Gesammelte Werke

Untersuchungen über sie Ausbreitung der elektrischen Kraft

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1984

13. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper

urn:nbn:de:bsz:31-269600

13. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.

(Göttinger Nachr. v. 19. März 1890. Wiedemanns Ann. **40.** p. 577.)

Das System von Begriffen und Formeln, durch welches Maxwell die elektromagnetischen Erscheinungen darstellte, ist in seiner möglichen Entwickelung reicher und umfassender, als ein anderes der zu gleichem Zwecke ersonnenen Systeme. Es ist gewiss wünschenswerth, dass ein der Sache nach so vollkommenes System auch der Form nach möglichst ausgebildet werde. Der Aufbau des Systems sollte durchsichtig seine logischen Grundlagen erkennen lassen; alle unwesentlichen Begriffe sollten aus demselben entfernt und die Beziehungen der wesentlichen Begriffe auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt sein. Die eigene Darstellung Maxwell's bezeichnet in dieser Hinsicht nicht das erreichbare Ziel, sie schwankt häufig hin und her zwischen den Anschauungen, welche Maxwell vorfand, und denen, zu welchen er gelangte. Maxwell geht aus von der Annahme unvermittelter Fernkräfte, er untersucht die Gesetze, nach welchen sich unter dem Einfluss solcher Fernkräfte die hypothetischen Polarisationen des dielektrischen Aethers verändern und er endet mit der Behauptung, dass diese Polarisationen sich wirklich so verändern, ohne dass in Wahrheit Fernkräfte die Ursachen derselben seien.[1] Dieser Gang hinter-

[1] Die gleiche Bemerkung trifft die durch v. Helmholtz im 72. Bd. des Crelle'schen Journals gegebene Ableitung, nicht zwar allgemein, aber doch für diejenigen besonderen Werthe der Constanten, welche in den Endresultaten die Fernkräfte verschwinden lassen, welche also auf die hier vertretene Theorie führen.

lässt das unbefriedigende Gefühl, als müsse entweder das schliessliche Ergebniss oder der Weg unrichtig sein, auf welchem es gewonnen wurde. Auch lässt dieser Gang in den Formeln eine Anzahl überflüssiger, gewissermaassen rudimentärer Begriffe zurück, welche ihre eigentliche Bedeutung nur in der alten Theorie der unvermittelten Fernwirkung besassen. Als solche rudimentäre Begriffe physikalischer Natur nenne ich die dielektrische Verschiebung im freien Aether, unterschieden von der erzeugenden elektrischen Kraft und das Verhältniss beider, die Dielektricitätsconstante des Aethers. Diese Unterscheidungen haben Sinn, wenn wir aus einem Raum den Aether entfernen, die Kraft aber in demselben bestehen lassen können. Nach der Anschauung, von welcher Maxwell ausging, war dies denkbar, es ist nicht denkbar nach der Anschauung, zu welcher seine Arbeiten uns geführt haben. Als eine rudimentäre Erscheinung mathematischer Natur nenne ich das Vorherrschen des Vectorpotentiales in den Grundgleichungen. Bei dem Aufbau der neuen Theorien dienten die Potentiale als Gerüst, indem durch ihre Einführung die unstetig an einzelnen Punkten auftretenden Fernkräfte ersetzt wurden durch Grössen, welche in jedem Punkte des Raumes nur durch die Zustände der benachbarten Punkte bedingt sind. Nachdem wir aber gelernt haben, die Kräfte selber als Grössen der letzteren Art anzusehen, hat ihr Ersatz durch Potentiale nur dann einen Zweck, wenn damit ein mathematischer Vortheil erreicht wird. Und ein solcher scheint mir mit der Einführung des Vectorpotentiales in die Grundgleichungen nicht verbunden, in welchen man ohnehin erwarten darf, Beziehungen zwischen Grössen der physikalischen Beobachtung, nicht zwischen Rechnungsgrössen zu finden.

Die erwähnten Unvollkommenheiten der Form erschweren auch die Anwendung der Maxwell'schen Theorie auf besondere Fälle. Aus Anlass solcher Anwendungen habe ich mich seit längerer Zeit bemüht, die Maxwell'schen Formeln zu sichten und versucht, die wesentliche Meinung derselben von der zufälligen Form, in welcher sie zuerst auftraten, abzulösen. Das Folgende ist die geordnete Zusammenstellung meiner Ergebnisse. In gleicher Richtung hat bereits seit 1885 Hr. Oliver Heaviside gearbeitet. Die Begriffe, welche er aus den Maxwell'schen Gleichungen fortschafft, sind dieselben, welche auch ich fortschaffe; die einfachste Form, welche diese Gleichungen dadurch annehmen,[1]) ist, von Nebendingen abgesehen, die gleiche, zu welcher auch ich gelange. In dieser Hinsicht also gehört Hrn. Heaviside die Priorität. Trotzdem wird man, hoffe ich, die folgende Darstellung nicht für überflüssig halten. Eine endgültige Darstellung beansprucht dieselbe nicht zu sein, sondern nur eine solche, an welche sich leichter weitere Verbesserungen anknüpfen lassen, als an die bisher gegebenen Darstellungen.

Ich theile den Stoff in zwei Theile. In dem ersten Theile A gebe ich die Grundbegriffe und die sie verknüpfenden Formeln. Es werden den Formeln Erläuterungen hinzugefügt werden, aber diese Erläuterungen sollen nicht Beweise der Formeln sein. Die Aussagen werden vielmehr als Erfahrungsthatsachen gegeben, und die Erfahrung soll als ihr Beweis gelten. Allerdings lässt sich einstweilen nicht jede einzelne Formel besonders durch die Erfahrung prüfen, sondern nur das System als Ganzes. Mit dem Gleichungssystem der gewöhnlichen Mechanik liegt ja die Sache kaum anders. In dem zweiten Theile B gebe ich an, in welcher Weise die Thatsachen der unmittelbaren Wahrnehmung systematisch aus den Formeln abgeleitet werden können, durch welche Erfahrungen sich also die Richtigkeit des Systems erweist. Ausführlich behandelt würde dieser Theil einen sehr grossen Umfang annehmen, es kann sich hier daher nur um Andeutungen handeln.

A. Die Grundbegriffe und ihr Zusammenhang.

1. Elektrische und magnetische Kraft.

Das Innere aller Körper, den freien Aether eingeschlossen, kann von der Ruhe aus Störungen erfahren, welche wir als elektrische, und andere Störungen, welche wir als magnetische bezeichnen. Das Wesen dieser Zustandsänderungen kennen wir nicht, sondern nur die Erscheinungen, welche ihr Vorhandensein hervorruft. Diese letzteren sehen wir als bekannt an, mit ihrer

[1]) Diese Gleichungen findet man im Phil. Mag. Febr. 1888. Daselbst wird auf frühere Arbeiten im Electrician 1885 Bezug genommen, welche Quelle mir unzugänglich gewesen ist.

Hülfe bestimmen wir die geometrischen Verhältnisse der Zustandsänderungen selbst. Die Störungen der elektrischen und der magnetischen Art sind so miteinander verknüpft, dass Störungen der einen Art unabhängig von denen der anderen dauernd zu bestehen vermögen, dass dagegen Störungen keiner der beiden Arten zeitliche Schwankungen erleiden können, ohne dadurch zugleich Störungen der anderen Art hervorzurufen. Die Erzeugung des geänderten Zustandes erfordert den Aufwand von Energie; diese Energie wird beim Verschwinden der Störung wieder ersetzt; das Vorhandensein der Störung stellt also einen Vorrath von Energie dar. In einem und demselben Punkte können sich die Zustandsänderungen einer jeden Art unterscheiden nach Richtung, Sinn und Grösse. Es ist also zur Bestimmung sowohl des elektrischen als des magnetischen Zustandes die Angabe einer gerichteten Grösse oder der drei Componenten einer solchen nothwendig. Es ist aber eine erste wichtige Voraussetzung unserer gegenwärtigen Theorie, dass die Angabe einer einzigen Richtungsgrösse auch hinreichend sei, um die betreffende Aenderung vollständig zu bestimmen. Gewisse Erscheinungen, z. B. die des permanenten Magnetismus, der Dispersion u. s. w. lassen sich von diesem Standpunkte aus nicht verstehen, sondern erfordern, dass die elektrischen, bezw. magnetischen Zustände eines jeden Punktes durch mehr als eine Variable[1]) dargestellt werden. Solche Erscheinungen treten eben darum aus dem Rahmen unserer Betrachtung in ihrem gegenwärtigen Umfange heraus.

Diejenige Richtungsgrösse, durch welche wir zunächst den elektrischen Zustand bestimmen, nennen wir die elektrische Kraft. Die Erscheinung, durch welche wir sie definiren, ist die mechanische Kraft, welche ein bestimmter elektrisirter Körper im elektrisch gestörten leeren Raume erfährt. Für den leeren Raum selbst wollen wir nämlich die Componente der elektrischen Kraft in beliebiger Richtung proportional setzen der gleichgerichteten Componente jener mechanischen Kraft. Unter elektrischer Kraft in einem Punkte eines ponderablen Körpers verstehen wir die elektrische Kraft, welche an dem betreffenden Punkte im Innern eines unendlich kleinen, unendlich gestreckten

[1]) [Siehe Anmerkung 29 am Schluss des Buches.]

cylindrischen Hohlraumes sich findet, den wir in solcher Richtung in den Körper gebohrt haben, dass seine Richtung mit derjenigen der Kraft übereinstimmt, — eine Anforderung, welcher erfahrungsmässig stets genügt werden kann. In welcher Beziehung auch immer die so gemessene Kraft zu der wirklichen Zustandsänderung des Körpers steht, sicherlich muss sie dieselbe gemäss unserer Voraussetzung eindeutig bestimmen. Setzen wir überall an Stelle des Wortes „elektrisch" das Wort „magnetisch" und an Stelle des elektrisirten Hülfskörpers den Pol einer Magnetnadel, so erhalten wir die Definition der magnetischen Kraft. Um den Sinn beider Kräfte in der conventionellen Weise festzulegen, bestimmen wir noch, dass der elektrisirte Hülfskörper mit Glaselektricität geladen und dass derjenige Pol der Magnetnadel benutzt werde, welcher nach Norden weist. Die Einheiten der Kräfte sind noch vorbehalten. Die Componenten der elektrischen Kraft in Richtung der x, y, z bezeichnen wir mit X, Y, Z, die gleichgerichteten Componenten der magnetischen Kraft mit L, M, N.

2. Die Energie des Feldes.

Der elektrische Energievorrath eines Körpervolumens, in welchem die elektrische Kraft einen constanten Werth hat, ist eine homogene, quadratische Function der drei elektrischen Kraftcomponenten. Die entsprechende Aussage gilt für den Vorrath an magnetischer Energie. Den gesammten Energievorrath bezeichnen wir als den elektromagnetischen, er ist die Summe des elektrischen und des magnetischen.

Für einen isotropen Körper ist hiernach die Energiemenge jeder Art, berechnet auf die Volumeneinheit gleich dem Product aus dem Quadrat der betreffenden Gesammtkraft und einer Constanten. Die Grösse der letzteren kann verschieden sein für die elektrische und die magnetische Energie, sie hängt ab von dem Stoffe des Körpers und von der Wahl der Einheiten für die Energie und für die Kräfte. Die Energie wollen wir in absolutem Gaussischen Maasse messen und die Einheiten der Kräfte nunmehr festsetzen durch die Bestimmung, dass im freien Aether der Werth der Constanten gleich $1/8\pi$ werden soll, dass also sein soll die Energie der Volumeneinheit des gestörten Aethers gleich:

$$\frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2).$$

Messen wir die Kräfte in dieser Weise, so sagen wir, dass wir sie in absolutem Gaussischen Maasse messen.[1]) Die Dimension der elektrischen Kraft wird dieselbe wie die der magnetischen, beide werden von solcher Art, dass ihr Quadrat die Dimension einer Energie in der Volumeneinheit hat, sie werden also in der üblichen Bezeichnungsweise gleich: $M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$.

Für jeden isotropen ponderabelen Körper können wir nun nach dem Bisherigen setzen die Energie der Volumeneinheit gleich:

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2).$$

Die neu eingeführten Constanten ε und μ sind nothwendig positive reine Zahlen. Wir nennen ε die Dielektricitätsconstante, μ die Magnetisirungsconstante des Stoffes. Offenbar sind ε und μ Verhältnisszahlen, durch welche wir die Energie eines Stoffes vergleichen mit der Energie eines anderen Stoffes. Aus der Natur eines Stoffes allein geht ein bestimmter Werth derselben nicht hervor. Dies meinen wir, wenn wir sagen, Dielektricitäts- und Magnetisirungsconstante seien keine inneren Constanten eines Stoffes. Es ist nicht unrichtig, wenn wir sagen, diese Constanten seien gleich Eins für den Aether, aber es enthält diese Behauptung keine Thatsache der Erfahrung, sondern eine willkürliche Festsetzung unsererseits.

Für krystallinische Körper wird die Energie der Volumeneinheit gleich:

$$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{11} X^2 + \varepsilon_{22} Y^2 + \varepsilon_{33} Z^2 + 2\varepsilon_{12} XY + 2\varepsilon_{23} YZ + 2\varepsilon_{13} XZ)$$
$$+ \frac{1}{8\pi}(\mu_{11} L^2 + \mu_{22} M^2 + \mu_{33} N^2 + 2\mu_{12} LM + 2\mu_{23} MN + 2\mu_{13} LN).$$

Durch bestimmte Wahl der Axen lässt sich der eine oder der andere Theil dieses Ausdruckes in eine Summe von drei Quadraten transformiren. Es ist wohl wahrscheinlich, dass dieselbe Wahl der Axen für den einen wie für den anderen Theil diesen Dienst leistet. Die ε und μ müssen von solcher Beschaffenheit

[1]) Siehe H. Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 42. 1882.

sein, dass bei der Transformation in eine Quadratsumme alle Coëfficienten positiv werden.

