt und als elektrostatische Fernkraft behandelt wird. Aus der übrig bleibenden elektrodynamischen Kraft lässt sich ein zweiter Theil ablösen, welcher zugleich und nur zugleich mit den Grössen $d\mathfrak{L}/dt$, $d\mathfrak{M}/dt$, $d\mathfrak{N}/dt$ verschwindet. Er stellt offenbar die Inductionskraft dar, welche von veränderlichen magnetischen Momenten herrührt, aber er enthält in versteckter Form auch diejenige elektrische Kraft, welche veränderlichen Strömen ihr Dasein verdankt. Endlich bleibt übrig ein dritter und letzter Theil, welcher als eine durch convectiv bewegten Magnetismus erregte elektrische Kraft gedeutet werden und zur Erklärung gewisser Erscheinungen der unipolaren Induction herangezogen werden muss.

Diese Auseinandersetzungen zeigen, dass wir zu dem Gleichungssytem (1_a) und (1_b) auch dadurch hätten gelangen können, dass wir die Wirkung der von den älteren Theorien geforderten Einzelkräfte addirt und eine Reihe hypothetischer Glieder hinzugefügt hätten, welche an der vorhandenen Erfahrung weder bestätigt, noch widerlegt werden können. Der Weg, welchen wir beschritten haben, machte eine geringere Zahl unabhängiger Hypothesen nothwendig. Wir wenden uns nunmehr dazu, aus unseren Gleichungen die wichtigsten allgemeinen Aussagen abzuleiten.

3. Bewegung von Magneten und elektrostatisch geladenen Körpern.

Als unabhängige Ursachen für die Veränderung der elektrischen, bez. magnetischen Polarisation erscheinen in unserer Auffassung erstens die magnetischen, bez. elektrischen Kräfte, zweitens die Bewegung der materiellen Körper. Erstere Ursache allein bewirkt nach dem, was wir für ruhende Körper ableiteten, keine Verschiebung der wahren Elektricität in den nichtleitenden Körpern, keine Verschiebung des wahren Magnetismus überhaupt. Letztere Ursache bewirkt für sich allein wohl eine Verschiebung der Elektricität und des Magnetismus gegen den ruhenden Raum, aber sie vermag keine Verschiebung gegen die bewegte Materie zu bewirken, da diese Materie bei der Bewegung die Kraftlinien, als deren freie Enden Elektricität und Magnetismus betrachtet werden können, mit sich fortträgt. Es ist also auch, wenn beide Ursachen zusammenwirken, für den wahren Magnetismus überhaupt, für die wahre Elektricität wenigstens in den Nichtleitern eine relative Bewegung gegen die umgebende Materie ausgeschlossen; Elektricität und Magnetismus bewegen sich unter den genannten Umständen mit der Materie, in welcher sie sich finden, so, als ob sie unzerstörbar und fest an den Theilen derselben hafteten. Um die gleiche Ueberlegung in Zeichen durchzuführen, differentiiren wir das eine Mal die Gleichungen (1_a), das andere Mal die Gleichungen (1_b) beziehentlich nach $x\ y\ z$, und multipliciren mit dem als ruhend angesehenen Raumelement $d\tau$, auf welches sich die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ etc. beziehen. Wir verstehen noch unter $d\tau'$ ein Raumelement, welches zu jeder Zeit die im gegenwärtigen Augenblick in $d\tau$ enthaltene Materie umschliesst, wir nennen de' beziehentlich dm' die in $d\tau'$ enthaltene Menge der wahren Elektricität, beziehentlich des wahren Magnetismus und $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$ etc. die auf $d\tau'$ bezüglichen Werthe der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ etc. Wir erhalten so:

$$
(3_a)\quad
\left|
\begin{aligned}
&\int\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\Big)\\
&\qquad+\alpha\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\Big)+\beta\,\frac{d}{dy}\Big(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\Big)\\
&\qquad\qquad+\gamma\,\frac{d}{dz}\Big(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\Big)\\
&\qquad+\Big(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\Big)\Big(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\Big)\Big\}\,d\tau\\
&\qquad=\frac{d}{dt}\Big\{\int\Big(\frac{d\mathfrak{L}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}'}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}'}{dz}\Big)d\tau'\Big\}=4\pi\,\frac{dm'}{dt}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3_b)\quad
\left|
\begin{aligned}
&\int\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\Big)\\
&\qquad+\alpha\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\Big)+\beta\,\frac{d}{dy}\Big(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\Big)\\
&\qquad\qquad+\gamma\,\frac{d}{dz}\Big(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\Big)\\
&\qquad+\Big(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\Big)\Big(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\Big)\Big\}\,d\tau\\
&\qquad=\frac{d}{dt}\Big\{\int\Big(\frac{d\mathfrak{X}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}'}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}'}{dz}\Big)d\tau'\Big\}=4\pi\,\frac{de'}{dt}\\
&\qquad=4\pi\,\Big(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen enthalten unsere Aussage und ergänzen dieselbe hinsichtlich der Leiter. Sind die Geschwindigkeiten $\alpha\,\beta\,\gamma$ so klein, dass die elektrischen und magnetischen Zustände in jedem Augenblicke statischen Zuständen unendlich nahe bleiben können und beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher quasistatischen Zustände, so ist der gewonnene Lehrsatz hinreichend, aber auch nothwendig, um die Abhängigkeit der ineinander überführbaren Zustände voneinander zu bestimmen. Die Hinzufügung dieses Satzes erlaubt in derartigen Problemen die vollständigen, aber sehr complicirten Gleichungen (1_a) und (1_b) gleichwerthig zu ersetzen durch die sehr einfachen Gleichungen, welche für statische Probleme in ruhenden Körpern gelten und welche aus den Gleichungen (1_a) und (1_b) durch Nullsetzen der Geschwindigkeiten und der zeitlichen Aenderungen in allen Punkten des Raumes hervorgehen. Ohne den Begriff der Elektricität und des Magnetismus einzuführen, ist eine gleiche Vereinfachung der Aussagen nicht möglich, und hierin vor Allem scheint mir die Unentbehrlichkeit begründet, welche diese Begriffe für die Elektrostatik und die Darstellung der Erscheinungen an Magneten gewonnen haben.

