Gesammelte Werke

Schriften vermischten Inhalts

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1987

19. Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft

urn:nbn:de:bsz:31-269592

19. Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft.

Aus der meteorologischen Zeitschrift. Bd. 1, S. 421—431, 1884.

(Hierzu die Tafel am Ende des Buches.)

Betrachtungen über die Zustandsänderungen feuchter Luft, welche ohne Wärmezufuhr zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, hat der theoretisierende Meteorologe tagtäglich anzustellen. Daher wünscht derselbe mit möglichst geringem Zeitaufwande Antwort auf die hierher gehörigen Fragen erlangen zu können, und er wird sich nicht gern auf irgend welche komplizierten Formeln der Thermodynamik verweisen lassen. Thatsächlich wird er sich meist an die kleine praktische Tabelle halten, welche Professor Hann im Jahre 1874 mitgeteilt hat.[1]) Doch scheint es, dafs man bei mindestens gleicher Bequemlichkeit eine gröfsere Vollständigkeit erzielen kann, wenn man sich der graphischen Methode bedient, und die beigefügte Tafel stellt einen Versuch in dieser Richtung dar. Theoretisch Neues enthält dieselbe nur insofern, als sie auch das eigentümliche Verhalten wasserhaltiger Luft bei 0^0 vollständig berücksichtigt, welches, so viel ich weifs, bisher noch nicht behandelt ist.[2]) Ich will nun unter A. die exakten Formeln des Problems zusammenstellen, da eine vollständige Zusammenstellung zu fehlen scheint; unter B. die Wiedergabe der Formeln durch die Tafel

[1]) Siehe die Zeitschr. d. österr. Ges. f. Met. Bd. IX. S. 328.

[2]) [Anm. der Red. der met. Zeitschr.:] Vgl. übrigens Guldberg und Mohn: Études sur les mouvements de l'atmosphère, I. S. 9—16 und dieselben, Österr. Zeitschrift 1878, S. 117—122. [Vgl. hierzu die Nachschrift, S. 337 dieses Bandes.]

beschreiben, endlich unter C. die Benutzung der letzteren an einem numerischen Beispiele vollständig, wenn auch rein mechanisch, erläutern. Verfolgt man dieses Beispiel mit der Tafel in der Hand, so gewinnt man ein Urteil über den Nutzen der Tafel und die Kenntnis ihres Gebrauches, ohne dafs man nötig gehabt hätte, sich durch die Rechnungen von A. und B. hindurchzuschlagen.

A. In einem Kilogramm eines Gemenges von Luft und Wasserdampf seien λ Gewichtsteile trockener Luft und μ Gewichtsteile ungesättigten Wasserdampfes enthalten. Der Druck des Gemenges sei p, seine absolute Temperatur T. Es fragt sich: Welche Zustände wird das Gemenge durchlaufen, wenn ohne Wärmezufuhr sein Druck ins Unbegrenzte vermindert wird. Wir müssen verschiedene Stadien unterscheiden.

1. Stadium: Der Dampf ist ungesättigt, flüssiges Wasser nicht vorhanden. Wir nehmen an, dafs der ungesättigte Dampf dem Gay-Lussac-Mariotte'schen Gesetze folge. Ist dann e der Partialdruck des Wasserdampfes, $p-e$ derjenige der trockenen Luft, v das Volumen eines Kilogrammes des Gemenges, so ist

$$p - e = \lambda \frac{RT}{v}, \qquad e = \mu \frac{R_1 T}{v},$$

wo R und R_1 Konstanten von bekannter Bedeutung und Gröfse sind. Da nun der Gesamtdruck p die Summe dieser beiden Werte ist, so folgt $pv = (\lambda R + \mu R_1)\,T$, und dies ist die sogenannte Zustandsgleichung für das Gemenge. Ist ferner c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen für Luft, c_v' für Wasserdampf, so müssen wir, um die Änderungen dv und dT hervorzurufen, der Luft die Wärmemenge zuführen:

$$dQ_1 = \lambda \left\{ c_v\, dT + ART \frac{dv}{v} \right\},$$

dem Wasserdampf hingegen die Wärme

$$dQ_2 = \mu \left\{ c_v'\, dT + AR_1 T \frac{dv}{v} \right\},[1]$$

beiden zusammen also die Wärmemenge:

---

[1]) Vgl. Clausius, Mechanische Wärmetheorie. 1876. Bd. I, S. 51.

$$dQ = (\lambda c_v + \mu c_v')\, dT + A(\lambda R + \mu R_1)\, T \frac{dv}{v} .$$

Diese Wärmemenge soll aber Null sein für die von uns untersuchte Änderung. Um die nach Nullsetzung von dQ entstehende Differentialgleichung zu integrieren, dividieren wir dieselbe durch T. Wir wissen von vornherein aus der mechanischen Wärmetheorie, daſs durch diese Operation die Gleichung integrabel wird, und finden es a posteriori bestätigt. Führen wir die Integration aus und eliminieren v mittels der Zustandsgleichung, indem wir beachten, daſs $c_v + AR$ gleich c_p, der spezifischen Wärme bei konstantem Drucke[1]) ist, so folgt:

I) $$0 = (\lambda c_p + \mu c_p') \log \frac{T}{T_0} - A(\lambda R + \mu R_1) \log \frac{p}{p_0} .$$

Die Gröſse, welche die rechte Seite der Gleichung bildet, hat eine physikalische Bedeutung, es ist der Unterschied der Entropie des Gemenges zwischen den beiden Zuständen, welche durch die Gröſsen pT und $p_0 T_0$ charakterisiert sind. Übrigens verhält sich das Gemenge offenbar genau wie ein Gas, dessen Dichte und spezifische Wärme mittlere Werte zwischen denen des Wasserdampfes und der Luft haben.

Es ist nun der Grenzwert von p zu berechnen, bis zu welchem die Gleichung I) benutzt werden darf. Sei jetzt und für das folgende e der Druck des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur T. e ist eine Funktion von T, aber auch von T allein. Die Menge ν gesättigten Wasserdampfes, welche in dem Volumen v bei der Temperatur T vorhanden ist, beträgt alsdann

a) $$\nu = \frac{ve}{R_1 T}$$

und diese Menge muſs gröſser sein als μ, so lange der Dampf ungesättigt sein soll. Die Grenze tritt also ein, wenn $\mu = \nu$ wird. Setzen wir für v seinen Wert aus der Zustandsgleichung ein, so nimmt diese Bedingung die Form an:

b) $$p = \frac{\lambda R + \mu R_1}{\mu R_1} \cdot e .$$

[1]) Vgl. Clausius, Mechanische Wärmetheorie. 1876. Bd. I, S. 51.

Sobald T und p Werte erreichen, welche dieser Gleichung genügen, müssen wir die Gleichung I) verlassen, und übergehen zum

2. Stadium: Die Luft ist mit Wasserdampf gesättigt und enthält neben demselben flüssiges Wasser. Das Volumen des letzteren vernachlässigen wir. Wir können alsdann auch hier die Luft einerseits, das Wasser mit seinem Dampfe andererseits jedes so betrachten, als ob das andere nicht vorhanden wäre. Beiden ist dasselbe Volumen v und dieselbe Temperatur T wie dem Gemenge beizulegen, dagegen ist der Druck p des Gemenges gleich der Summe der Partialdrucke $p_1 = \lambda RT/v$ der Luft und $p_2 = e$ des Wasserdampfes. Die Gleichung

$$p = \lambda \frac{RT}{v} + e \ , \quad \text{oder} \quad (p - e)\,v = \lambda RT$$