3. Zusammenhang der Kräfte im Aether.

Wir nehmen an, dass das benutzte Coordinatensystem der x, y, z von solcher Beschaffenheit ist, dass, wenn die Richtung der positiven x von uns aus nach vorn, die der positiven z von uns aus nach oben geht, alsdann die y von links nach rechts hin wachsen. Unter dieser Voraussetzung sind die elektrischen und magnetischen Kräfte im Aether miteinander verknüpft nach folgenden Gleichungen:

$$(3_a)\left\{\begin{aligned} A\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \\ A\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \\ A\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}; \end{aligned}\right. \qquad (3_b)\left\{\begin{aligned} A\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}, \\ A\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}, \\ A\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}; \end{aligned}\right.$$

zu welchen die ihnen nicht widersprechenden Gleichungen:

$$(3_c)\qquad \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dx}=0, \qquad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0$$

als eine den Aether von der ponderabelen Materie auszeichnende Ergänzung hinzutreten.

Nachdem diese Gleichungen einmal gefunden sind, erscheint es nicht mehr zweckmässig, dieselben aus Vermuthungen über die elektrische und magnetische Constitution des Aethers und das Wesen der wirkenden Kräfte, als wären dies bekanntere Dinge, herzuleiten, wie es allerdings dem historischen Gange entsprechen würde. Viel eher ist es zweckmässig, an diese Gleichungen die weiteren Vermuthungen über die Constitution des Aethers anzuknüpfen.

Da die Dimensionen der L, M, N und der X, Y, Z die gleichen sind, so ist die Constante A eine reciproke Geschwindigkeit. Sie ist in Wahrheit eine innere Constante des Aethers; wir wollen damit sagen, dass ihre Grösse weder von dem Vorhandensein eines anderen Körpers, noch von willkürlichen Festsetzungen unsererseits abhängig ist.

Wir multipliciren unsere Gleichungen sämmtlich mit $(1/4\pi A).d\tau$, ferner einzeln der Reihe nach mit bez. L, M, N,

X, Y, Z und addiren sie sämmtlich. Wir integriren beide Seiten der entstehenden Gleichung über einen beliebig begrenzten Raum, dessen Oberflächenelement $d\omega$ mit den Coordinatenaxen die Winkel n,x, n,y, n,z bildet. Rechts lässt sich die Integration ausführen und wir erhalten:

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2\right\}d\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi A}\int\left\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y\right.$$
$$\left.+(MX-LY)\cos n,z\right\}d\omega.$$

Das links stehende Integral ist die elektromagnetische Energie des Raumes; die Gleichung giebt uns also die Aenderung dieser Energie, ausgedrückt durch Grössen, welche sich allein auf die Oberfläche des Raumes beziehen.

4. Isotrope Nichtleiter.

In homogenen isotropen Nichtleitern verlaufen die Erscheinungen qualitativ vollkommen wie im freien Aether. Quantitativ sind Unterschiede insofern vorhanden, als erstens die innere Constante einen anderen Werth hat als im Aether, und als zweitens der Energievorrath der Volumeneinheit in der bereits angegebenen Weise die Constanten ε und μ enthält. Wir entsprechen diesen Aussagen und genügen der Erfahrung, indem wir setzen:

$$(4_a)\begin{cases} A\mu\frac{dL}{dt}=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \\ A\mu\frac{dM}{dt}=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \\ A\mu\frac{dN}{dt}=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}; \end{cases}\qquad (4_b)\begin{cases} A\varepsilon\frac{dX}{dt}=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}, \\ A\varepsilon\frac{dY}{dt}=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}, \\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt}=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Denn wenn wir für einen Augenblick in dem Nichtleiter das Maass der Kräfte so bestimmen, wie wir es im Aether gethan haben und demgemäss für X, Y, Z einführen $X/\sqrt{\varepsilon}$, $Y/\sqrt{\varepsilon}$, $Z/\sqrt{\varepsilon}$, und für L, M, N einführen $L/\sqrt{\mu}$, $M/\sqrt{\mu}$, $N/\sqrt{\mu}$, so nehmen die Gleichungen genau die Form der Gleichungen des Aethers an, mit dem einzigen Unterschiede, dass an Stelle der Grösse A die Grösse $A/\sqrt{\varepsilon\mu}$ tritt. Behalten wir auf der anderen Seite unser Maass der Kräfte bei, so können wir widerspruchsfrei der Energie den geforderten Werth beilegen. Denn die Ausführung der gleichen Operation, welche wir im vorigen Abschnitt anwandten, ergiebt uns hier:

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2\right\}d\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi A}\int\Big\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y$$
$$+(MX-LY)\cos n,z\Big\}\,d\omega.$$

Die allgemeinen Aussagen, durch welche wir uns auf unsere Gleichungen haben führen lassen, versagen, wenn wir den Nichtleiter nicht mehr als homogen betrachten. Es fragt sich also, ob in diesem Falle unsere Gleichungen noch gelten. Die Erfahrung beantwortet diese Frage in bejahendem Sinne; wir können also in den Gleichungen (4_a) und (4_b) die Grössen ε und μ als von Punkt zu Punkt veränderlich betrachten.

5. Krystallinische Nichtleiter.

Eine Darstellung der Vorgänge in solchen Körpern, welche nach verschiedener Richtung verschieden entwickelt sind, deren elektromagnetische Eigenschaften aber bei verschwindendem Anisotropismus in die der isotropen Nichtleiter übergehen, erhalten wir, wenn wir die in unseren Gleichungen links stehenden zeitlichen Aenderungen der Kräfte als ganz allgemeine lineare Functionen der rechts stehenden räumlichen Aenderungen der Kräfte entgegengesetzter Art betrachten. Die Allgemeinheit der Form dieser linearen Functionen und die Auswahl ihrer Constanten wird indessen beschränkt durch die Vermutung, dass dieselbe Operation, welche uns bisher eine Gleichung für die Aenderung der Energie lieferte, dies allgemein thun wird, und durch die Forderung, dass dabei die Energie selbst die bereits festgestellte Form annehmen muss. Durch diese Ueberlegungen werden wir auf die folgenden Gleichungen hingeleitet, welche in der That zur Darstellung der wichtigsten Erscheinungen genügen:

$$
(5_a)\quad \begin{cases}
A\left(\mu_{11}\dfrac{dL}{dt}+\mu_{12}\dfrac{dM}{dt}+\mu_{13}\dfrac{dN}{dt}\right)=\dfrac{dZ}{dy}-\dfrac{dY}{dz}, \\
A\left(\mu_{12}\dfrac{dL}{dt}+\mu_{22}\dfrac{dM}{dt}+\mu_{23}\dfrac{dN}{dt}\right)=\dfrac{dX}{dz}-\dfrac{dZ}{dx}, \\
A\left(\mu_{13}\dfrac{dL}{dt}+\mu_{23}\dfrac{dM}{dt}+\mu_{33}\dfrac{dN}{dt}\right)=\dfrac{dY}{dx}-\dfrac{dX}{dy};
\end{cases}
$$

$$
(5_b)\quad \begin{cases}
A\left(\varepsilon_{11}\dfrac{dX}{dt}+\varepsilon_{12}\dfrac{dY}{dt}+\varepsilon_{13}\dfrac{dZ}{dt}\right)=\dfrac{dM}{dz}-\dfrac{dN}{dy}, \\
A\left(\varepsilon_{12}\dfrac{dX}{dt}+\varepsilon_{22}\dfrac{dY}{dt}+\varepsilon_{23}\dfrac{dZ}{dt}\right)=\dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dL}{dz}, \\
A\left(\varepsilon_{13}\dfrac{dX}{dt}+\varepsilon_{23}\dfrac{dY}{dt}+\varepsilon_{33}\dfrac{dZ}{dt}\right)=\dfrac{dL}{dy}-\dfrac{dM}{dx}.
\end{cases}
$$

Die Gleichung für die Aenderung der Energie eines Raumes ergiebt das gleiche Resultat wie in Abschnitt 3 und 4. Auch in den Gleichungen des gegenwärtigen Abschnittes ist es erfahrungsmässig nicht nöthig, die ε und μ als constant in Hinsicht des Raumes anzusehen, vielmehr können dieselben beliebig von Punkt zu Punkt veränderliche Grössen sein.

6. Vertheilung der Kräfte in Leitern.

In den Körpern, welche wir bisher betrachteten, erscheint jede Aenderung der elektrischen Kraft als bedingt durch das Vorhandensein magnetischer Kräfte. Sind in einem endlichen Bereich die magnetischen Kräfte gleich Null, so fällt jede Ursache für eine solche Aenderung fort und eine vorhandene Vertheilung elektrischer Kraft bleibt sich selbst überlassen dauernd bestehen, solange nicht von den Grenzen des Bereiches her eine Störung das Innere trifft. Nicht in allen Körpern zeigen die elektrischen Kräfte dies Verhalten. In vielen Körpern schwindet eine sich selbst überlassene elektrische Kraft mehr oder weniger schnell dahin; in solchen Körpern sind magnetische Kräfte oder andere Ursachen erforderlich, um eine vorhandene Vertheilung vor der Veränderung zu bewahren. Solche Körper bezeichnen wir aus Gründen, die später hervortreten, als Leiter. Die einfachsten Annahmen, welche wir in Hinsicht derselben machen können, sind diese, dass erstens der Verlust, welchen eine sich selbst überlassene elektrische Kraft in der Zeiteinheit erleidet, der Kraft selbst proportional ist, und dass zweitens unabhängig von diesem Verlust die magnetischen Kräfte hier dieselben Aenderungen hervorzubringen streben, wie in den bisher betrachteten Körpern. Führen wir eine neue Constante λ ein, so erlaubt uns die erste Annahme zu behaupten, dass die sich selbst überlassene Kraftcomponente X sich ändern werde nach der Gleichung:

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = -4\pi\lambda A X.$$

Die zweite Annahme ergänzt diese erste dahin, dass, wenn magnetische Kräfte vorhanden sind, die Aenderung geschehen werde nach der Gleichung:

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda A X.$$

Die Constante λ heisst die specifische elektrostatisch gemessene Leitungsfähigkeit des Körpers. Ihre Dimension ist die einer reciproken Zeit. Die Grösse $\varepsilon / 4\pi\lambda$ ist daher eine Zeit; es ist diejenige Zeit, in welcher die sich selbst überlassene Kraft auf den $e$ten Theil ihres Anfangswerthes herabsinkt, die sogenannte Relaxationszeit. Die letztere, nicht etwa λ selbst, ist, wie zuerst Hr. E. Cohn bemerkt und hervorgehoben hat[1]), neben der ersten eine zweite innere Constante des betrachteten Körpers, eindeutig festsetzbar ohne Zuhülfenahme eines zweiten Mediums.

Unsere Ueberlegungen führen uns nun vermuthungsweise auf folgende Gleichungen, welche den Erfahrungen genügen:

$$(6_a)\left\{\begin{aligned} A\mu\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{aligned}\right. \qquad (6_b)\left\{\begin{aligned} A\varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda A X, \\ A\varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda A Y, \\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda A Z. \end{aligned}\right.$$

Offenbar beziehen sich diese Gleichungen nur auf isotrope Körper, dagegen ist es, was unsere bisherigen Voraussetzungen anlangt, nicht nothwendig, dass die Körper auch homogen seien. Um indessen in Wahrheit die Vertheilung der Kräfte in anhomogenen Körpern genau darzustellen, bedürfen unsere Gleichungen noch einer gewissen Ergänzung. Aendert sich nämlich die

[1]) Vgl. dieserhalb und in Hinsicht der Art, wie hier die Grösse λ eingeführt wird: E. Cohn, Berl. Ber. 26. p. 405. 1889.