4. Induction in geschlossenen Bahnen.

Die grössten Geschwindigkeiten, welche wir den uns umgebenden Körpern ertheilen können, sind noch so klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, mit deren reciprokem Werthe multiplicirt die α, β, γ in den Gleichungen (1_a) und (1_b) auftreten, dass eigentliche elektrodynamische Wirkungen der Bewegung nur in dem einzigen besonderen Falle der genaueren Untersuchung zugänglich werden, dass diese Wirkungen in der Induction eines elektrischen Stromes in einer geschlossenen metallischen Leitung bestehen. Um die Grösse solcher Wirkungen in geschlossenen Bahnen zu bestimmen, fassen wir ein beliebiges, nicht geschlossenes Flächenstück ω ins Auge, welches, im Inneren der betrachteten Materie gelegen, sich mit den bewegten materiellen Theilchen, durch welche es einmal geführt wurde, verschiebt. Die augenblickliche Grenzcurve dieses Flächenstückes heisse s. ζ' bedeute die Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche zu jeder Zeit die Fläche ω durchschneiden. Als unabhängig wirkende Ursachen, welche eine Aenderung von ζ' herbeiführen, sehen wir wiederum an: erstens die elektrischen Kräfte, zweitens die Bewegung der Materie. Würde erstere Ursache allein wirken, würde also das System ein ruhendes sein, so wäre die mit A multiplicirte Aenderungsgeschwindigkeit von ζ' gleich dem um den ganzen Umfang s genommenen Integral der elektrischen Kraft, das Integral genommen in einem Sinne, welcher von der Seite der positiven Normale aus gesehen, dem der Drehung des Uhrzeigers entspricht. Die Bewegung allein wirkend aber würde eine Aenderung von ζ' nicht zur Folge haben, da sie mit der Fläche ω auch die diese Fläche durchsetzenden Kraftlinien fortführte. Es ist also auch in dem wirklichen Falle des Zusammenwirkens beider Ursachen das um die beliebige geschlossene Curve s in dem angegebenen Sinne genommene Integral der elektrischen Kraft gleich der mit A multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche eine anfänglich durch die Curve s begrenzte, der Bewegung folgende, übrigens aber beliebige Fläche ω durchsetzen. Der Satz gilt auch in dem besonderen, aber für den Versuch einzig wichtigen Falle, dass die Curve s der Bahn eines linearen Leiters folgt und wird nicht ungültig dadurch, dass die Bewegung hinreichend langsam ist, um die entstehenden Zustände beständig als stationäre, den entstehenden Strom als gleichförmig in allen Theilen der Leitung s erscheinen zu lassen.

Um unsere Ueberlegung in Zeichen zu kleiden, nennen wir n',x, n',y, n',z die Winkel, welche in jedem Augenblick die Normale des Elementes $d\omega'$ der bewegten Fläche ω' mit den Axen bildet. $\mathfrak{L}'\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{N}'$ seien die Werthe der $\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$ in diesem Elemente. Es seien ferner bezeichnet mit $d\omega$, n,x, n,y, n,z, die Werthe der $d\omega'$, n',x, n',y, n',z in der Anfangslage. Wir beachten, dass wir aus rein geometrischen Gründen haben:

$$\frac{d}{dt}(d\omega'\cos n',x)=d\omega\left\{\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,x-\frac{d\beta}{dx}\cos n,y-\frac{d\gamma}{dx}\cos n,z\right\}.$$
$$\frac{d}{dt}(d\omega'\cos n',y)=d\omega\left\{-\frac{d\alpha}{dy}\cos n,x+\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,y-\frac{d\gamma}{dy}\cos n.z\right\}.$$
$$\frac{d}{dt}(d\omega'\cos n',z)=d\omega\left\{-\frac{d\alpha}{dz}\cos n,x-\frac{d\beta}{dz}\cos n,y+\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n,z\right\},$$

und erhalten also:

$$\frac{d\zeta'}{dt}=\frac{d}{dt}\int(\mathfrak{L}'\cos n',x+\mathfrak{M}'\cos n',y+\mathfrak{N}'\cos n',z)\,d\omega'$$
$$=\int\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dt}+\alpha\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\beta\frac{d\mathfrak{L}}{dy}+\gamma\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)\cos n,x\,d\omega$$
$$+\int\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt}+\alpha\frac{d\mathfrak{M}}{dx}+\beta\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\gamma\frac{d\mathfrak{M}}{dz}\right)\cos n,y\,d\omega$$
$$+\int\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dt}+\alpha\frac{d\mathfrak{N}}{dx}+\beta\frac{d\mathfrak{N}}{dy}+\gamma\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\cos n,z\,d\omega$$
$$+\int\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,x\,d\omega-\int\mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx}\cos n,y\,d\omega-\int\mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx}\cos n,z\,d\omega$$
$$-\int\mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy}\cos n,x\,d\omega+\int\mathfrak{M}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n,y\,d\omega-\int\mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}\cos n,z\,d\omega$$
$$-\int\mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz}\cos n,x\,d\omega-\int\mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz}\cos n,y\,d\omega+\int\mathfrak{N}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n,z\,d\omega;$$

demnach unter Zuhülfenahme der Gleichungen (1_a) und (1_b):

$$A\frac{d\zeta'}{dt}=\int\left\{\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\cos n,x+\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\cos n,y+\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\cos n,z\right\}d\omega$$
$$=\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz),$$

das letzte Integral um den Umfang s der Fläche ω genommen.

In besonderen Fällen vereinfacht sich der gewonnene Satz. Ist es möglich, einen einfach zusammenhängenden Raum abzugrenzen, welcher die bewegte Curve s vollständig enthält und in welchem sich wahrer Magnetismus nicht findet, so ist es offenbar ohne Einfluss, ob die Hülfsfläche ω der Bewegung der materiellen Theile folgt oder eine von derselben unabhängige Verschiebung erleidet, wenn sie nur innerhalb jenes Raumes sich hält und von der Curve s begrenzt bleibt. In diesem Falle dürfen wir einfacher und darum doch eindeutig aussagen: das Integral der elektrischen Kraft um die geschlossene Curve s genommen sei gleich der mit A multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Zahl von magnetischen Kraftlinien, welche von der Curve s umfasst werden. Halten wir die gemachte Voraussetzung fest und ist obendrein trotz der Bewegung von s die magnetische Polarisation in jedem festen Punkte des Raumes constant, so dürfen wir sagen, die in der Curve s inducirte Kraft sei gleich der mit A multiplicirten Zahl der im Raume ruhend gedachten magnetischen Kraftlinien, welche die Curve s bei ihrer Bewegung in bestimmtem Sinne durchschneidet. Rühren die magnetischen Kräfte, unter deren Einfluss sich die Curve s bewegt, einzig und allein von dem Einflusse des gleichförmigen Stromes in einer Strombahn t her, so ist die Zahl der s durchsetzenden Kraftlinien, wie wir sahen[1]), gleich dem Product aus dem Neumann'schen Potential der Curven s und t aufeinander und der Stromstärke in t. In diesem Falle giebt also die mit A multiplicirte Aenderung des genannten Productes auf die Zeiteinheit berechnet die in der Curve s wirksame elektromotorische Kraft.