ist demnach jetzt die Zustandsgleichung des Gemenges. Die Wärmemenge, welche wir der Luft zuführen müssen, um die Änderungen dT und dv zu erzielen, ist wie vorher

$$dQ_1 = \lambda \left\{ c_v\, dT + ART \frac{dv}{v} \right\} \ ,$$

dagegen die Wärmemenge, welche dem Wasser zugeführt werden mufs, um gleichzeitig die Änderung dT hervorzurufen, und die Menge $\mathfrak{v}$, des dampfförmigen Wassers, um $d\mathfrak{v}$ zu vermehren, während Druck und Volumen sich entsprechend ändern:

$$dQ_2 = T\, d\left(\frac{\mathfrak{v} r}{T}\right) + \mu c\, dT \ .$$

Die Gleichung findet sich abgeleitet in Clausius' mechanischer Wärmetheorie, Bd. I, Abschnitt VI, § 11. c ist die spezifische Wärme des flüssigen Wassers, r die äufsere latente Wärme des Dampfes, beide hier in Wärmemafs gemessen. Die ganze dem Gemenge zuzuführende Wärme ist demnach:

$$dQ = \lambda \left\{ c_v\, dT + ART \frac{dv}{v} \right\} + T\, d\left(\frac{\mathfrak{v} r}{T}\right) + \mu c\, dT \ .$$

Auch hier setzen wir $dQ = 0$, dividieren durch T und integrieren. Aus der Integralgleichung schaffen wir mit Hilfe der Zustandsgleichung und der Gleichung a) die Gröfsen v und $\mathfrak{v}$ fort und erhalten:

$$\text{II)} \qquad 0 = (\lambda c_p + \mu c)\log\frac{T}{T_0} + \lambda A R \log\frac{p_0 - e_0}{p - e}$$
$$+ \lambda\frac{R}{R_1}\left\{\frac{r}{T}\frac{e}{p-e} - \frac{r_0}{T_0}\frac{e_0}{p_0 - e_0}\right\} \quad .$$

Die gleich Null gesetzte Gröfse bedeutet auch hier den Unterschied der Entropie zwischen dem End- und dem Anfangszustande. Die erlangte Gleichung können wir benutzen, so lange bis die Temperatur den Gefrierpunkt erreicht, dann aber gelangen wir zum

3. Stadium, in welchem die Luft neben dem Dampfe und dem flüssigen Wasser auch Eis enthält. Jetzt wird bei weiterer Expansion die Temperatur nicht sogleich weiter sinken, denn die latente Wärme des gefrierenden Wassers wird auch ohne Temperaturerniedrigung die Arbeit liefern, welche die Überwindung des äufseren Druckes erfordert. Doch nicht allein hierzu wird die Gefrierungswärme verwandt werden müssen, sondern auch dazu, einen Teil des schon verdichteten Wassers wieder in Dampf aufzulösen. Da nämlich während der Expansion das Volumen wächst, ohne dafs die Temperatur sinkt, so wird am Ende des Prozesses wieder mehr Wasser dampfförmig sein, als vorher, das Gewicht des gebildeten Eises wird kleiner sein, als das der schon vorhanden gewesenen Flüssigkeit. Sei nun wieder ν der Teil von μ, welcher dampfförmig ist, σ sei der Teil, welcher als Eis besteht, q sei die Schmelzwärme eines Kilogrammes Eis. T, e, r sind Konstanten. Da also $dT = 0$ ist, so haben wir der Luft jetzt nur die Wärmemenge $\lambda A R T dv/v$ zuzuführen, dem Wasser, welches wir verdampfen, die Wärmemenge $r d\nu$ und dem Wasser, welches wir gefrieren lassen, die Menge $-q d\sigma$. Dem ganzen Gemenge also kommt die Wärmemenge zu:

$$dQ = \lambda A R T\frac{dv}{v} + r d\nu - q d\sigma \quad .$$

Setzen wir $dQ = 0$, dividieren durch T und integrieren, so folgt:

$$0 = \lambda A R \log\frac{v}{v_0} + \frac{r}{T}(\nu - \nu_0) - \frac{q}{T}(\sigma - \sigma_0) \quad .$$