Beschaffenheit eines Körpers von Punkt zu Punkt, so sinkt im allgemeinen die elektrische Kraft sich selbst überlassen nicht völlig auf Null ab, sondern nimmt einen gewissen von Null verschiedenen Endwerth an. Diesen Werth, dessen Componenten X' Y' Z' sein mögen, nennen wir die in dem betreffenden Punkte wirksame elektromotorische Kraft. Wir betrachten dieselbe als unabhängig von der Zeit, sie ist im allgemeinen um so grösser, je grösser die Aenderung der chemischen Beschaffenheit in der Längeneinheit ist. Wir tragen der Wirkung der elektromotorischen Kraft Rechnung, indem wir den Abfall der sich selbst überlassenen elektrischen Kraft nicht ihrem absoluten Werthe proportional setzen, sondern dem Unterschiede, welcher noch vorhanden ist zwischen diesem absoluten Werthe und dem Endwerthe. Unsere Gleichungen werden so für Leiter, deren Structur zum Auftreten elektromotorischer Kräfte Anlass giebt:

$$(6_c)\left\{\begin{aligned} A\mu\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \\ A\mu\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \\ A\mu\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}, \end{aligned}\right. \quad (6_d)\left\{\begin{aligned} A\varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi\lambda A(X-X'), \\ A\varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}-4\pi\lambda A(Y-Y'), \\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}-4\pi\lambda A(Z-Z'). \end{aligned}\right.$$

7. Anisotrope Leiter.

Verhält sich der Leiter nach verschiedenen Richtungen verschieden, so dürfen wir nicht mehr annehmen, dass der Abfall einer jeden Componente der sich selbst überlassenen Kraft nur abhänge von dem Werthe dieser Componente selbst, es liegt aber die Vermuthung nahe, dass er eine lineare Function der drei Componenten sei. Nehmen wir zu dieser Vermuthung die Voraussetzung, dass für verschwindendes Leitungsvermögen die Gleichungen sich auf die eines anisotropen Nichtleiters reduciren, so gelangen wir zu folgendem System:

$$(7_a)\left\{\begin{aligned} A\left(\mu_{11}\frac{dL}{dt}+\mu_{12}\frac{dM}{dt}+\mu_{13}\frac{dN}{dt}\right) &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \\ A\left(\mu_{12}\frac{dL}{dt}+\mu_{22}\frac{dM}{dt}+\mu_{23}\frac{dN}{dt}\right) &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \\ A\left(\mu_{13}\frac{dL}{dt}+\mu_{23}\frac{dM}{dt}+\mu_{33}\frac{dN}{dt}\right) &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}, \end{aligned}\right.$$

$$(7_b)\begin{cases} A\left(\varepsilon_{11}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{12}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{13}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy} \\ \qquad -4\pi A\left\{\lambda_{11}(X-X')+\lambda_{12}(Y-Y')+\lambda_{13}(Z-Z')\right\}, \\ A\left(\varepsilon_{12}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{22}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz} \\ \qquad -4\pi A\left\{\lambda_{21}(X-X')+\lambda_{22}(Y-Y')+\lambda_{23}(Z-Z')\right\}, \\ A\left(\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx} \\ \qquad -4\pi A\left\{\lambda_{31}(X-X')+\lambda_{32}(Y-Y')+\lambda_{33}(Z-Z')\right\}. \end{cases}$$

Es ist sehr wahrscheinlich, dass für alle wirklichen Körper $\lambda_{12}=\lambda_{21}$, $\lambda_{31}=\lambda_{13}$, $\lambda_{23}=\lambda_{32}$ sei. Auch in den Gleichungen dieses Abschnittes können die Constanten ε, μ, λ als von Ort zu Ort ihren Werth verändernd angesehen werden.

8. Grenzbedingungen.

Man bemerkt leicht, dass die Gleichungen 7_a und 7_b alle früheren als besondere Fälle umfassen und dass selbst die Gleichungen des freien Aethers aus ihnen durch besondere Verfügung über die Constanten hervorgehen. Da nun diese Constanten Functionen des Raumes sein können, so liegt es nahe, die Grenzfläche zweier heterogenen Körper anzusehen als eine Uebergangsschicht, in welcher zwar die Constanten ausserordentlich rasch von einem Werth zu einem anderen übergehen, in welcher dies jedoch in solcher Weise geschieht, dass auch in der Schicht selbst jene Gleichungen immer noch gelten und endliche Beziehungen zwischen den endlich bleibenden Werthen der Constanten und den ebenfalls endlich bleibenden Kräften ausdrücken. Um aus dieser der Erfahrung genügenden Vermuthung die Grenzbedingungen abzuleiten, lassen wir der Einfachheit halber das betrachtete Element der Trennungsfläche mit der xy-Ebene zusammenfallen.

Beachten wir zunächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte zwischen den sich berührenden Körpern nicht, so ergiebt die Betrachtung der ersten beiden der Gleichungen 7_a und 7_b, dass die Grössen:

$$\frac{dX}{dz},\quad \frac{dY}{dz},\quad \frac{dM}{dz},\quad \frac{dL}{dz}$$

zufolge unserer Voraussetzung auch in der Uebergangsschicht endlich bleiben müssen. Bezieht sich also der Index 1 auf die eine, der Index 2 auf die andere Seite der Grenzschicht, so muss sein:

$$(8_a)\quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= 0, \\ X_2 - X_1 &= 0. \end{aligned} \qquad (8_b)\quad \begin{aligned} M_2 - M_1 &= 0, \\ L_2 - L_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die zur Grenzfläche tangentialen Componenten der Kräfte pflanzen sich also stetig durch dieselbe fort. Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen (7_a) und (7_b) ergiebt dann weiter, dass die Ausdrücke:

$$\mu_{13}\frac{dL}{dt} + \mu_{23}\frac{dM}{dt} + \mu_{33}\frac{dN}{dt} \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{23}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt} + 4\pi(\lambda_{31}X + \lambda_{32}Y + \lambda_{33}Z)$$

den gleichen Werth haben müssen auf der einen und auf der anderen Seite der Grenzschicht. Diese Aussage, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Normalcomponenten der Kraft auf beiden Seiten der Grenzfläche giebt, nimmt für isotrope Körper die einfache Form an:

$$(8_c)\quad \mu_1\frac{dN_1}{dt} - \mu_2\frac{dN_2}{dt} = 0,$$

$$(8_d)\quad \varepsilon_1\frac{dZ_1}{dt} - \varepsilon_2\frac{dZ_2}{dt} = -4\pi(\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2).$$

Schliessen wir demnächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte in der Grenzfläche nicht aus, so haben wir zu beachten, dass erfahrungsmässig die zur Grenzfläche normale Componente dieser Kräfte, also Z', in der Uebergangsschicht selbst unendlich wird, in solcher Weise jedoch, dass das durch die Grenzfläche hindurch erstreckte Integral $\int Z' dz$ einen endlichen Werth behält, welchen uns die Versuche angeben, während sie uns über den Verlauf von Z' selbst im Unklaren lassen. Wir genügen der Voraussetzung dieses Abschnittes nunmehr durch die Annahme, dass in der Uebergangsschicht neben L, M, N, X, Y die Grösse $Z-Z'$ endlich bleibe. Z wird dann daselbst unendlich, dZ/dt aber können wir nichsdestoweniger endlich belassen. Wir setzen ferner:

$$(8_e)\quad \int Z\,dz = \int Z'\,dz = \varphi_{1\cdot 2}.$$

Integriren wir nunmehr die ersten zwei der Gleichungen (7_a) und (7_b) nach Multiplication mit dx durch die Uebergangsschicht hindurch, so erhalten wir, da wegen der Kürze des Weges das Integral jeder endlichen Grösse verschwindet, die Bedingungen:

$$(8_l)\quad \begin{cases} Y_2 - Y_1 = \dfrac{d\varphi_{1,2}}{dy}, \\ X_2 - X_1 = \dfrac{d\varphi_{1,2}}{dx}, \end{cases} \qquad (8_g)\quad \begin{cases} M_2 - M_1 = 0, \\ N_2 - N_1 = 0. \end{cases}$$

Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen (7_a) und (7_b) ergiebt dann als Bedingungen für die Normalkräfte, dass zu beiden Seiten der Grenzfläche die Werthe der Ausdrücke:

$$\mu_{13}\frac{dL}{dt} + \mu_{23}\frac{dM}{dt} + \mu_{33}\frac{dN}{dt},$$

$$\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{23}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt} + 4\pi\Big\{\lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z')\Big\}$$

die gleichen sein müssen. Sind die Körper zu beiden Seiten der Grenzfläche homogen, so hat das Vorhandensein der elektromotorischen Kräfte keinen Einfluss auf die Bedingungen, durch welche die zu beiden Seiten herrschenden Kräfte mit einander verknüpft sind.

Da unsere Grenzbedingungen nichts anderes sind, als die allgemeinen Gleichungen (7_a) und (7_b), transformirt für besondere Verhältnisse, so können wir jede Aussage und jede Operation, welche in einem bestimmten Bereich diese allgemeinen Gleichungen betrifft, ohne weiteres auch über die in dem Bereich vorkommenden Grenzen heterogener Körper uns erstreckt denken, vorausgesetzt nur, dass dieses Verfahren nicht mathematische Unzulässigkeiten einschliesst, vorausgesetzt also, dass sich unsere Aussagen und Operationen unmittelbar oder nach geeigneter Umformung beständig in endlichen und bestimmten Ausdrücken bewegen. Wir werden der hieraus entspringenden Bequemlichkeit des öfteren uns bedienen. Wenn wir dabei im allgemeinen darauf verzichten, den Beweis der Endlichkeit und Bestimmtheit aller vorkommenden Ausdrücke zu erbringen, so geschieht dies nicht, weil wir diesen Beweis für überflüssig hielten, sondern nur, weil für alle in Betracht kommenden Fälle der Beweis schon seit lange erbracht oder nach bekannten Mustern zu erbringen ist.

Von den bisherigen Abschnitten vermehrte ein jeder die Zahl der von der Theorie umfassten Thatsachen. Im Gegensatz dazu handeln die nächstfolgenden Abschnitte von Namen und Bezeichnungen. Da durch Einführung derselben die Zahl der umfassten Thatsachen nicht vermehrt wird, so sind sie nur ein Beiwerk der Theorie; ihr Werth besteht zum Theil in der Ermöglichung einer kürzeren Ausdrucksweise, zum Theil aber auch nur darin, dass sie die Verbindung unserer Theorie mit den älteren Anschauungen der Elektricitätslehre vermitteln.

9. Elektrische und magnetische Polarisation.

Soweit sich unsere Gleichungen auf isotrope Medien beziehen, giebt jede einzelne den im nächsten Augenblick statthabenden Werth einer einzigen der in Betracht kommenden physikalischen Grössen, ausgedrückt als eindeutige Function der im gegenwärtigen Augenblick vorhandenen Zustände. Diese Form der Gleichungen ist eine sehr vollkommene vom mathemathischen Standpunkte aus, weil sie uns von vornherein übersehen lässt, dass die Gleichungen den Ablauf eines jeden willkürlich angeregten Processes eindeutig bestimmen. Sie ist sehr vollkommen auch von einem mehr philosophischen Standpunkte aus, weil sie uns sogleich in der linken Seite der Gleichung den zukünftigen Zustand, die Wirkung, erkennen lässt, in der rechten Seite der Gleichung aber als Ursache den gegenwärtigen Zustand aufweist. Diejenigen unserer Gleichungen, welche sich auf anisotrope Medien beziehen, haben nicht diese vollkommene Form, da sie auf der linken Seite nicht die Aenderungen einer einzelnen physikalischen Grösse, sondern Functionen solcher Aenderungen enthalten. Da diese Functionen lineare sind, kann allerdings durch Auflösung der Gleichungen nach den einzelnen Aenderungen die gewünschte Form hergestellt werden. Ein anderes Mittel zu gleichem Zwecke, welches zugleich die Gleichungen vereinfacht, ist die Einführung der Grössen, welche wir Polarisationen nennen. Wir setzen:

$$(9_c)\begin{cases}\mathfrak{L}=\mu_{11}L+\mu_{12}M+\mu_{13}N,\\ \mathfrak{M}=\mu_{12}L+\mu_{22}M+\mu_{23}N,\\ \mathfrak{N}=\mu_{13}L+\mu_{23}M+\mu_{33}N;\end{cases}\qquad (9_d)\begin{cases}\mathfrak{X}=\varepsilon_{11}X+\varepsilon_{12}Y+\varepsilon_{13}Z,\\ \mathfrak{Y}=\varepsilon_{12}X+\varepsilon_{22}Y+\varepsilon_{23}Z,\\ \mathfrak{Z}=\varepsilon_{13}X+\varepsilon_{23}Y+\varepsilon_{33}Z,\end{cases}$$

und nennen die Resultante der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die magnetische, die Resultante der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die elektrische Polarisation. Für isotrope Medien sind Polarisationen und Kräfte gleich gerichtet, und das Verhältniss ersterer zu letzteren ist die Dielektricitäts-, resp. Magnetisirungsconstante. Für den Aether fallen Polarisationen und Kräfte zusammen. Führen wir die Polarisationen in die linken Seiten unserer Gleichungen ein, so giebt uns jede Gleichung die Aenderung einer einzigen Polarisationscomponente als Folge der augenblicklich vorhandenen Kräfte. Da die Kräfte lineare Functionen der Polarisationen sind, so hat es keine Schwierigkeit, auch auf der rechten Seite der Gleichungen die Polarisationen einzuführen. Wir würden hierdurch diejenige gerichtete Grösse, durch welche wir die elektromagnetischen Zustände zuerst bestimmten, die Kraft, ersetzt haben durch eine andere gerichtete Grösse, die Polarisation, welche uns das gleiche, aber wenig mehr leistet, als jene. Dass die Einführung der Polarisationen und Kräfte nebeneinander die Gleichungen wesentlich vereinfacht, ist eine erste Andeutung dafür, dass eine vollständige Darstellung der Zustände in ponderabeln Körpern die Angabe mindestens zweier gerichteten Grössen für den elektrischen und zweier gerichteten Grössen für den magnetischen Zustand erfordert.

Um unsere Gleichungen weiter zu vereinfachen, setzen wir:

$$(9_e)\quad\begin{cases}u=\lambda_{11}(X-X')+\lambda_{12}(Y-Y')+\lambda_{13}(Z-Z'),\\ v=\lambda_{21}(X-X')+\lambda_{22}(Y-Y')+\lambda_{23}(Z-Z'),\\ w=\lambda_{31}(X-X')+\lambda_{32}(Y-Y')+\lambda_{33}(Z-Z').\end{cases}$$

Aus Gründen, welche im folgenden Abschnitt hervortreten, nennen wir u, v, w die (elektrostatisch gemessenen) Componenten der elektrischen Strömung.