In der einen oder anderen Form enthalten diese Sätze alle bekannten sorgfältig untersuchten Fälle der Induction. Auch die Gesetze der unipolaren Induction lassen sich aus der allgemeinen Aussage leicht herleiten. Inductionserscheinungen in dreifach ausgedehnten Körpern sind nur in beschränktem Maasse quantitativ erforscht worden. Die Gleichungen, durch welche Jochmann[2]) und andere den Umfang der gefundenen Thatsachen wiedergeben konnten, entstehen unmittelbar aus unseren

---

[1]) Siehe Seite 246.

[2]) Jochmann, Crelle's Journ. 63. p. 1. 1863.

allgemeinen Gleichungen durch Weglassung einer Reihe von Gliedern, welche infolge der besonderen Natur der behandelten Probleme verschwinden.

Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass wir den allgemeinen Satz der Induction in eine weitere, sehr elegante Form kleiden können, wenn wir uns erlauben, von einer selbstständigen Bewegung der Kraftlinien zu reden und allgemein jede Aenderung der magnetischen Polarisation als die Folge einer solchen Bewegung der Kraftlinien anzusehen. Wir können alsdann auch allgemeingültig und erschöpfend aussagen: es sei die in einer beliebigen geschlossenen Curve s inducirte elektrische Kraft gleich der mit A multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Curve s in bestimmtem Sinne durchschnitten werden. Indessen, wenn gegen die gelegentliche Benutzung der zu Grunde liegenden Anschauungsweise nichts einzuwenden ist, so thun wir doch besser, sie in der gegenwärtigen Abhandlung zu vermeiden. Denn die von Faraday ebenfalls benutzte, von Poynting[1]) entwickelte Vorstellung, als könnten die Kraftlinien eine relative Bewegung gegen das umgebende Medium besitzen, ist zwar höchst bemerkenswerth und mag durchführbar sein; sie ist aber durchaus verschieden von der hier benutzten Anschauung, derzufolge die Kraftlinien lediglich ein Symbol für besondere Zustände der Materie darstellen. Es hat keinen Sinn, von einer selbstständigen Bewegung solcher Zustände zu reden. Auch ist zu bemerken, dass die controlirbare Ab- und Zunahme der Kraftlinien in allen Theilen des Raumes die unterstellte Bewegung der Kraftlinien noch nicht eindeutig bestimmt. Der eben ausgesprochene Satz würde daher an sich auch nicht in allen Fällen eindeutig die Grösse der Induction liefern, sondern vielmehr als eine Definition zu betrachten sein, durch welche unter den möglichen Bewegungen der Kraftlinien eine bestimmte als die wirkliche bezeichnet wird.

5. Behandlung von Gleitflächen.

An der Grenze zweier heterogenen Körper können die elektrodynamischen Constanten in unstetiger Weise von einem Werthe

---

[1]) J. H. Poynting, Phil. Trans. 2. p. 277. 1885. [Siehe auch Anmerkung 36 am Schluss des Buches.]

zu einem anderen übergehen, ohne dass gleichzeitig die Geschwindigkeitscomponenten $\alpha\,\beta\,\gamma$ an dieser Grenzfläche unstetige Aenderungen erlitten. Als Unstetigkeitsflächen dieser Art sind zu betrachten die Berührungsflächen zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten oder zwischen Flüssigkeiten untereinander; auch steht es uns frei, von dieser Beschaffenheit den Uebergang an der Grenze der Körper gegen den Aether vorauszusetzen. Das Hinzutreten der stetigen Bewegung giebt an solchen Unstetigkeitsflächen zu neuen Betrachtungen keinen Anlass; die Zustände der materiellen Theile auf beiden Seiten der Fläche sind durch dieselben Relationen mit einander verknüpft, welche auch in ruhenden Körpern Gültigkeit haben.

Anders liegt die Sache für Flächen, an welchen auch die Geschwindigkeitscomponenten unstetigen Aenderungen unterliegen. Da nach einer Bemerkung der Einleitung die Unstetigkeit nur die zur Grenzfläche parallelen Componenten der Geschwindigkeit betreffen kann, so bezeichnen wir Flächen dieser Art passend als Gleitflächen. Sie können sich finden zwischen festen Körpern, welche einander berühren; auch ist es bisweilen bequem und bei unserer Unkenntniss des wahren Verhältnisses alsdann auch erlaubt, die Grenzfläche eines Körpers gegen den Aether als eine Gleitfläche anzusehen. Wie wir ebenfalls schon in der Einleitung bemerkten, behandeln wir eine Gleitfläche als den Grenzfall einer Uebergangsschicht, in welcher die Bewegungen und möglicherweise auch die elektrodynamischen Constanten zwar sehr schnell, aber doch stetig von einem Werth auf einen anderen übergehen. Diese Auffassung verbürgt uns, dass die allgemeinen Sätze, welche wir bisher ableiteten, nicht ungültig werden in einem Systeme, in welchem sich Gleitstellen vorfinden, sie findet ihre Berechtigung darin, dass sie zu Widersprüchen mit der Erfahrung nicht führt. Damit sie hinreichend sei, um die Verhältnisse in der Grenzfläche zu bestimmen, muss die Art des Uebergangs gewissen allgemeinen Beschränkungen unterworfen werden. Wir geben diese Beschränkungen in der Gestalt von Voraussetzungen über die Endlichkeit einer Reihe von Grössen auch in der Uebergangsschicht selbst. Von dem Auftreten elektromotorischer Kräfte in der Gleitfläche sehen wir ab. Wir verlegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems, auf welches wir uns beziehen, in einen beliebigen Punkt des in