Unsere allgemeinsten Gleichungen nehmen nunmehr die Form an:

$$(9_a)\begin{cases} A\dfrac{d\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}, \\ A\dfrac{d\mathfrak{M}}{dt} = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx}, \\ A\dfrac{d\mathfrak{N}}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy}; \end{cases} \qquad (9_b)\begin{cases} A\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} - 4\pi A u, \\ A\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz} - 4\pi A v, \\ A\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx} - 4\pi A w, \end{cases}$$

und die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit eines beliebigen Körpers erhält durch Einführung der Polarisationen die Gestalt:

$$\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z) + \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N).$$

In diesen Aussagen kommen keine Grössen mehr vor, welche sich auf einen besonderen Körper beziehen. Die Aussage, dass diese Gleichungen für alle Punkte des unendlichen Raumes erfüllt sein müssen, umfasst alle in dies Gebiet einzureihenden Probleme, und die unendliche Mannigfaltigkeit dieser Probleme entsteht nur dadurch, dass die Constanten der linearen Relationen (9_c), (9_d), (9_e), nämlich die ε, μ, λ, X', Y', Z' in mannigfaltiger Weise Functionen des Raumes sein können, teils stätig, theils unstätig von Punkt zu Punkt sich verändernd.

10. Elektricität und Magnetismus.

Es sei ein System ponderabeler Körper, in welchem elektromagnetische Vorgänge sich abspielen, durch den leeren Raum abgegrenzt gegen andere Systeme. Differentiiren wir die drei Gleichungen (9_b) bezw. nach x, y, z und addiren, so erhalten wir für alle Punkte des Systems die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right) = -4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).$$

Wir multipliciren diese Gleichung mit dem Raumelement $d\tau$ und integriren über den Raum bis zu einer beliebigen, das ponderabele System vollständig umschliessenden Fläche. Das Element dieser Fläche sei $d\omega$, die auf $d\omega$ senkrechte Richtung bilde mit den Axen die Winkel n, x, n, y, n, z. Wir erhalten, da die u, v, w an der Fläche gleich Null sind:

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int(\mathfrak{X}\cos n,x + \mathfrak{Y}\cos n,y + \mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega$$

$$= -4\pi \int \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau$$

$$= -4\pi \int (u \cos n,x + v \cos n,y + w \cos n,z)\, d\omega = 0.$$

Also, wenn e eine von der Zeit unabhängige Grösse bezeichnet:

$$(10_a) \left\{ \begin{aligned} &\int \left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) d\tau \\ &= \int (\mathfrak{X} \cos n,x + \mathfrak{Y} \cos n,y + \mathfrak{Z} \cos n,z)\, d\omega = 4\pi e. \end{aligned} \right.$$

Die Grösse e ist offenbar eine Function des elektrischen Zustandes des Systems und zwar eine solche Function, welche durch keine inneren oder äusseren lediglich elektrodynamischen Vorgänge vermehrt oder vermindert werden kann. Diese Unzerstörbarkeit der Grösse e, welche dieselbe auch gegenüber anderen als rein elektrodynamischen Vorgängen bewahrt, so lange sich diese Vorgänge auf das Innere des Systems beschränken, hat die Vermuthung wachgerufen, dass e die Menge einer in dem System enthaltenen Substanz angebe. Entsprechend dieser Anschauung nennen wir e die Menge der in dem ponderabelen System enthaltenen Elektricität. Allerdings kann e positiv oder negativ sein, während die Menge einer Substanz nothwendig positiv ist. Man hat deshalb die Hypothese vervollständigt durch die Annahme zweier Elektricitäten von entgegengesetzten Eigenschaften und hat dem e dann die Bedeutung der Differenz beider beigelegt, oder man hat Hülfe gesucht in der Annahme, es bezeichne e nur die Abweichung des wirklichen Gehaltes an Elektricität von dem normalen. Stellt aber in einer dieser oder in einer anderen Form e die Menge einer Substanz dar, so muss jedes Raumelement $d\tau$ seinen bestimmten Beitrag zu dem Gesammtwerthe von e liefern. Nur vermuthungsweise können wir das Raumintegral, welches uns e liefert, auf die einzelnen Raumelemente vertheilen. Eine erste mögliche und augenblicklich naheliegende Vertheilung legt dem Raumelement $d\tau$ den Elektricitätsinhalt:

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) d\tau$$

bei. Die so bestimmte Elektricitätsmenge des Raumelementes wollen wir die wahre Elektricität desselben nennen; dementsprechend nennen wir im Innern eines Körpers den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

die wahre räumliche Dichte und an der Grenzfläche verschiedenartiger Körper den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1)\cos n,x+(\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1)\cos n,y+(\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)\cos n,z\right\}$$

die wahre Flächendichte der Elektricität.

Eine andere mögliche und naheliegende Vertheilung von e auf die Raumelemente erhalten wir durch die Bemerkung, dass im leeren Raume Polarisationen und Kräfte identisch sind, dass wir also schreiben können an Stelle von (10_a):

$$(10_b)\left\{\begin{aligned} 4\pi e &= \int (X\cos n,x+Y\cos n,y+Z\cos n,z)\,d\omega \\ &= \int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau, \end{aligned}\right.$$

und weiterhin den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau$$

als den Beitrag betrachten, welchen das Raumelement $d\tau$ zu e liefert. Die so bestimmte Elektricitätsmenge eines Raumelementes nennen wir die freie Elektricität desselben, dementsprechend:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)$$

die freie räumliche Dichte, und an Unstätigkeitsflächen:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(X_2-X_1)\cos n,x+(Y_2-Y_1)\cos n,y+(Z_2-Z_1)\cos n,z\right\}$$

die freie Flächendichtigkeit der Elektricität. Den Unterschied zwischen der wahren und der freien Elektricität nennen wir die gebundene Elektricität. Unsere Bezeichnungsweise schliesst sich derjenigen üblichen Bezeichnungsweise an, welche ihren Ursprung aus der bisherigen Anschauung von dem Zustandekommen der elektrischen Fernwirkungen nimmt.[1]) Nach dieser Anschauung

[1]) [Siehe Anmerkung 30 am Schluss des Buches.]

wird ein Theil der in einen Nichtleiter eingeführten fremden oder „wahren" Elektricitätsmengen durch elektrische Verschiebungen[1]) in den Molecülen des umgebenden Mittels „gebunden", während der Rest „frei" bleibt, seine Fernwirkungen nach aussen zu entfalten. Doch weicht auch in manchen Aussagen unsere Bezeichnungsweise von der üblichen ab. Da aber die letztere schwankend und nicht immer consequent ist, so war es mir nicht möglich, eine Bezeichnungsweise zu finden, welche nicht in irgend einem Falle gegen den Sprachgebrauch verstiess. Auch insofern schwankt die übliche Ausdrucksweise, als sie unter Elektricität schlechthin ohne Unterschied bald die wahre, bald die freie Elektricität versteht, sogar in wichtigen Aussagen.

Nach dem Vorangegangenen bezeichnen wir das durch 4π dividirte und über eine beliebige geschlossene Fläche erstreckte Integral:

$$\int (\mathfrak{X} \cos n, x + \mathfrak{Y} \cos n, y + \mathfrak{Z} \cos n, x)\, d\omega$$

als die von dieser Fläche umschlossene wahre Elektricität. Das gleiche Integral erstreckt über eine nicht geschlossene Fläche wollen wir die Zahl der diese Fläche im Sinne der positiven Normalen durchschneidenden elektrischen Kraftlinien nennen. Durch diese Bezeichnung knüpfen wir an die Vorstellung Faraday's an, derzufolge die Kraftlinien Linien sind, welche in isotropen homogenen Körpern überall in Richtung der herrschenden Kraft laufen, und zwar in einer Fülle, welche der Grösse der Kraft proportional ist. Wir haben allerdings durch unsere Bezeichnung diese Vorstellung dahin vervollständigt, bezw. präcisirt, dass die Kraftlinien in beliebigen Körpern überall in Richtung der Polarisation, nicht der Kraft laufen sollen und haben allgemein ihre Dichte der Grösse der Polarisation, nicht der Kraft proportional gesetzt. Unsere Definitionen bringen es mit sich, dass die mit 4π multiplicirte Menge der in einem beliebigen Raume enthaltenen wahren Elektricität gleich ist dem Ueberschuss der in den Raum eintretenden Kraftlinien über die austretenden. Jede Kraftlinie, welche überhaupt ein Ende findet, mündet demnach an wahrer Elektricität und wir könnten die

[1]) Welche nicht etwa mit unseren Polarisationen identisch sind. [Siehe den theoretischen Theil der Einleitung.]

wahren Elektricitäten definiren als die freien Enden der Kraftlinien. Ist ein gewisser Raum in der Nachbarschaft der Fläche, über welche unser Integral erstreckt ist, frei von wahrer Elektricität, so ist der Werth des Integrales unabhängig von der besonderen Lage der Fläche innerhalb dieses Raumes und nur abhängig von der Lage der Grenzlinie der Fläche. Für diesen Fall bezeichnen wir dann den Werth des Integrales auch als die Zahl der die Umrisslinie durchsetzenden Kraftlinien, indem wir uns die in diesem Ausdruck bleibende Vieldeutigkeit, soweit nöthig, durch besondere Festsetzungen beseitigt denken.

Wir wollen weiter die Aenderung der wahren Elektricität e_w in einem beliebig begrenzten Theile unseres Systems berechnen. Es möge $d\omega$ wiederum ein Element der Grenzfläche dieses Theiles sein. Wir erhalten:

$$(10_c)\quad \frac{de_w}{dt} = -\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau = -\int(u\cos n,x + v\cos n,y + w\cos n,z)\,d\omega.$$

Verläuft nun unsere Grenzfläche lediglich in solchen Körpern, für welche die λ gleich Null sind, so verschwinden an der Fläche immer noch die u, v, w, es ist also der Inhalt des umspannten Raumes an wahrer Elektricität constant. Aus einem Raume, welcher vollständig von Körpern umgeben ist, für welche die λ gleich Null sind, vermag demnach die wahre Elektricität durch rein elektrodynamische Vorgänge nicht zu entweichen. Aus dieser Ursache nennen und nannten wir solche Körper Nichtleiter. Geht die Grenzfläche aber ganz oder theilweise durch Körper, in welchen die λ von Null verschieden sind, so ist eine Aenderung des Elektricitätsgehaltes des umschlossenen Raumes durch rein elektrische Bewegungen möglich; aus diesem Grunde bezeichnen wir Körper der letzteren Art als Leiter. Die Unterscheidung der Körper in Leiter und Nichtleiter bezieht sich also auf die wahre Elektricität, in Hinsicht der freien Elektricität können alle Körper als Leiter betrachtet werden (Verschiebungsströme). Die Menge einer Substanz kann sich in einem Raume nur mittelst Ein- und Austrittes durch die Oberfläche hindurch verändern, und zwar muss durch jedes Oberflächenelement hindurch eine bestimmte Menge der Substanz treten. Mit der Thatsache, dass durch jede geschlossene Oberfläche in der Zeiteinheit die durch unser Integral angegebene Elektricitätsmenge tritt, ist die Annahme vereinbar, dass durch die Flächeneinheit jedes Oberflächenelementes die Menge:

$$u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z$$

trete. Entsprechend dieser Annahme nennen und nannten wir u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung und das über eine nicht geschlossene Oberfläche genommene Integral

$$\int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z)\, d\,\omega$$

den diese Fläche durchfliessenden elektrischen Strom. Es muss indessen hervorgehoben werden, dass selbst wenn die Stofflichkeit der Elektricität zugegeben ist, die obige specielle Bestimmung ihrer Strömung in Leitern eine weitere Hypothese einschliesst. Dem gefundenen Systeme der Bewegung kann ein willkürliches, in jedem Augenblick geschlossenes Stromsystem überdeckt werden, ohne dass dadurch die Ab- oder Zunahme der Elektricität in irgend einem Punkte sich änderte.

Ist ein Theil unseres Systems durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unelektrischen Zustand in seinen gegenwärtigen gelangt, oder kann er durch lediglich elektromagnetische Veränderungen in den unelektrischen Zustand zurückkehren, so ist in allen Nichtleitern dieses Theiles die wahre Elektricität gleich Null. Für solche Theile eines Systems treten dann also zu den allgemeinen Gleichungen noch die folgenden, mit ihnen verträglichen als Beschränkungen der zulässigen Anfangszustände hinzu:

$$\frac{d\,\mathfrak{X}}{d\,x} + \frac{d\,\mathfrak{Y}}{d\,y} + \frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,z} = 0$$

für das Innere der Nichtleiter;

$$(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) \cos n, x + (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1) \cos n, y + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1) \cos n, z = 0$$

für die Grenze zweier heterogener Nichtleiter.

Ganz analoge Betrachtungen wie in Hinsicht der elektrischen lassen sich anstellen in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen. Indem wir auf diese eingehen und dabei die Gleichungen (9_a) benutzen, nennen wir für das Innere eines Körpers:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,x} + \frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,y} + \frac{d\,\mathfrak{N}}{d\,z}\right)$$

die wahre räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper den Ausdruck:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\cos n, x + (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)\cos n, y + (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)\cos n, z\right\}$$

die wahre Flächendichtigkeit des Magnetismus und das über einen bestimmten Theil des Raumes genommene Integral dieser Grössen den in diesem Theil enthaltenen wahren Magnetismus. Das über eine nicht geschlossene Fläche genommene Integral:

$$\int (\mathfrak{L}\cos n, x + \mathfrak{M}\cos n, y + \mathfrak{N}\cos n, z)\, d\omega$$

nennen wir die Zahl der durch diese Fläche, resp. den Umfang dieser Fläche tretenden magnetischen Kraftlinien. Ferner nennen wir für das Innere eines Körpers:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right)$$

die freie räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(L_2 - L_1)\cos n, x + (M_2 - M_1)\cos n, y + (N_2 - N_1)\cos n, z\right\}$$

die freie Flächendichtigkeit des Magnetismus. Die Unterschiede zwischen Leitern und Nichtleitern fallen hier fort, da die Gleichungen (9_a) keine den u, v, w der Gleichungen (9_b) entsprechende Glieder enthalten. In Hinsicht des wahren Magnetismus sind alle Körper Nichtleiter, in Hinsicht des freien Magnetismus können alle Körper als Leiter aufgefasst werden.