Betracht genommenen Elementes der Uebergangsschicht und lassen ihn diesem Punkte auch bei der Bewegung folgen. Wir geben ferner der z-Axe eine solche Richtung, dass sie auf dem Elemente der Gleitfläche senkrecht steht und auch bei der Bewegung senkrecht bleibt. Die Uebergangsschicht bildet dann stets die unmittelbare Nachbarschaft der xy-Ebene. Wir setzen voraus, dass auch in der Uebergangsschicht selbst die Grössen:

$$\begin{matrix} X & Y & Z & L & M & N \\ \mathfrak{X} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Z} & \mathfrak{L} & \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \\ u & v & w & \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$$

endlich bleiben, ebenso die Differentialquotienten dieser Grössen parallel zur Gleitfläche, also nach x und y, ferner die Differentialquotienten der Grössen:

$$\mathfrak{X} \quad \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{Z} \quad \mathfrak{L} \quad \mathfrak{M} \quad \mathfrak{N}$$

nach der Zeit t. Dagegen dürfen wir nicht ausschliessen, dass die Differentialquotienten nach z unendlich werden, mit Ausnahme von $d\gamma \,/\, dz$, welches zufolge der erwähnten Bemerkung der Einleitung endlich bleiben muss. γ selbst ist demnach überall in der Uebergangsschicht verschwindend klein. Dies vorausgesetzt, multipliciren wir die ersten beiden Gleichungen der Systeme (1_a) und (1_b) mit dz, integriren nach z durch die Uebergangsschicht hindurch zwischen zwei derselben äusserst naheliegenden Punkten und beachten, dass bei der Kürze des Integrationsweges das Integral jeder in der Schicht endlich bleibenden Grösse verschwindet. Wir erhalten so, indem wir den Index 1 auf die eine Seite, den Index 2 auf die andere Seite der Grenzfläche beziehen, die vier Gleichungen:

$$(5_a) \qquad A\int_1^2 \mathfrak{N}\,\frac{d\alpha}{dz}\,dz = Y_2 - Y_1, \qquad -A\int_1^2 \mathfrak{N}\,\frac{d\beta}{dz}\,dz = X_2 - X_1,$$

$$(5_b) \qquad -A\int_1^2 \mathfrak{Z}\,\frac{d\alpha}{dz}\,dz = M_2 - M_1, \qquad A\int_1^2 \mathfrak{Z}\,\frac{d\beta}{dz}\,dz = L_2 - L_1.$$

Dieselben geben die Verknüpfung der zur Grenzfläche tangentialen Kraftcomponenten auf beiden Seiten derselben miteinander. Die zur Grenzfläche normalen Componenten sind hier wie in ruhenden Körpern verknüpft durch die Bedingung, dass die

Flächendichtigkeit des wahren Magnetismus in der Grenzfläche sich nicht auf andere Weise ändern könne, als durch Convection und die Flächendichtigkeit der wahren Elektricität nicht auf anderem Wege, als entweder durch Convection oder durch einen eigentlichen Strom.

Ist das betrachtete Element der Grenzschicht von einer Belegung mit wahrer Elektricität und wahrem Magnetismus frei, so sind $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ im Innern der Uebergangsschicht constant, die Gleichungen (5_a) und (5_b) nehmen dann die einfacheren Formen an:

$$(5_c) \qquad X_2 - X_1 = A\mathfrak{N}(\beta_1 - \beta_2), \quad Y_2 - Y_1 = A\mathfrak{N}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$(5_d) \qquad L_2 - L_1 = A\mathfrak{Z}(\beta_2 - \beta_1), \quad M_2 - M_1 = A\mathfrak{Z}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Um ein Beispiel zu geben, in welchem diese Gleichungen zur Anwendung kommen würden, denken wir uns, dass ein fester Rotationskörper um seine Axe sich drehe in einem ihn eng umschliessenden Hohlraum eines anderen festen Körpers. Wird dies System dem Einfluss einer magnetischen Kraftvertheilung unterworfen, welche symmetrisch um die Rotationsaxe ist, so wird nach unserer Auffassung weder im Innern des rotirenden Körpers, noch auch im Innern der ihn umhüllenden Masse ein Anlass zum Auftreten elektrischer Kräfte vorliegen. Solche Kräfte werden in der That ausbleiben, wenn die magnetische Erregung sich ganz auf das Innere des einen oder des anderen Körpers beschränkt. Durchsetzen aber die Kraftlinien die Fläche, in welcher beide Körper an einander gleiten, so werden an dieser Fläche die durch Gleichung (5_c) gegebenen elektromotorischen Kräfte wachgerufen, welche sich in das Innere der Körper verbreiten und dort die elektrischen Spannungen und Ströme erzeugen, über deren thatsächliches Auftreten unter solchen Verhältnissen uns die Versuche nicht im Zweifel lassen. Sind die betrachteten Körper Nichtleiter und unterwerfen wir sie dem Einfluss elektrischer Kräfte, welche zur Rotationsaxe symmetrisch vertheilt sind und an der Gleitfläche nicht verschwinden, so ruft nunmehr die eingeleitete Bewegung zufolge der Gleichungen (5_d) in der Nachbarschaft magnetische Kräfte hervor. Derartige Wirkungen sind allerdings noch nicht mit gleicher Sicherheit wie die zuerst erwähnten beobachtet worden, doch liegt wenigstens eine Andeutung derselben in den Versuchen des Herrn Röntgen vor.[1])

In dem allgemeinen Falle, in welchem sich an der Grenzfläche eine Belegung wahrer Elektricität und wahren Magnetismus findet, genügt die Kenntniss der Flächendichtigkeit derselben allein nicht, um die Integrale der Gleichungen (5_a) und (5_b) zu ermitteln; es muss vielmehr weiter bekannt sein, in welchem Maasse in der Uebergangsschicht Elektricität und Magnetismus an der Bewegung des einen und des anderen der sich berührenden Körper theilnehmen. Diese Unbestimmtheit liegt durchaus in der Natur der Sache. Man denke sich in dem Rowland'schen Versuch über die magnetische Wirkung der convectiv bewegten Elektricität die elektrisirte Scheibe rotirend anstatt in Luft in einem eng umschliessenden festen Isolator. Die magnetische Wirkung würde offenbar bis zum Verschwinden herabsinken in dem Maasse, in welchem die Elektricität von der Oberfläche der rotirenden Scheibe auf die berührende Oberfläche des ruhenden Körpers überginge.