Ist ein System oder ein Theil eines solchen durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unmagnetischen Zustand hervorgegangen oder kann es durch solche Vorgänge in denselben zurücksinken, so gelten für das System oder diesen Theil des Systems die Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} = 0$$

für das Innere der Körper und:

$$(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\cos n, x + (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)\cos n, y + (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)\cos n, z = 0$$

für die Grenzflächen heterogener Körper, welche Gleichungen zu den allgemeinen als mit diesen verträgliche Bestimmungen über die möglichen Anfangszustände hinzutreten.

11. Erhaltung der Energie.

Es bezeichne S die elektromagnetische Energie eines Raumes τ, welcher durch die Oberfläche ω begrenzt wird. Wir berechnen die Aenderung von S, indem wir die Gleichungen (9_a) und (9_b) multipliciren sämmtlich mit $(1/4\pi A)\,d\tau$, alsdann der Reihe nach mit L, M, N, X, Y, Z, alles addiren und integriren über den Raum τ. Wir erhalten:

$$(11_a)\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{4\pi A}\displaystyle\int\Big\{(NY - MZ)\cos n,x + (LZ - NX)\cos n,y \\ \quad + (MX - LY)\cos n,z\Big\}\,d\omega - \displaystyle\int(uX + vY + wZ)\,d\tau. \end{cases}$$

Erstrecken wir den Raum τ über ein vollständiges elektromagnetisches System, d. h. bis zu einer Fläche, an welcher die Kräfte verschwinden, so wird unsere Gleichung:

$$\frac{dS}{dt} = -\int(uX + vY + wZ)\,d\tau.$$

Die Erhaltung der Energie verlangt demnach, dass in jedem System, welches der Einwirkung von aussen nicht unterliegt, in der Zeiteinheit ein Energiebetrag von der Grösse des rechts stehenden Integrals in anderer als elektromagnetischer Form auftritt. Die Erfahrung genügt dieser Forderung, sie belehrt uns weitergehend, dass jedes einzelne Raumelement $d\tau$ zum Gesammtbetrage der umgesetzten Energie den Betrag

$$(uX + vY + wZ)\,d\tau$$

liefert und zeigt uns, in welchen neuen Formen diese Energie auftritt. Allerdings leistet dieses die Erfahrung genau gesprochen nicht allgemein, sondern einstweilen nur in Hinsicht der folgenden besonderen Fälle. Im Innern eines homogenen isotropen Leiters nimmt die in der Zeiteinheit und Volumeinheit auftretende Energiemenge nach der Theorie sowohl als nach der Erfahrung die Form an:

$$\lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{\lambda}(u^2 + v^2 + w^2),$$

sie ist stets positiv und entspricht einer Wärmeentwickelung — der Joule'schen Wärme. An der Grenze zweier homogenen isotropen Körper nimmt in der Uebergangsschicht die in der

Volumeinheit auftretende Energiemenge die Form an

$$u\,X' + v\,Y' + w\,Z';$$

eine Integration über die ganze Dicke der Uebergangsschicht ergiebt daraus für die in der Flächeneinheit der Grenze auftretende Energiemenge den Betrag:

$$(u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) \,.\, \varphi_{1,2},$$

welchen Ausdruck ebenfalls die Erfahrung bestätigt. Es kann dieser Ausdruck positiv oder negativ sein, er kann einem Verschwinden oder Entstehen fremder Energieformen entsprechen. Entweder ist die umgesetzte fremde Energie hier gleichfalls Wärme — Peltier'sche Wärme —; in diesem Falle bezeichnen wir die thätigen elektromotorischen Kräfte als thermoelektrische. Oder es wird neben Wärme auch chemische Energie umgesetzt; in diesem Falle bezeichnen wir die Kräfte als elektrochemische. Fassen wir nunmehr einen beliebig begrenzten Theil unseres Systems ins Auge und berechnen die Zunahme der gesammten Energie dieses Theiles, also der Grösse:

$$\frac{dS}{dt} + \int (u\,X + v\,Y + w\,Z)\, d\tau,$$

so finden wir nach dem vorigen diese Zunahme gleich einem über die Oberfläche des Raumes genommenen Integral. Die Aenderung des Energievorrathes dieses und damit eines jeden Raumes wird also richtig berechnet, wenn wir annehmen, die Energie trete nach Art einer Substanz durch die Oberfläche ein, und zwar in solcher Fülle, dass durch die Flächeneinheit einer jeden Oberfläche die Menge:

$$\frac{1}{4\pi A}\Big\{ (NY - MZ) \cos n, x + (LZ - NX) \cos n, y \\ + (MX - LY) \cos n, z \Big\}$$

tritt. Eine geometrische Discussion dieses Ausdrucks ergiebt, dass unsere Annahme identisch ist mit der Aussage, die Energie bewege sich überall in einer Richtung, welche auf den Richtungen der magnetischen und der elektrischen Kraft senkrecht steht und in solcher Fülle, dass in dieser Richtung in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eine Menge trete gleich dem Product der beiden Kräfte, dem Sinus des eingeschlossenen

Winkels und dem Factor $1/4\pi A$. Es ist dies die höchst bemerkenswerthe Theorie des Hrn. **Poynting** über die Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde.[1]) Bei Beurtheilung der physikalischen Bedeutung derselben muss erstens hervorgehoben werden, dass die Zerlegung unseres Oberflächenintegrales in seine Elemente eine hypothetische war, und dass das Ergebniss derselben nicht immer ein wahrscheinliches ist. Ruht ein Magnet dauernd neben einem elektrisirten Körper, so muss zufolge dieses Resultats die Energie der Nachbarschaft sich in beständiger Bewegung befinden, allerdings in geschlossenen Bahnen. Ein grösseres Bedenken scheint mir in der Frage zu liegen, wie weit bei unseren gegenwärtigen Kenntnissen von der Energie die Localisation derselben und ihre Verfolgung von Punkt zu Punkt überhaupt Sinn und Bedeutung hat. Derartige Betrachtungen sind noch nicht durchgeführt bei den einfachsten Energieumsätzen der gewöhnlichen Mechanik; es ist daher die Frage noch unerledigt, ob und in welchem Umfange der Begriff der Energie eine solche Behandlungsweise zulässt.[2])

12. Ponderomotorische Kräfte.

Die mechanischen Kräfte, welche wir im elektromagnetisch gestörten Felde zwischen den ponderabelen Körpern wahrnehmen, sehen wir an als die Resultanten mechanischer Druckkräfte, welche durch das Vorhandensein der elektromagnetischen Störungen im Aether und in den übrigen Körpern wachgerufen werden. Zufolge dieser Anschauung sind die auf einen ponderabeln Körper wirkenden mechanischen Kräfte vollständig bestimmt durch den elektromagnetischen Zustand seiner unmittelbaren Umgebung, ohne dass es darauf ankäme, welche Ursachen weiterhin diesen Zustand hervorgerufen haben. Wir setzen ferner voraus, dass die unterstellten Druckkräfte von solcher Art sind, dass sie keine Resultanten ergeben, welche das Innere des Aethers selbst in Bewegung zu setzen streben. Ohne diese Voraussetzung wäre unser System nothwendig unrichtig oder doch unvollständig, denn ohne sie könnte man von elektromagnetischen Kräften im ruhenden Aether allgemein gar nicht reden. Eine nothwendige

[1]) J. H. **Poynting**, Phil. Trans. 2. p. 343. 1884.
[2]) [Siehe Anmerkung 31 am Schluss des Buches.]

Folge dieser Voraussetzung ist es, dass die an den ponderabeln Körpern zu beobachtenden mechanischen Kräfte dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen.

Es fragt sich nun, ob sich Druckkräfte angeben lassen, welche diesen Anschauungen entsprechen und geeignet sind, die wirklich beobachteten Resultanten zu ergeben. Maxwell und in allgemeinerer Form von Helmholtz haben Formen der Druckkräfte angegeben, welche allen Ansprüchen genügen für statische und stationäre Zustände. Aber für den allgemeinen veränderlichen Zustand als gültig angenommen, würden diese Drucke das Innere des Aethers selbst in Bewegung setzen. Wir nehmen deshalb an, dass die vollständigen Formen noch nicht gefunden seien, vermeiden es, bestimmte Angaben über die Grösse der Drucke zu machen und ziehen es vor, die ponderomotorischen Kräfte abzuleiten mit Hülfe der Voraussetzungen, welche wir bereits angegeben haben, mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der Energie und mit Hülfe der folgenden Erfahrungsthatsache: Werden die ponderabelen Körper eines elektrisch oder magnetisch erregten Systems, welches dem statischen Zustand stets unendlich nahe bleibt, gegen einander bewegt und gleichzeitig die in jedem Element der Körper befindliche Menge der wahren Elektricität und des wahren Magnetismus als unveränderlich und an dem Elemente haftend behandelt, so findet die zur Bewegung der Körper verbrauchte mechanische Arbeit ihre einzige Compensation in der Vermehrung der elektromagnetischen Energie des Systems, ist also dieser gleich.[1])

Es bleibt die Frage offen, ob sich überhaupt Formen der Druckkräfte angeben lassen, welche den von uns gestellten Anforderungen allgemein und genau genügen. Sollte dies nicht der Fall sein, so enthält die Gesammtheit unserer Voraussetzungen einen inneren Widerspruch, welcher durch eine Correction an einer oder an mehreren dieser Voraussetzungen gehoben werden muss. Die erforderlichen Verbesserungen sind aber jedenfalls von solcher Art, dass sie in keiner der bisher beobachteten Erscheinungen ihre Wirkung geltend machen. Im übrigen ist hervorzuheben, dass, wenn sich hier eine Lücke in unserer Theorie findet, dies nicht eine Lücke in den Grund-

---

[1]) [Siehe Anmerkung 32 am Schluss des Buches.]

lagen, sondern eine solche in den Ausläufern der Theorie ist Denn die erregten mechanischen Kräfte sind von unserem Standpunkte aus eine secundäre Folgeerscheinung der elektromagnetischen Kräfte; wir könnten die Theorie der letzteren behandeln, ohne die ersteren auch nur zu erwähnen, wie wir denn auch alle übrigen minder wichtigen Folgeerscheinungen des elektromagnetischen Zustandes von der Besprechung ausgeschlossen haben.

B. Ableitung der Erscheinungen aus den Grundgleichungen.

Wir theilen die durch unsere Gleichungen dargestellten Erscheinungen ein in statische, stationäre und dynamische. Damit eine Erscheinung zu den statischen oder stationären rechne, ist nöthig, dass sie keine Aenderungen der elektrischen und magnetischen Kräfte mit der Zeit bedinge, dass also die linken Seiten der Gleichungen (9_a) und (9_b) verschwinden. Damit eine Erscheinung weitergehend als eine statische bezeichnet werde, ist ausserdem nöthig, dass sie überhaupt nicht von Aenderungen in der Zeit begleitet werde, dass also insbesondere durch sie kein dauernder Energieumsatz in andere Formen bedingt werde. Hierfür ist die hinreichende und nothwendige Bedingung, dass auch die Grössen u, v, w in den Gleichungen (9_a) und (9_b) verschwinden.

Statische Erscheinungen.

Wenn in den Gleichungen (9_a) und (9_b) die linken Seiten und die u, v, w verschwinden, so zerfällt das System in zwei voneinander unabhängige Systeme, von welchen das eine nur die elektrischen, das andere nur die magnetischen Kräfte enthält. Wir erhalten so zwei Gruppen von Problemen, von denen die eine als Elektrostatik, die andere als Lehre vom ruhenden Magnetismus bezeichnet zu werden pflegt.

13. Elektrostatik.

Vom Auftreten der elektromotorischen Kräfte sehen wir in diesem Abschnitt ab, weil, wenn dieselben das Zustandekommen des statischen Zustandes überhaupt gestatten, ihre Wirkung zu schwach ist, um in den interessirenden Problemen in Betracht zu kommen. Hiernach müssen alsdann in den Leitern, woselbst die λ nicht verschwinden, die Kräfte $X\ Y\ Z$ verschwinden. In den Nichtleitern nehmen die Gleichungen (9_a) die Form an:

$$(13_a)\qquad \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0.$$

Die Kräfte besitzen demnach ein Potential φ, dessen negativen Differentialquotienten sie gleich gesetzt werden können. Da die Kräfte überall endlich sind, ist φ überall stetig, es kann auch durch die Leiter hindurch fortgesetzt werden und ist alsdann in diesen als constant zu betrachten. An einer Grenzfläche setzen sich die zur Grenzfläche tangentialen Differentialquotienten von φ stetig durch die Fläche fort. Bezeichnet im übrigen e_f die räumliche Dichte der freien Elektricität, so genügt nach Abschnitt 10 das Potential φ überall im Raume der Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi e_f$, welche im freien Aether die Form $\Delta\varphi = 0$ annimmt, und deren sinngemässe Umformung für die Trennungsfläche heterogener Körper daselbst die Bedingung ergiebt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2-\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1=-4\pi e'_f,$$

unter e'_f die Flächendichtigkeit der freien Elektricität verstanden. Aus der Gesammtheit dieser Bedingungen folgt für φ der bis auf eine willkürlich bleibende Constante eindeutig bestimmte Werth $\varphi = \int (e_f / r)\,d\tau$, das Integral über den ganzen Raum, unter sinngemässer Berücksichtigung der Grenzflächen erstreckt. Bei gleicher Vertheilung des Potentials und der Kräfte in verschiedenen Nichtleitern sind also die freien Elektricitäten die gleichen. Die entsprechenden Mengen der wahren Elektricitäten aber sind verschieden und stehen für das Innere zweier homogener Nichtleiter im Verhältniss der Dielektricitätsconstanten. Die Bedingung dafür, dass die Dichtigkeit der wahren Elektricität im Innern der Nichtleiter gegebene Werthe e_w habe, ist, wenn wir uns für den Augenblick auf isotrope Körper beschränken:

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dz}\right)=-4\pi e_w,$$

welche an der Grenze zweier isotroper Körper die Form annimmt:

$$\varepsilon_2\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2-\varepsilon_1\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1=-4\pi e'_w,$$

unter e'_w die Flächendichte der wahren Elektricität verstanden.

Werfen wir noch unser Augenmerk auf den Energievorrath eines elektrostatischen Systems. Wir erhalten denselben der Reihe nach in den Formen:

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{X}X+\mathfrak{Y}Y+\mathfrak{Z}Z)\,d\tau=-\frac{1}{8\pi}\int\left(\mathfrak{X}\frac{d\varphi}{dx}+\mathfrak{Y}\frac{d\varphi}{dy}+\mathfrak{Z}\frac{d\varphi}{dz}\right)d\tau$$
$$=\frac{1}{8\pi}\int\varphi\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau=\frac{1}{2}\int\varphi\, e_w d\tau=\frac{1}{2}\iint\frac{e_w e_f}{r}\,d\tau\, d\tau.$$

Die Integrationen sind dabei über allen Raum erstreckt gedacht, in welchem elektrische Störungen vorkommen, also bis zu Grenzen, an welchen die Störungen verschwinden, und die sinngemässe Umformung der Integrale an den Grenzflächen ist stillschweigend unterstellt. Die Zunahme, welche ein jeder dieser Ausdrücke erleidet, wenn bei eintretender Bewegung der ponderabelen Körper die an den Körperelementen haftenden Mengen der wahren Elektricität constant bleiben, ist nach Abschnitt 12 gleich der von den mechanischen Kräften bei dieser Bewegung geleisteten Arbeit. Besteht also unser System aus zwei Elektricitätsmengen E_1 und E_2, welche im Aether in einem gegen ihre eigenen Dimensionen sehr grossen Abstand R voneinander sich befinden, so vermindert sich bei Vermehrung des Abstandes beider um dR die elektrische Energie des Raumes um:

$$\tfrac{1}{2}(E_1 E_2 + E_2 E_1)\frac{dR}{R^2},$$

der Ausdruck $E_1 E_2 / R^2$ stellt also die mechanische Kraft dar, mit welcher beide Elektricitäten sich voneinander zu entfernen trachten. Das Coulomb'sche Gesetz, welches in den älteren Theorien den Ausgangspunkt aller Betrachtungen bildete, erscheint jetzt als ein entferntes Endresultat.

In Hinsicht der allgemeinen Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte müssen wir uns hier begnügen, darauf hinzuweisen, dass die letzten beiden für die Energie erlangten Ausdrücke dieselben sind, deren Aenderung auch nach der gewöhnlichen Elektrostatik die bei der Bewegung der Körper geleistete Arbeit ergiebt, und daraus zu folgern, dass wir aus den Aenderungen dieser Ausdrücke dieselben Kräfte berechnen werden, von welchen die gewöhnliche Elektrostatik ausgeht und welche an der Erfahrung geprüft sind. Insbesondere wird sich zeigen lassen, dass auf ein Körperelement, welches die Menge e an wahrer Elektricität enthält, die mechanischen Kraftcomponenten eX, eY, eZ einwirken. Wir kommen dadurch auf die Aussagen zurück, durch deren Hülfe wir zuerst die elektrischen Kräfte einführten.

14. Ruhender Magnetismus.

Die Gleichungen, welche die Componenten ruhender magnetischer Kräfte verbinden, sind die gleichen, welche zwischen den Componenten ruhender elektrischer Kräfte obwalten. Alle Bemerkungen des vorigen Abschnittes lassen sich daher hier unter entsprechender Aenderung der Bezeichnungen wiederholen. Wenn gleichwohl die in diesem Gebiet interessirenden Probleme sich auch in mathematischer Beziehung von denen der Elektrostatik unterscheiden, so liegt das vorzugsweise an folgenden Gründen:

1) Es fällt hier die Classe der als Leiter zu bezeichnenden Körper fort.

2) In allen Körpern, mit Ausnahme solcher, welche permanenten oder remanenten Magnetismus zeigen, kommt wahrer Magnetismus nicht vor. Im Innern derartiger Körper, sofern sie isotrop sind, gilt daher für das magnetische Potential ψ nothwendig stets die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{d\psi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{d\psi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{d\psi}{dz}\right)=0,$$

welche an der Grenze derartiger Körper übergeht in die Gleichung:

$$\mu_2\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2-\mu_1\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_1=0.$$

Etwas verwickeltere, aber leicht angebbare Gleichungen gelten für das Innere und die Grenzen krystallinischer Körper und kommen in Betracht, wenn wir die Erscheinungen der sogenannten Magnetkrystallkraft behandeln wollen.

3) Während die Dielektricitätsconstante aller bekannten Körper grösser als Eins ist, ist die Magnetisirungsconstante für viele Körper auch kleiner als Eins. Solche Körper bezeichnen wir als diamagnetische, im Gegensatz dazu die übrigen als paramagnetische. Die freie magnetische Dichte an der Oberfläche eines an den leeren Raum grenzenden isotropen Körpers ist

gleich dem $(1-\mu)$fachen der im Innern des Körpers normal zur Oberfläche gerichteten Kraft. Bei gleichem Sinn der Kraft ist also das Vorzeichen der Belegung eines diamagnetischen Körpers demjenigen der Belegung eines paramagnetischen Körpers entgegengesetzt.

Die Lehre vom ruhenden Magnetismus gewinnt ferner ein besonderes Ansehen durch den Umstand, dass gerade die in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen wichtigsten Körper, Eisen- und Stahlsorten, sich der Theorie nur in ganz roher Annäherung fügen. Diese Körper zeigen permanenten und remanenten Magnetismus, es ist also in ihnen die Polarisation des ponderabelen Stoffes theilweise unabhängig von der herrschenden Kraft, und also der magnetische Zustand nicht vollständig durch eine einzige Richtungsgrösse zu definiren. Da ausserdem die Beziehungen zwischen der Kraft und den durch sie bewirkten Störungen keine linearen sind, so treten diese Körper aus doppeltem Grunde aus dem Rahmen der gegenwärtigen Theorie heraus. Um sie nicht ganz von der Betrachtung ausschliessen zu müssen, ersetzen wir sie durch den jedesmal nächststehenden zweier Idealkörper, des vollkommen weichen Eisens oder des vollkommen harten Stahles. Ersteres definiren wir als einen Körper, welcher unseren Gleichungen folgt, und für welchen μ einen sehr grossen Werth hat. Indem wir diesen Werth je nach der Natur des behandelten Problems verschieden wählen, erzielen wir eine weitere Annäherung. Den vollkommen harten Stahl definiren wir als einen unseren Gleichungen folgenden Körper von der Magnetisirungsconstanten Eins, in dessen Innern wahrer Magnetismus vorkommen kann in beliebiger Vertheilung, jedoch so, dass die Gesammtmenge des in jedem Stahlstück vorhandenen wahren Magnetismus wiederum von Null nicht abweicht.

Stationäre Zustände.

Für den Zustand der stationären Bewegungen gelten in den Nichtleitern die gleichen Bedingungen, wie für den statischen Zustand; in den Leitern, welche wir in diesem Abschnitt der Einfachheit halber als isotrop voraussetzen, nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen (9_a), (9_b), (9_c) die Form an:

$$(15_a)\begin{cases}\dfrac{dZ}{dy}-\dfrac{dY}{dz}=0,\\[2pt] \dfrac{dX}{dz}-\dfrac{dZ}{dx}=0,\\[2pt] \dfrac{dY}{dx}-\dfrac{dX}{dy}=0;\end{cases}\qquad (15_b)\begin{cases}\dfrac{dM}{dz}-\dfrac{dN}{dy}=4\pi A u,\\[2pt] \dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dL}{dz}=4\pi A v,\\[2pt] \dfrac{dL}{dy}-\dfrac{dM}{dx}=4\pi A w.\end{cases}$$

$$(15_c)\quad u=\lambda(X-X'),\qquad v=\lambda(Y-Y'),\qquad w=\lambda(Z-Z').$$

Differenziren wir die Gleichungen (15_b) beziehungsweise nach x, y, z und addiren sie, so folgt:

$$(15_d)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

welche Gleichung an Flächen, an welchen sich die Strömungen sprungweise ändern, die Form annimmt:

$$(15_e)\ (u_2-u_1)\cos n,x+(v_2-v_1)\cos n,y+(w_2-w_1)\cos n,z=0.$$

Fügen wir die Gleichungen (15_d) und (15_e) den Gleichungen (15_a) und (15_c) hinzu, so erhalten wir ein System, welches lediglich die elektrischen Kräfte enthält. Dasselbe kann ohne Rücksicht auf die magnetischen Kräfte behandelt werden und giebt uns die Theorie der Stromvertheilung. Sind die Componenten u, v, w der Strömung gefunden, so ergiebt uns weiter die Behandlung der Gleichungen (15_b) die von diesen Strömungen ausgeübten magnetischen Kräfte.

15. Vertheilung stationärer Ströme.

Es erhellt aus den Gleichungen (15_a), dass die Kräfte auch im Innern der durchströmten Leiter noch als die negativen Differentialquotienten einer Function φ, des Potentials, dargestellt werden können, welches durch die Bedingung bestimmt ist, dass überall sein muss:

$$(15_f)\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\lambda\dfrac{d\varphi}{dx}\right)+\dfrac{d}{dy}\left(\lambda\dfrac{d\varphi}{dy}\right)+\dfrac{d}{dz}\left(\lambda\dfrac{d\varphi}{dz}\right)=-\dfrac{d}{dx}(\lambda X')\\[2pt] \qquad\qquad -\dfrac{d}{dy}(\lambda Y')-\dfrac{d}{dz}(\lambda Z').\end{cases}$$

An der Grenzfläche zweier heterogener Leiter nimmt diese Gleichung die Form an:

$$(15_g)\begin{cases}\lambda_2\left(\dfrac{d\varphi}{dn}\right)_2-\lambda_1\left(\dfrac{d\varphi}{dn}\right)_1=-(\lambda_2 X'_2-\lambda_1 X'_1)\cos n,x\\[2pt] -(\lambda_2 Y'_2-\lambda_1 Y'_1)\cos n,y-(\lambda_2 Z'_2-\lambda_1 Z_1')\cos n,z,\end{cases}$$

also an der Grenze eines Leiters gegen einen Nichtleiter die Form:

$$(15_h) \qquad \frac{d\varphi}{dn} = -X' \cos n,x - Y' \cos n,y - Z' \cos n,z.$$

Zu diesen Grenzbedingungen kommt noch in solchen Grenzflächen, in welchen die elektromotorischen Kräfte unendlich werden, nach Abschnitt 8 die weitere Bedingung hinzu:

$$(15_i) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int (X \cos n,x + Y \cos n,y + Z \cos n,z)\, dn, \\ &= \int (X' \cos n,x + Y' \cos n,y + Z' \cos n,z)\, dn, \\ &= \varphi_{1,2}. \end{aligned} \right.$$

Die Gesammtheit dieser Bedingungen bestimmt φ eindeutig für das ganze Innere der Leiter bis auf eine Constante, welche von den Zuständen ausserhalb der Leiter abhängig bleibt. Für homogene Leiter nehmen die Gleichungen (15_f) bis (15_i) die einfacheren Gestalten an:

$$(15_k) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \text{ für das Innere der Leiter,} \\ \lambda_1 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 \text{ für die Grenze zweier Leiter,} \\ \frac{d\varphi}{dn} = 0 \text{ für die Grenze gegen einen Nichtleiter,} \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{1,2} \text{ an einer elektromotorisch wirksamen Grenzfläche.} \end{array} \right.$$

Die so erlangten Gleichungen gestatten die unmittelbare Anwendung auf Probleme der Stromvertheilung in dreifach ausgedehnten Körpern. Ihre Anwendung auf die Strömung in flächenförmig ausgedehnten Leitern oder auf lineare Stromträger ist leicht und ergiebt die Definition des Widerstandes, das Ohm'sche Gesetz für geschlossene Strombahnen, die Kirchhoff'schen Sätze für beliebige Verzweigungen, sowie die übrigen allgemeinen Sätze über die Vertheilung stationärer Ströme.

16. Magnetische Kräfte stationärer Ströme.

Um zunächst überall aus den nunmehr bekannten Stromcomponenten u, v, w die durch sie hervorgerufenen Kräfte L, M, N zu bestimmen, führen wir als Hülfsgrössen die sogenannten Componenten des Vectorpotentiales ein, indem wir setzen:

$$U = \int \frac{u}{r}\, d\tau, \qquad V = \int \frac{v}{r}\, d\tau, \qquad W = \int \frac{w}{r}\, d\tau.$$

Die Integrale sind über den ganzen Raum zu erstrecken; infolge der Bedingungen des stationären Zustandes wird dabei:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Wir setzen nun:

$$(16_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = A\left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right), \quad M = A\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right), \\ \qquad N = A\left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right). \end{array} \right.$$

Diese L, M, N sind Lösungen der Gleichungen (15_b) und genügen der Gleichung:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0.$$

Wenn sich also auch die wirklich vorhandenen Kräfte von ihnen unterscheiden können, so genügen doch die Unterschiede beider den Bedingungen für die Kräfte ruhender Magnetismen, und können als von solchen herrührend angesehen werden, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass diese Magnetismen ihrerseits wiederum durch die Strömungen veranlasst seien. Sind aber insbesondere ruhende Magnetismen nicht vorhanden, so stellen die angegebenen Formen die vorhandenen magnetischen Kräfte vollständig dar.