6. Erhaltung der Energie. Ponderomotorische Kräfte.

Wir denken uns den Uebergang des Systems aus dem Anfangszustand in den Endzustand während eines jeden Zeitelementes in zwei Stadien zerlegt. Das erste Stadium soll sämmtliche materiellen Theile aus der Anfangslage in die Endlage überführen und dabei die Kraftlinien lediglich der Bewegung der materiellen Theile folgen lassen. In dem zweiten Stadium soll die Wirkung der nunmehr vorhandenen elektrischen und magnetischen Kräfte zur Geltung kommen und auch die elektromagnetischen Zustände in die Endlage überführen. Die Aenderung, welche die elektromagnetische Energie des Systems während des ganzen Ueberganges erfährt, ist die Summe der Aenderungen, welche sie in den beiden Stadien erleidet. Die Vorgänge während des zweiten Stadiums sind Vorgänge in ruhenden Körpern; wir wissen bereits, in welcher Weise bei solchen Vorgängen die Aenderungen der elektromagnetischen Energie durch andere Formen der Energie compensirt werden. Während des ersten Stadiums aber ändert sich die elektro-

[1]) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 35. p. 264. 1888.

magnetische Energie eines jeden materiellen Theiles des Systems ebenfalls; es bleibt also übrig, Rechenschaft abzulegen über den Verbleib der so verminderten oder den Ursprung der so vermehrten elektromagnetischen Energie. Für den Umfang der vorhandenen Erfahrung lässt sich ohne Unsicherheit die Richtigkeit der Aussage erweisen, dass in jedem vollständigen elektromagnetischen System die in Rede stehende Energie compensirt wird durch die mechanische Arbeit, welche während des betrachteten Zeitelementes von den elektrischen und magnetischen ponderomotorischen Kräften des Systems geleistet wird. Als allgemeingültig angenommen reicht indessen diese Aussage noch nicht hin, um allgemein und mit Strenge die ponderomotorischen Kräfte aus den berechenbaren Aenderungen der elektromagnetischen Energie abzuleiten. Wir fügen deshalb derselben zwei ihr nicht widersprechende Annahmen hinzu, welche nicht durch die Erfahrung, sondern durch unsere besonderen Anschauungen gefordert werden. Die erste Annahme erklärt die angegebene und für jedes vollständige elektromagnetische System erfahrungsmässig zutreffende Aussage auch für jeden beliebigen materiellen Theil eines solchen Systems für gültig. Die zweite Annahme sagt aus, dass ein beliebiger Theil des Systems auf das übrige System keine anderen ponderomotorischen Kräfte ausüben könne, als Druckkräfte, welche an der gemeinsamen Oberfläche von den Elementen des ersten Theils auf die berührenden Elemente des übrigen Theils ausgeübt werden und welche in jedem Punkte der Berührungsfläche lediglich von den elektromagnetischen Zuständen der unmittelbaren Nachbarschaft abhängig sind. Durch die erste Annahme sind eindeutig die von der zweiten Annahme geforderten Druckkräfte bestimmt; wir wollen die Grösse derselben ableiten und zeigen, dass sie hinreichen, um die Thatsachen der unmittelbaren Wahrnehmung zu erklären. Dass dann auch in bewegten Körpern dem Princip von der Erhaltung der Kraft Genüge geleistet ist, geht aus der Ableitung der Druckkräfte selber hervor.

Fassen wir während des Zeitelementes dt die magnetische Energie eines materiellen Theilchens ins Auge, dessen veränderliches Volumen $d\tau'$ genannt werden möge, während $d\tau$ den Werth von $d\tau'$ im Beginne des Zeitelementes dt bezeichne. Den Anfangspunkt des benutzten Coordinatensystems legen wir zur

Vereinfachung der Betrachtungen dauernd in einen materiellen Punkt des Raumes $d\tau'$. Würde sich $d\tau'$ bewegen wie ein starrer Körper, indem es seine Kraftlinien mit sich fortführt, so würde sich sein Energieinhalt nicht ändern. Allgemein muss also die Aenderung dieser Energie lediglich eine Funktion der Verzerrungen sein, welche $d\tau'$ infolge der Bewegung erleidet; unsere Aufgabe ist zunächst, jene Aenderung in dieser Form darzustellen. Es ändern sich nun aber infolge der Verzerrungen nicht allein die Polarisationen, sondern auch die Eigenschaften des materiellen Trägers derselben, also die magnetischen Constanten. Um diese Aenderung in die Rechnung einführen zu können, müssen wir eine Reihe weiterer Bezeichnungen festsetzen. Wir definiren zunächst neben den Constanten μ eine Reihe von Constanten μ' durch die Bestimmung, dass sein soll:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N\\ &= \mu_{11} L_2 + 2\mu_{12} LM + \text{etc.}\\ &= \mu_{11}'\mathfrak{L}_2 + 2\mu_{12}'\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Die μ' sind also die Coëfficienten der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in den linearen Functionen dieser Grössen, durch welche die Kräfte dargestellt werden. Wir nennen ferner für den Augenblick $\xi\,\eta\,\zeta$ die Verschiebungen, welche der Punkt, dessen Geschwindigkeiten $\alpha\,\beta\,\gamma$ sind, aus der im Anfang der Zeit dt innegehabten Lage erleidet. Es sind dann die Grössen:

$$\frac{d\xi}{dx} = x_x, \qquad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y, \quad \text{etc.}^{1)},$$

die Componenten der Verzerrungen des Elementes $d\tau'$, in welchem die Verschiebungen $\xi\,\eta\,\zeta$ sich finden. Die Constanten μ' sind Functionen dieser Grössen, sie hängen ausserdem ab von den Drehungen ϱ, σ, τ, welche das Element neben der Verzerrung erleidet. Da während des Zeitelementes dt sowohl die x_x, x_y, etc., als die ϱ, σ, τ verschwindend klein bleiben, so ist die Abhängigkeit eine lineare, sie ist uns bekannt, sobald uns die Differentialquotienten der μ' nach den ϱ, σ, τ, x_x, x_y, etc. gegeben werden. Die Differentialquotienten nach den ϱ, σ, τ sind aus den augenblicklichen Werthen der μ' selbst zu berechnen. Für die Differentialquotienten nach den x_x, x_y, etc. aber ist dies nicht möglich und wir müssen daher annehmen, dass uns anderweitig gegeben werden die Grössen:

---

[1]) Vgl. G. Kirchhoff, Mechanik p. 123. 1877.

$$\frac{d\mu_{11}'}{dx_x} = \mu_{11}'{}_{,11}, \quad \frac{d\mu_{11}'}{dx_y} = \mu_{11}'{}_{,12}, \quad \text{etc.},$$
$$\frac{d\mu_{12}'}{dx_x} = \mu_{12}'{}_{,11}, \quad \frac{d\mu_{12}'}{dx_y} = \mu_{12}'{}_{,12}, \quad \text{etc.}, \quad \text{etc.}$$

Die so definirten 36 Constanten entsprechen offenbar magnetischen Eigenschaften des besonderen den Raum $d\tau'$ erfüllenden Stoffes in seinem augenblicklichen Zustande der Deformation; keine dieser Constanten können wir zu unserem Vorhaben entbehren, keine können wir auch aus den bisher behandelten magnetischen Eigenschaften des Stoffes a priori ableiten. Durch geeignete Orientirung des benutzten Coordinatensystems lässt sich die Zahl der geforderten Constanten vermindern; eine Verminderung tritt ebenfalls ein, wenn Symmetrieverhältnisse hinsichtlich des gewählten Coordinatensystemes obwalten. In dem einfachsten Falle, in welchem die Substanz sowohl im Anfangszustande isotrop ist, als auch trotz jeder eintretenden Deformation isotrop bleibt, in einer Flüssigkeit also, sinkt die Zahl der neuen Constanten auf eine einzige herab, welche alsdann zusammen mit der einen Magnetisirungsconstanten die magnetischen Eigenschaften in ausreichender Weise definirt. Es erscheint übrigens nicht unwahrscheinlich, dass auch im allgemeinen Falle nothwendige Beziehungen zwischen den Constanten sich nachweisen lassen, welche dieselben auf eine kleinere Anzahl unabhängiger Constanten zu reduciren gestatten.

Diese Bezeichnungen nun vorausgesetzt, erhalten wir für die in der Zeiteinheit erfolgende Aenderung des magnetischen Energieinhaltes des Raumes $d\tau'$ nacheinander die folgenden Ausdrücke:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\,d\tau'\right\} \\
&= \frac{1}{8\pi}\left\{d\tau\,\frac{d}{dt}(\mu_{11}'\,\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}'\,\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \right.\\
&\qquad \left. + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\frac{d}{dt}\,d\tau'\right\} \\
&= \frac{1}{8\pi}\,d\tau\left\{2\left(L\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + M\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N\frac{d\mathfrak{N}}{dt}\right)\right. \\
&\qquad + \left(\frac{d\mu_{11}'}{dt}\,\mathfrak{L}^2 + 2\,\frac{d\mu_{12}'}{dt}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.}\right) \\
&\qquad \left. + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Wir entfernen in dem letzten derselben die Differentialquotienten nach t. Für die Grössen $d\mathfrak{L} / dt$, $d\mathfrak{M} / dt$, $d\mathfrak{N} / dt$ geben uns die Gleichungen (1_a), indem wir in denselben nur den Einfluss der Bewegung berücksichtigen und die Geschwindigkeiten α, β, γ in Hinblick auf die besondere Wahl unseres Coordinatensystems gleich Null setzen:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + \mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy} + \mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz},$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\alpha}{dx}\right) + \mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz} + \mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = -\mathfrak{N}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx} + \mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}.$$

Ferner haben wir für die Grösse $d\mu_{11}'/dt$:

$$\frac{d\mu_{11}'}{dt} = \frac{d\mu_{11}'}{dx_x} \cdot \frac{dx_x}{dt} + \frac{d\mu_{11}'}{dx_y} \cdot \frac{dx_y}{dt} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{d\mu_{11}'}{d\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} + \text{etc.}$$

$$= \mu_{11}'{}_{,11}\frac{d\alpha}{dx} + \mu_{11}'{}_{,12}\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right) + \text{etc.}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{d\mu_{11}'}{d\varrho}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + \text{etc.}$$

Analoge Ausdrücke leiten wir ab für $d\mu_{12}' / dt$, etc. Wir setzen alle diese Ausdrücke in die rechte Seite der Gl. (6) ein, es wird alsdann diese Seite eine homogene lineare Function der neun Differentialquotienten der $\alpha\,\beta\,\gamma$ nach den $x\,y\,z$. Wir können und wollen aber diese Function so ordnen, dass sie uns erscheint als homogene lineare Function der sechs Deformationsgeschwindigkeiten $d\alpha / dx$, $d\alpha / dy + d\beta / dx$, etc. und der drei Rotationsgeschwindigkeiten $\frac{1}{2}(d\alpha / dy - d\beta / dx)$, etc. Wir beachten dabei, dass die Coëfficienten der drei Rotationsgeschwindigkeiten nothwendigerweise identisch verschwinden müssen, da eine Bewegung des Theilchens als starren Körpers eine Aenderung seines Energieinhaltes nicht herbeiführt. Dementsprechend werfen wir die mit diesen Rotationsgeschwindigkeiten behafteten Glieder einfach ab und erhalten nunmehr als Endresultat, indem wir noch durch Division mit $d\tau$ auf die Einheit des Volumens reduciren:

$$
(6_a)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{d\tau}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L+\mathfrak{M}M+\mathfrak{N}N)d\tau'\right\}\\
&\quad=\frac{1}{8\pi}\frac{d\alpha}{dx}(\;\mathfrak{L}L-\mathfrak{M}M-\mathfrak{N}N+\mu_{11}'{}_{,11}\,\mathfrak{L}^2+2\mu_{12}'{}_{,11}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\text{etc.})\\
&\quad+\frac{1}{8\pi}\frac{d\beta}{dy}(-\mathfrak{L}L+\mathfrak{M}M-\mathfrak{N}N+\mu_{11}'{}_{,22}\,\mathfrak{L}^2+2\mu_{12}'{}_{,22}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\text{etc.})\\
&\quad+\frac{1}{8\pi}\frac{d\gamma}{dz}(-\mathfrak{L}L-\mathfrak{M}M+\mathfrak{N}N+\mu_{11}'{}_{,33}\,\mathfrak{L}^2+2\mu_{12}'{}_{,33}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\text{etc.})\\
&+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)(\;\mathfrak{N}M\;+\;\mathfrak{M}N\;+\mu_{11}'{}_{,23}\,\mathfrak{L}_2+2\mu_{12}'{}_{,23}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\text{etc.})\\
&+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)(\;\mathfrak{L}N\;+\;\mathfrak{N}L\;+\mu_{11}'{}_{,13}\,\mathfrak{L}^2+2\mu_{12}'{}_{,13}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\text{etc.})\\
&+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)(\;\mathfrak{M}L\;+\;\mathfrak{L}M\;+\mu_{11}'{}_{,12}\,\mathfrak{L}^2+2\mu_{12}'{}_{,12}\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\text{etc.})
\end{aligned}
\right.
$$