Haben wir es nur mit linearen Stromleitern zu thun, in welchen die Stromstärke i herrscht, so treten in den Werthen der U, V, W an Stelle der Ausdrücke $u\,d\tau$, $v\,d\tau$, $w\,d\tau$ die Ausdrücke $i\,dx$, $i\,dy$, $i\,dz$, wobei dx, dy, dz die Projectionen des Elementes ds der Strombahn auf die drei Axen sind, und die Integrationen alsdann längs der Stromwege um deren ganzen Umfang genommen werden müssen. Wollen wir die magnetischen Kräfte der gesammten Strömung als die Summen der Wirkungen der einzelnen Stromelemente ansehen, so giebt eine ihren Resultaten nach zulässige Zerlegung unserer Integrale für die Wirkung des Stromelementes $i\,dx$ auf den Punkt $x'\ y'\ z'$, wenn wir zur Vereinfachung der Formeln das Element in den Nullpunkt und den Punkt x' y' z' in die xy-Ebene bringen:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = A i d x \frac{d \frac{1}{r}}{d y'} = - \frac{A i d x}{r^2} \cdot \frac{y'}{r},$$

welche Formeln der Ampère'schen Regel und dem Biot-Savart'schen Gesetz Ausdruck verleihen.

Die gefundenen Werthe der Kräfte müssen zufolge der Gleichungen (15_b) überall da, wo die u, v, w verschwinden, also überall ausserhalb der durchströmten Leiter ein Potential ψ besitzen, dessen negativen Differentialquotienten wir sie gleich setzen können. Rühren die Kräfte nur her von einer einzigen geschlossenen linearen Strombahn, so kann dies Potential dargestellt werden in der Form:

$$(16_b) \qquad \psi = - A i \int \frac{d \frac{1}{r}}{d n} d \omega + \text{constans},$$

worin $d\omega$ das Element einer beliebigen durch die Strombahn gelegten Fläche, n die Normale dieser Fläche bedeutet und die Integration über den ganzen von der Strombahn begrenzten Bereich der Fläche zu erstrecken ist. Als positiv ist dabei diejenige Seite der Fläche gerechnet, von welcher aus gesehen der positiv gerechnete Strom im Sinne der Drehung des Uhrzeigers fliesst. Durch bekannte Integraltransformationen werden nämlich die negativen Differentialquotienten des angegebenen Ausdruckes überall in die für L, M, N gefundenen Formen gebracht, diese Differentialquotienten sind also überall ausser in der Strombahn selbst endlich und stätig, und wenn auch das in ψ enthaltene Integral an der Fläche ω unstätig wird, so kann dem ganzen ψ nichtsdestoweniger die erforderliche Stätigkeit verliehen werden, indem wir die darin enthaltene Constante als unendlich vieldeutig betrachten und jedesmal einen um $4 \pi A i$ geänderten Werth derselben benutzen, sobald wir die Fläche ω durchschreiten. Das Potential wird dadurch selbst unendlich vieldeutig und ändert sich um $4 \pi A i$, sobald wir nach einmaliger Umkreisung der Strombahn zum Ausgangspunkte zurückkehren.

Dem Integralausdruck, welcher in ψ vorkommt, können verschiedene Deutungen untergelegt werden. Er kann zunächst betrachtet werden als das Potential einer magnetischen Doppelschicht. Durch Verfolg dieser Auffassung gelangen wir zu der Ampère'schen Theorie des Magnetismus. Es kann andererseits mit Gauss der Werth jenes Integrales in einem bestimmten Punkte gedeutet werden als der sphärische Winkel, unter welchem, von dem Punkte aus gesehen, die Strombahn erscheint. Von hieraus ergiebt uns ein leichter Uebergang die Richtigkeit der Aussage: es stelle jenes Integral für einen Punkt die Zahl der Kraftlinien dar, welche ein in dem Punkte aufgestellter Einheitspol durch die Strombahn sendet. Das ganze Potential, einschliesslich seiner Vieldeutigkeit, kann hieran anknüpfend gedeutet werden durch die Aussage: es sei die Differenz seiner Werthe in zwei Punkten gleich der mit Ai multiplicirten Zahl der Kraftlinien, welche in bestimmter Richtung die Strombahn durchschneiden, wenn ein Einheitspol auf beliebigem Wege aus dem einen Punkte in den anderen übergeführt wird.

Die letztgenannte Deutung ist von unserem Standpunkte aus die angemessenste, auch erlaubt sie uns unter Berufung auf die Lehren der Abschnitte 12 und 14 die folgenden Schlüsse aneinander zu reihen. Erstens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen Magnetpol oder auch ein System unveränderlicher Magnetismen in der Nähe eines constant gehaltenen linearen Stromes zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien des Magnetpoles oder des magnetischen Systemes, welche bei der Bewegung die Strombahn in bestimmter Richtung durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke und der Constanten A. Zweitens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen constant gehaltenen Strom in einem beliebigen magnetischen Felde zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien, welche bei der Verschiebung von der Strombahn durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stärke des Stromes und der Constanten A. Endlich also im Besonderen: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen constant gehaltenen Strom 1 in der Nähe eines constant gehaltenen Stromes 2 zu verschieben, ist gleich der Zahl der magnetischen Kraftlinien der Strombahn 2, welche von der Strombahn 1 bei der Bewegung durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stromstärke in 1 und der Constanten A. Mit dem gleichen Rechte ist diese Arbeit auch gleich der Zahl der Kraftlinien des Stromes 1, welche bei der Verschiebung die Strombahn 2 durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke in 2 und der Constanten A. Beide Aussagen führen zu dem gleichen Resultat; wir beweisen dies, indem wir das Product aus der Intensität der einen Strombahn und der Zahl der sie durchsetzenden Kraftlinien der anderen Strombahn durch einen in Hinsicht beider symmetrischen Ausdruck darstellen. Beziehen sich nämlich die Bezeichnungen i, ds auf die Strombahn 1; i', ds', U', V', W', L', M', N' auf die Strombahn 2, so ist die mit Ai multiplicirte Zahl der Kraftlinien von 2, welche 1 durchsetzen, gleich:

$$
\begin{aligned}
& A\,i\int(L'\cos n,x + M'\cos n,y + N'\cos n,z)\,d\omega \\
&= A^2 i\int\left\{\left(\frac{dV'}{dz}-\frac{dW'}{dy}\right)\cos n,x + \left(\frac{dW'}{dx}-\frac{dU'}{dz}\right)\cos n,y\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{dU'}{dy}-\frac{dV'}{dx}\right)\cos n,z\right\}d\omega \\
&= -A^2 i\int(U'\cos s,x + V'\cos s,y + W'\cos s,z)\,ds \\
&= -A^2 i i'\iint\frac{\cos s,x\cos s',x + \cos s,y\cos s',y + \cos s,z\cos s',z}{r}\,ds\,ds' \\
&= -A^2 i i'\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',
\end{aligned}
$$

worin ε den Winkel bezeichnet, welchen die beiden Stromelemente im Raum miteinander bilden. Der erlangte Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf beide Strombahnen. Man weiss, dass in der That die Aenderungen dieses Ausdruckes, des mit $A^2 ii'$ multiplicirten Neumann'schen Potentiales der einen Strombahn auf die andere, die zur gegenseitigen Verschiebung geschlossener Ströme erforderliche Arbeit und daraus die zwischen den ruhenden Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte ergeben. Man weiss auch, dass diese Aussage Alles enthält, was man in Hinsicht der zwischen Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte mit Sicherheit behaupten kann.

Wir berechnen noch die magnetische Energie eines Raumes, in welchem die stationären Stromcomponenten u, v, w und die unveränderlichen magnetischen Dichten m vertheilt sind, unter der beschränkenden Voraussetzung, dass sich magnetisirbare Körper in dem Raume nicht vorfinden. Verstehen wir jetzt unter φ

das Potential der Magnetismen m, so erhalten wir die Energie successive in den Formen:

$$
(16_e)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\int (L^2+M^2+N^2)\,d\tau \\
&=\frac{A}{8\pi}\int\left\{L\left(\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dx}\right)+M\left(\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dy}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left.+N\left(\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dz}\right)\right\}d\tau \\
&=\frac{A}{8\pi}\int\left\{U\left(\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}\right)+V\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left.+W\left(\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}\right)\right\}d\tau \\
&\qquad\qquad+\frac{1}{8\pi}\int\psi\left(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right)d\tau \\
&=\tfrac{1}{2}A^2\int (Uu+Vv+Ww)\,d\tau+\tfrac{1}{2}\int\psi\, m\, d\tau, \\
&\text{oder in Anwendung auf lineare Ströme:} \\
&=\tfrac{1}{2}A^2\iint\frac{ii'\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'+\tfrac{1}{2}\int\psi\, m\, d\tau,
\end{aligned}\right.
$$

wobei in dem ersten Theile der letzten Form die Integration sowohl nach ds als nach ds' über alle vorhandenen Ströme auszudehnen ist. Es erhellt aus dieser letzten Form, dass die Verschiebung unveränderlicher Magnete und unveränderlicher Ströme gegeneinander die magnetische Energie des Raumes nicht verändert. Es findet daher auch die mechanische Arbeit, welche bei solcher Verschiebung verbraucht wird, nicht in der Aenderung der magnetischen Energie des Raumes ihre Compensation, wie es bei der Verschiebung unveränderlicher Magnete gegeneinander der Fall ist, sondern es muss von dem Verbleib der aufgewandten Arbeitsmenge anderweitig Rechenschaft abgelegt werden. Es erhellt ferner aus der gleichen Form, dass die Verschiebung constant gehaltener Ströme gegeneinander allerdings eine Aenderung der Energie des Raumes bedingt, welche dem absoluten Werth nach der aufgewandten mechanischen Arbeit gleich ist. Aber die Berücksichtigung der Vorzeichen ergiebt, dass die Aenderung nicht in solchem Sinne erfolgt, dass dieselbe als Compensation der verlorenen mechanischen Energie könnte angesehen werden, sondern in entgegengesetztem Sinne. Es ist also in diesem Falle noch Rechenschaft abzulegen über den Verbleib des Doppelten der Arbeitsmenge, welche die mechanischen Kräfte bei der relativen Verschiebung der Strombahnen leisten. Diese Rechenschaft wird am Ende des folgenden Abschnittes abgelegt werden.

Dynamische Erscheinungen.

Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit der möglichen Formen des veränderlichen Zustandes sind bisher verhältnissmässig wenige Gruppen von Erscheinungen der Beobachtung entgegengetreten. Wir führen diese Gruppen auf, ohne das Gebiet durch eine systematische Eintheilung damit erschöpfen zu wollen.

17. Induction in geschlossenen Bahnen.

In einem sich verändernden magnetischen Felde müssen zufolge der Gleichungen (9_a) nothwendiger Weise elektrische Kräfte verbreitet sein. Diese Kräfte sind im allgemeinen sehr schwach, weil ihre Werthe den sehr kleinen Factor A enthalten; sie sind aus diesem Grunde der Wahrnehmung nur zugänglich durch den Strom, welchen sie in geschlossenen Leitungsbahnen erregen oder dadurch, dass sich ihre Wirkung in sehr langen, bis auf einen kleinen Bruchtheil ihrer Länge geschlossenen linearen Bahnen addirt. Die in den Versuchen messbar werdenden Wirkungen geben uns daher stets nur die Integralwirkung der elektrischen Kraft in einer geschlossenen Bahn, also das Integral $\int (X dx + Y dy + Z dz)$ genommen über eine in sich zurücklaufende Linie. Nach einer schon benutzten bekannten Integraltransformation ist dies Linienintegral gleich dem Flächenintegral:

$$\int \left\{ \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) \cos n, x + \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \cos n, y + \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \cos n, z \right\} d\omega,$$

genommen über eine von der fraglichen Linie rings begrenzte, übrigens aber beliebige Fläche ω. Unter Benutzung der Gleichungen (9_a) wird aber dieser Ausdruck gleich:

$$A \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{L} \cos n, x + \mathfrak{M} \cos n, y + \mathfrak{N} \cos n, z)\, d\omega .$$

In Worten ausgedrückt ist demnach die in einer geschlossenen Strombahn sich zeigende elektromotorische Kraft gleich der mit A multiplicirten Aenderung der Anzahl der die Strombahn durchsetzenden magnetischen Kraftlinien, berechnet auf die Zeiteinheit. Rührt insbesondere die Induction her von einem geschlossenen veränderlichen Strome, und ist die Nachbarschaft magnetisirbarer Körper ausgeschlossen, so ist die erregte elektromotorische Kraft nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes gleich dem mit A^2 multiplicirten Product des Neumann'schen Potentials der beiden Strombahnen aufeinander und der auf die Zeiteinheit berechneten Aenderung der Intensität des inducirenden Stromes. Diese Sätze, von welchen der erstere der allgemeinere ist, umfassen in ihren Folgerungen vollständig die thatsächlich beobachteten Erscheinungen der Induction in ruhenden Leitern.