In der rechts stehenden linearen Function der Verzerrungsgeschwindigkeiten giebt nun offenbar der negativ genommene Coëfficient einer jeden dieser Geschwindigkeiten diejenige Druckcomponente an, mit welcher die magnetisch gestörte Materie die betreffende Verzerrung zu vergrössern strebt. Nennen wir nämlich in üblicher[1]) Bezeichnungsweise $X_x\ X_y\ X_z$ die Componenten des Druckes, welchen die Materie des Elementes $d\tau$ auf eine senkrecht zur x-Axe gelegte Schnittfläche ausübt, und erweitern wir diese Symbolik auch auf die Richtung der andern Axen, so giebt der Ausdruck:

$$
\begin{gathered}
X_x\frac{d\alpha}{dx}+Y_y\frac{d\beta}{dy}+Z_z\frac{d\gamma}{dz}\\
+Y_z\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)+X_z\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)+X_y\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)
\end{gathered}
$$

die mechanische Arbeit an, welche der materielle Inhalt des Elementes $d\tau$ bei eintretender Verzerrung leistet, berechnet auf die Einheit der Zeit und des Volumens. Nach unserer Annahme ist diese mechanische Arbeit der infolge der Verzerrung verlorenen magnetischen Energie gleich. Da dies gilt für jede mögliche Deformation, so ergiebt sich die Richtigkeit unserer Aussage. Jede der gewonnenen Druckcomponenten ist eine homogene quadratische Function der drei Componenten der herr-

---

[1]) G. Kirchhoff, Mechanik. Elfte Vorlesung.

schenden magnetischen Kraft, mit gleichem Rechte auch der drei Componenten der herrschenden magnetischen Polarisation. Durch vollkommen analoge Betrachtungen lassen sich vollkommen analoge Ausdrücke herleiten für die Druckkräfte, welche infolge der elektrischen Störungen auftreten. Der Gesammtdruck ergiebt sich gleich der Summe des magnetischen und des elektrischen.

An die gefundenen Werthe der ponderomotorischen Druckkräfte knüpfen wir drei Bemerkungen. Die erste Bemerkung betrifft die Unterschiede zwischen unserem System der Drucke und dem System, welches Maxwell für den allgemeinen Fall angegeben hat, in welchem Kräfte und Polarisationen verschiedene Richtung haben.[1]) Maxwell's Formen sind zunächst einfacher, da bei ihrer Ableitung auf die mögliche Deformation des Mediums keine Rücksicht genommen ist. Ein Unterschied von weit grösserer Wichtigkeit besteht darin, dass die Druckcomponenten, welche nach der angewandten Symbolik mit X_y und Y_x zu bezeichnen sind, bei Maxwell verschiedene Werthe haben, bei uns identisch sind. Nach unserem System wird jedes sich selbst überlassene materielle Theilchen lediglich seine Gestalt verändern, zufolge des Maxwell'schen Systems würde es zugleich als Ganzes eine Rotation annehmen. Die Maxwell'schen Drucke können daher inneren Vorgängen des Elements ihr Dasein nicht verdanken, sie finden also keinen Platz in der hier ausgearbeiteten Theorie. Sie sind allerdings zulässig, wenn man von der Annahme ausgeht, dass im Innern der bewegten Körper der Aether dauernd ruht und den nöthigen Stützpunkt für die eintretende Drehung liefert.

Die zweite Bemerkung betrifft die Vereinfachung, welche unsere Formeln annehmen, wenn wir sie anwenden auf Körper, welche isotrop sind und trotz jeder Deformation isotrop bleiben, also auf Flüssigkeiten. Das System der Constanten μ' beschränkt sich hier auf die eine Constante $\mu' = 1 / \mu$. Bezeichnen wir ferner mit σ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so haben wir

---

[1]) Maxwell, Treat. on Electr. and Magnet. 2. p. 254. 1873.

$$\mu_{11}'{}_{,11} = \mu_{22}'{}_{,22} = \mu_{33}'{}_{,33} = -\frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{d\log\sigma} = \frac{1}{\mu^2}\,\frac{d\mu}{d\log\sigma},$$
$$\mu_{12}'{}_{,11} = \text{etc.} \quad = 0.$$

Also werden die Druckcomponenten:

$$(6_b)\left\{\begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{8\pi}(-L^2+M^2+N^2) - \frac{d\mu}{8\pi\, d\log\sigma}(L^2+M^2+N^2),\\ Y_y &= \frac{\mu}{8\pi}(\ \ L^2-M^2+N^2) - \frac{d\mu}{8\pi\, d\log\sigma}(L^2+M^2+N^2),\\ Z_z &= \frac{\mu}{8\pi}(\ \ L^2+M^2-N^2) - \frac{d\mu}{8\pi\, d\log\sigma}(L^2+M^2+N^2), \end{aligned}\right.$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \qquad X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL, \qquad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN.$$

Zu völlig identischen Formen ist im Verfolg eines ähnlichen Gedankenganges für den gleichen Fall bereits von Helmholtz[1]) gelangt, in dessen Formeln die unseren übergehen, wenn wir die Bezeichnungen in der Weise ändern, dass wir L, M, N, μ durch λ/ϑ, μ/ϑ, ν/ϑ, $1+4\pi\vartheta$ ersetzen und weiter beachten, dass das θ der von Helmholtz'schen Formeln gleich $d\vartheta/d\log\sigma = d\mu/4\pi\, d\log\sigma$ ist.[2])

Die dritte Bemerkung betrifft die Frage, inwieweit die Resultanten der aus unsern Hypothesen abgeleiteten Drucke übereinstimmen mit den mechanischen Kräften und Kräftepaaren, welche wir an den elektromagnetisch erregten Körpern thatsächlich beobachten. Wir beachten zunächst, dass sich unsere wirklichen Beobachtungen beschränken auf Systeme, welche dem statischen oder stationären Zustand unendlich nahe sind. Für solche Systeme aber ist das Princip von der Erhaltung der Energie allein schon ausreichend, um aus dem Verlust an elektromagnetischer Energie bei jeder eintretenden Verschiebung eindeutig die Grösse der widerstrebenden mechanischen Kraftcomponente zu berechnen, und es darf als bereits erwiesen angesehen werden, dass die so berechneten Kraftcomponenten mit

---

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 400. 1881.

2) Die Vorzeichen bleiben entgegengesetzt, weil bei v. Helmholtz ein Zug, bei uns ein Druck als positiv gerechnet ist.

den beobachteten übereinstimmen. Ein System der Kraftcomponenten, welches dem Princip von der Erhaltung der Kraft genügt, wird nun sicherlich angegeben durch die Resultanten der gefundenen Drucke, es muss also dies eine System eben dasjenige sein, welches auch unmittelbar aus jenem Princip berechnet wird und welches sich im Einklang mit der Erfahrung findet. Um auch a posteriori zu dem gleichen Ergebniss zu gelangen, beachten wir, dass unter den Verhältnissen der Wirklichkeit die elektrodynamischen Drucke viel zu schwach sind, um merkliche Deformationen der Volumenelemente fester Körper hervorzurufen. Die äusserst schwachen Verzerrungen, welche sie hier zu Stande bringen, pflegen wir im Gebiet der Elektricität als Erscheinungen der Elektrostriction von denen der eigentlichen Elektrodynamik zu sondern. Sehen wir also von dieser besonderen Klasse von Erscheinungen hier ab, so ist es für den Erfolg gleichgültig, ob wir in festen Körpern die von uns berechneten Drucke annehmen, oder gar keine Drucke, oder beliebige andere von gleicher Grössenordnung. Wir dürfen uns daher allgemein mit den einfacheren Formen (6_b) begnügen, in welchen nunmehr für krystallinische Körper unter μ eine beliebige Constante von der Grössenordnung der μ_{11}, μ_{12}, etc. zu verstehen ist. Aber wir dürfen die Formen (6_b) sogar weiter vereinfachen, indem wir die mit $d\mu/d\log\sigma$ behafteten Glieder unberücksichtigt lassen. Denn diese Glieder, welche einen gleichmässigen Druck darstellen, vermögen in tropfbaren Flüssigkeiten bei der geringen Compressibilität derselben keine endlichen Verschiebungen, sondern nur Erscheinungen der Elektrostriction bez. Magnetostriction hervorzurufen, und in gasförmigen Körpern fallen diese Glieder fort, weil die Constante μ und entsprechend die Dielektricitätsconstante sich hier nicht merklich mit der Dichtigkeit σ ändert. Diejenigen ponderomotorischen Kräfte, welche endliche Verschiebungen der Körper gegen einander hervorrufen, müssen demnach schon dargestellt sein durch die Resultanten des als überall gültig angenommenen Drucksystems:

$$(6_c)\quad \left\{\begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{8\pi}(-L^2+M^2+N^2),\\ Y_y &= \frac{\mu}{8\pi}(L^2-M^2+N^2),\\ Z_z &= \frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2-N^2). \end{aligned}\right.$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \qquad X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL, \qquad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN.$$

Dies vereinfachte System der magnetischen Drucke ist nun aber das Maxwell'sche.[1]) Maxwell hat schon gezeigt, dass dasselbe zusammen mit dem entsprechenden elektrischen System die beobachteten ponderomotorischen Kräfte zwischen Magneten, stationären Strömen und elektrisirten Körpern enthält, und wir dürfen uns auf seine einfache Darlegung berufen.

Es scheint übrigens nicht bemerkt worden zu sein, dass dies System von Drucken das Innere eines homogenen Körpers, insbesondere des Aethers, im allgemeinen nur dann in Ruhe lässt, wenn die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, also die herrschenden Zustände statische oder stationäre sind. In dem Falle beliebiger zulässiger elektromagnetischer Erregung müssen die gefundenen Drucke das Innere des von uns als beweglich ausdrücklich vorausgesetzten Aethers in Bewegung setzen mit Geschwindigkeiten, welche wir berechnen könnten, wenn wir für die Masse des Aethers einen Anhalt hätten.[2]) Dies Resultat scheint wenig innere Wahrscheinlichkeit zu besitzen. Um seinetwillen die Theorie zurückzuweisen, liegt indessen vom Standpunkt der gegenwärtigen Arbeit aus kein Grund vor, denn weder steht das Resultat im Widerspruch mit unseren Voraussetzungen, noch mit der uns zugänglichen Erfahrung. Die geringe Masse der Luft, welche in den bestevacuirten Räumen zurückbleibt, reicht nämlich schon vollständig aus, um alle im Inneren dieser Räume mit vorhandenen Mitteln zu erregenden Strömungen auf einer unmerklichen Grösse zu halten.

---

[1]) Maxwell, Treat. on Electr. and Magnet. 1873. 2. p. 256. Die Vorzeichen sind dort umgekehrt, weil bei Maxwell ein Zug, bei uns ein Druck als positiv gerechnet ist.

[2]) [Siehe Anmerkung 37 am Schluss des Buches.]

Zum Schluss wünsche ich nochmals hervorzuheben, dass ich der hier vorgetragenen Theorie der elektromagnetischen Kräfte in bewegten Körpern einen Werth nur vom Standpunkt der systematischen Ordnung aus beilege. Die Theorie zeigt, wie wir die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern vollständig behandeln können unter gewissen Beschränkungen, welche wir übrigens willkürlich uns selbst auferlegten. Dass diese Beschränkungen dem Falle der Natur entsprechen, ist wenig wahrscheinlich. Die richtige Theorie dürfte vielmehr eine solche sein, welche in jedem Punkte die Zustände des Aethers von denen der eingebetteten Materie unterscheidet. Die Aufstellung einer dieser Anschauung entsprechenden Theorie aber schien mir zur Zeit mehr und willkürlichere Hypothesen zu erfordern, als die der hier vorgetragenen Theorie.