Die Induction in bewegten Leitern liegt im Grunde ausserhalb des Gebietes, auf welches sich die gegenwärtige Untersuchung beschränkt. Handelt es sich aber um lineare Leiter, so können wir diese Form der Induction an die Induction in ruhenden Leitern anschliessen durch die Aussage, dass es für die elektromotorische Kraft in einer geschlossenen Bahn gleichgültig sei, ob das unmittelbar umgebende magnetische Feld sich ändert infolge von Bewegung ponderabeler Körper oder infolge rein elektromagnetischer Zustandsänderungen, dafern nur die Aenderung des unmittelbar umgebenden magnetischen Feldes die gleiche ist. Zufolge dieser Aussage und des Vorangegangenen ist die in einer bewegten Stromleitung inducirte elektrische Kraft gleich der mit A multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Strombahn in bestimmter Richtung durchschnitten werden. Das Product aus dieser elektrischen Kraft und der Intensität des Stromes in der bewegten Strombahn giebt nach Abschnitt 11 die in der Strombahn vermittelst der Induction erzeugte thermische oder chemische Arbeit an. Dieselbe ist demnach zufolge der Ergebnisse des vorigen Abschnittes, ergänzt durch eine genaue Berücksichtigung der Vorzeichen, gleich der mechanischen Arbeit, welche die den Stromkreis bewegenden äusseren Kräfte leisten müssen. Wird also ein constant gehaltener Strom bewegt gegen feste Magnete, so compensirt die in dem Stromkreis erzeugte thermische und chemische Energie die geleistete mechanische Arbeit, während die magnetische Energie des Systems unberührt bleibt. Wird dagegen ein constant gehaltener Strom bewegt gegen einen anderen constant gehaltenen Strom, so compensirt die in dem einen Stromkreise infolge der Bewegung mehr auftretende chemische und thermische Energie die geleistete mechanische Arbeit; die gleiche in dem anderen Stromkreise infolge der Bewegung mehr auftretende Energie compensirt die Verminderung der magnetischen Energie des Feldes. Oder genauer gesprochen, es compensirt die Summe der erstgenannten Energiemengen die Summe der letztgenannten. Die am Schlusse des Abschnittes 16 geforderte Rechenschaft ist damit abgelegt.

18. Elektrodynamik ungeschlossener Ströme.

In Hinsicht der möglichen Erfahrung ist dieses Gebiet das reichste von allen, denn es umfasst alle diejenigen Probleme, welche wir nicht als besondere Fälle anderen Gebieten zutheilen können. In Hinsicht der wirklichen Erfahrung ist es indessen bislang sehr arm. Die Schwingungen ungeschlossener Inductionsapparate oder sich entladender Leydener Flaschen können in hinreichender Annäherung nach den Grundsätzen des vorigen Abschnittes behandelt werden, und im eigentlichen Verstande gehören demnach hierher bislang nur die elektrischen Wellen und Schwingungen von kurzer Wellenlänge, welche in den voraufgesandten Arbeiten behandelt worden sind. Für die theoretische Behandlung dieses Abschnittes genüge es daher, auf jene Arbeiten zu verweisen und hervorzuheben, dass eine Eintheilung der elektrischen Kraft in einen elektrostatischen und einen elektrodynamischen Theil in diesen allgemeinen Problemen weder eine klar zu fassende physikalische Bedeutung, noch einen nennenswerthen mathematischen Nutzen mit sich führt, daher im Gegensatz zu früheren Behandlungsweisen zweckmässig vermieden wird.

19. Lichtbewegung in isotropen Körpern.

In das Gebiet der Optik verweisen wir diejenigen elektrodynamischen Bewegungen, welche der Zeit nach rein periodisch sind und deren Periode einen sehr kleinen Bruchtheil der Secunde, sagen wir den billionten Theil derselben, nicht überschreitet. Keines der Mittel, durch welches wir befähigt sind, solche Bewegungen wahrzunehmen, gestattet uns, die magnetischen und elektrischen Kräfte als solche zu erkennen; was wir wahrzunehmen vermögen, sind lediglich die geometrischen Verhältnisse, nach welchen sich die vorhandene Bewegung in verschiedener Richtung mit verschiedener Intensität fortpflanzt. Auch die mathematische Darstellung der Erscheinungen wird sich daher darauf beschränken dürfen, nach Elimination der entgegengesetzten Art die Ausbreitung einer der beiden Kraftarten zu verfolgen, und es wird gleichgültig sein, an welche von beiden Arten dabei die Betrachtung anknüpft. Beschränken wir uns auf homogene isotrope Nichtleiter, so erhalten wir aus den Gleichungen (4_a) und (4_b) durch Elimination, das eine mal der elektrischen, das andere mal der magnetischen Kraftcomponenten die hier zu benutzenden Formen:

$$(19_a)\left\{\begin{aligned} A^2\varepsilon\mu\frac{d^2L}{dt^2} &= \Delta L, \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2M}{dt^2} &= \Delta M, \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2N}{dt^2} &= \Delta N, \\ \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz} &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (19_b)\left\{\begin{aligned} A^2\varepsilon\mu\frac{d^2X}{dt^2} &= \Delta X, \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2Y}{dt^2} &= \Delta Y, \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2Z}{dt^2} &= \Delta Z, \\ \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz} &= 0, \end{aligned}\right.$$

deren Lösungen, rein periodische Bewegungen vorausgesetzt, stets auch Lösungen der Gleichungen (4_a) und (4_b) sind. Jedes der beiden Gleichungssysteme (19_a) und (19_b) lässt die Möglichkeit von Transversalwellen, die Unmöglichkeit von Longitudinalwellen erkennen; jedes der beiden Systeme ergiebt für die Geschwindigkeit der möglichen Wellen den Werth:

$$1 / A\sqrt{\varepsilon\mu}\,;$$

aus jedem der beiden Systeme lassen sich die Erscheinungen der geradlinigen Ausbreitung, der Beugung, der Interferenz des natürlichen und des polarisirten Lichtes ableiten und die verschiedenen Arten der Polarisation verstehen. Ein Zurückgreifen auf die Gleichungen (4_a) und (4_b) ergiebt dabei, dass die Richtungen der gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Kraft in einem jeden Punkte einer ebenen Welle beständig aufeinander senkrecht stehen.

Lassen wir die Grenzebene zweier isotropen, homogenen Nichtleiter mit der xy-Ebene zusammenfallen, so gelten an dieser Grenzebene zufolge des Abschnittes 8 und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass wir es nur mit periodischen Bewegungen zu thun haben, die Bedingungen:

$$(19_c)\begin{cases} L_1 = L_2\,, \\ M_1 = M_2\,, \\ \mu_1\, N_1 = \mu_2\, N_2\,. \end{cases} \qquad (19_d)\begin{cases} X_1 = X_2\,, \\ Y_1 = Y_2\,, \\ \varepsilon_1\, Z_1 = \varepsilon_2\, Z_2\,. \end{cases}$$

Jedes dieser Systeme von Grenzgleichungen ergiebt zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere beider Körper die Gesetze der Reflexion, der Brechung, der totalen Reflexion, also die Grundlagen der geometrischen Optik. Jedes derselben lässt auch erkennen, dass die Intensität reflectirter und gebrochener Wellen von der Art ihrer Polarisation abhängig ist und ergiebt für diese Abhängigkeit, sowie für die Phasenverzögerung der total reflectirten Wellen die Fresnel'schen Formeln. Leiten wir diese Formeln aus den Gleichungen der elektrischen Kräfte (19_b) und (19_d) her, so entspricht unsere Entwicklung der von Fresnel selbst gegebenen Ableitung dieser Formeln. Halten wir uns an die Gleichungen der magnetischen Kraft (19_a) und (19_c), so nähern wir uns dem von F. Neumann zur Ableitung der Fresnel'schen Gleichungen angegebenen Pfade. Von unserem allgemeineren Standpunkte aus lässt sich nicht allein von vornherein überblicken, dass beide Wege zum gleichen Ziele führen müssen, sondern auch erkennen, dass beide mit gleicher Berechtigung beschritten werden können. Dass in den wirklich beobachteten Erscheinungen der Reflexion die elektrischen und magnetischen Kräfte nicht völlig miteinander vertauschbar sind und beide Wege verschieden erscheinen, hat seinen Grund in dem Umstande, dass für alle in Betracht kommenden Körper die Magnetisirungsconstanten fast gleich und gleich Eins sind, während die Dielektricitätsconstanten merklich verschieden sind, und dass also hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper deren optisches Verhalten bestimmen.

Bildet die xy-Ebene die Grenze unseres Nichtleiters gegen einen vollkommenen Leiter, so gelten in dieser Ebene die Gleichungen:

$$(19_e) \qquad N = 0\,,$$

$$(19_f) \qquad X = 0\,, \quad Y = 0\,.$$

Dieselben lassen zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere des Nichtleiters erkennen, dass bei jedem Einfallswinkel und jedem Azimuth der Polarisation die Reflexion eine totale ist. Da die wirklichen Leiter zwischen den vollkommenen

Leitern und den Nichtleitern die Mitte halten, so wird die Reflexion an ihnen einen Uebergang bilden zwischen der totalen Reflexion und der Reflexion an durchsichtigen Körpern. Da die Metallreflexion eine derartige Stellung einnimmt, so lässt sich übersehen, dass unsere Gleichungen geeignet sein werden, ein allgemeines Bild auch der Metallreflexion zu geben. Wie weit in die Einzelheiten hinein aber die Wiedergabe durch passende Wahl der Constanten sich erstrecken lässt, scheint bisher noch nicht genügend untersucht zu sein.

Dass die Erscheinungen der Dispersion die Einführung mindestens zweier elektrischen oder zweier magnetischen Grössen erfordern und deshalb ausserhalb des Bereichs unserer gegenwärtigen Theorie liegen, ist schon im ersten Abschnitt erwähnt worden.

20. Krystalloptik.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf die Lichtbewegung im Innern eines homogenen, vollkommen durchsichtigen Krystalles, von welchem wir des weiteren voraussetzen, dass die Symmetrieaxen der elektrischen und der magnetischen Energie zusammenfallen. Legen wir die Coordinatenaxen diesen gemeinschaftlichen Symmetrieaxen parallel und setzen der Einfachheit halber für:

$$\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \mu_{11},\ \mu_{22},\ \mu_{33}\ \text{jetzt}\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,$$

so nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen (5_a) und (5_b) die Form an:

$$(20_a)\ \left\{\begin{aligned} A\mu_1\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \\ A\mu_2\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \\ A\mu_3\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}, \end{aligned}\right. \qquad (20_b)\ \left\{\begin{aligned} A\varepsilon_1\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}, \\ A\varepsilon_2\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}, \\ A\varepsilon_3\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen werden integrirt durch die Annahme ebener Wellen geradlinig polarisirten Lichtes, welche den folgenden Aussagen entsprechen: Auf der elektrischen Polarisation steht die magnetische Kraft, auf der magnetischen Polarisation die elektrische Kraft senkrecht. Die Richtung der beiden Kräfte tritt im allgemeinen aus der Wellenebene heraus, die Richtung der beiden Polarisationen liegt in der Wellenebene. Die Richtung, welche auf den beiden Polarisationen senkrecht steht, ist also die Wellennormale; die Richtung, welche auf den beiden Kräften senkrecht steht, ist die Richtung, in welcher sich zufolge Abschnitt 11 die Energie fortpflanzt, sie heisst in der Optik der Strahl. Jeder gegebenen Lage der Wellennormale entsprechen im allgemeinen zwei mögliche Wellen von verschiedener Polarisation, verschiedener Geschwindigkeit und verschiedener Lage des zugehörigen Strahles. Lassen wir in einem bestimmten Augenblicke vom Nullpunkt des Coordinatensystems ebene Wellen mit allen möglichen Lagen der Wellennormale ausgehen, so umhüllen diese Wellenebenen nach der Zeiteinheit eine Fläche, die sogenannte Wellenfläche. Jede einzelne Wellenebene berührt die Wellenfläche in einem Punkte des durch den Nullpunkt gelegten zugehörigen Strahles. Als Gleichung der von den Wellenebenen umhüllten Fläche wird gefunden:

$$(20_c)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{x^2}{\varepsilon_1}+\frac{y^2}{\varepsilon_2}+\frac{z^2}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{x^2}{\mu_1}+\frac{y^2}{\mu_2}+\frac{z^2}{\mu_3}\right)-\frac{x^2}{\varepsilon_1\mu_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_2\mu_2}\right)\\&-\frac{y^2}{\varepsilon_2\mu_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\mu_1}\right)-\frac{z^2}{\varepsilon_3\mu_3}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_2}+\frac{1}{\varepsilon_2\mu_1}\right)+\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\mu_1\mu_2\mu_3}=0.\end{aligned}\right.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche vierten Grades schneidet die Coordinatenebenen in je zwei Ellipsen. In einer der Coordinatenebenen schneiden sich die beiden Ellipsen in vier Punkten, welches vier Nabelpunkte der Fläche sind; in den beiden anderen Coordinatenebenen umschliesst die eine Ellipse die andere, und zwar gelten diese Aussagen, welches auch die Werthe der ε und μ sind. Für alle wirklichen Krystalle ist mit sehr grosser Annäherung $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$; für diesen Fall reducirt sich die allgemeine Form der Gleichung auf die der Fresnel'schen Wellenfläche und von den beiden Ellipsen, in welchen die Fläche jede der Coordinatenebenen schneidet, reducirt sich je eine auf einen Kreis.

Man weiss, dass sich an die Betrachtung der Wellenfläche und ihrer Ausartungen in besonderen Fällen die Erklärung der Doppelbrechung, der Reflexion an Krystallflächen, vieler der in Krystallen beobachteten Interferenzerscheinungen anknüpft. Andere Thatsachen der Krystalloptik lassen sich hinwiederum nicht bewältigen durch den Verfolg einer einzigen elektrischen und einer einzigen magnetischen Richtungsgrösse; diese Thatsachen liegen daher ausserhalb des Bereiches unserer Theorie in ihrem gegenwärtigen Umfang.

Wir haben in den Nummern 17—20 die Aufzählung derjenigen Fälle des veränderlichen Zustandes erschöpft, deren Wichtigkeit bislang zur Entwickelung besonderer Theorien Veranlassung gegeben hat.