Die Division durch T war hier nur nötig, um der rechten

Seite die Bedeutung des Entropieunterschiedes zu geben. Mit Hilfe der Zustandsgleichung und der Gleichung a) können wir v und v fortschaffen, und statt ihrer den Druck p einführen. Die Gleichung zeigt uns alsdann, wie sich mit der Änderung des Druckes die Menge σ des gebildeten Eises ändert. Die Einzelheiten des Prozesses interessieren uns indes weniger, als die Grenzen, innerhalb deren er stattfindet. Wir beziehen daher den Index 0 auf den Zustand, in welchem das Gemisch eben die Temperatur 0^0 erreichte, in welchem also Eis nicht vorhanden, $\sigma_0 = 0$ war. Den Index 1 hingegen beziehen wir auf den Zustand, in welchem das letzte Wasser gefroren ist, in welchem also die Temperatur eben anfängt, unter 0^0 zu sinken. Hier ist offenbar $\sigma = \mu - v$, da ja nur noch Eis und Dampf vorhanden ist. Setzt man nun nach Einführung der Drucke diese Werte ein, so folgt:

$$0 = \lambda A R \log \frac{p_0 - e}{p_1 - e} + \lambda \frac{R}{R_1} \frac{e}{p_1 - e} \frac{r+q}{T} - \lambda \frac{R}{R_1} \frac{e}{p_0 - e} \frac{r}{T} - \mu \frac{q}{T} \,. \qquad \text{III)}$$

Diese Gleichung verbindet also die Drucke p_0 und p_1, bei welchen das dritte Stadium erreicht und verlassen wird.

Den Gröfsen e und T war es nicht nötig, einen Index beizufügen, da sie die Gleichen für End- und Anfangszustand sind.

4. Stadium: Sinkt nun die Temperatur weiter, so haben wir nur Dampf und Eis. Die Betrachtungen, welche wir anzustellen haben, sind die gleichen, wie im 2. Stadium und auch die Endformel ist die gleiche. Nur hat hier die Verdampfungswärme einen anderen Wert wie dort. Sie ist nämlich hier gleich $r + q$, denn die Wärme, welche erforderlich ist, das Eis unmittelbar in Dampf zu verwandeln, mufs genau gleich der Wärme sein, welche nötig ist, das Eis erst zu schmelzen und das Wasser alsdann in Dampf zu verwandeln. Wenn wir streng sein wollen, dürfen wir dabei q nicht konstant annehmen, sondern müssen es als ein wenig veränderlich mit der Temperatur betrachten, doch sind die Unterschiede so klein, dafs sie hier aufser Betracht bleiben können. In diesem vierten Stadium wird man nun bis zu denjenigen Temperaturen gelangen, bei welchen die Luft selber nicht mehr als permanentes Gas betrachtet werden kann.

Die vier Stadien, welche wir unterschieden haben, könnte man sehr passend als das Trocken-, Regen-, Hagel- und Schneestadium bezeichnen.

Ist man nun in der Lage, die Veränderungen eines Gemenges, welches einen beträchtlichen Prozentsatz Wasser enthält, exakt verfolgen zu müssen, so wird nichts übrig bleiben, als dafs man sich an diese komplizierten Formeln hält. Man verfährt alsdann in folgender Weise: Man setzt zunächst die Werte von λ und μ in alle Gleichungen ein. Man setzt sodann die Gröfsen p_0 und T_0 für den gegebenen Anfangszustand in die Gleichung I) ein. Die entstehende Gleichung und die Gleichung b) fafst man auf als zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten p und T. Löst man sie nach diesen auf, so erhält man denjenigen Zustand, in welchem man vom ersten Stadium zum zweiten übergehen mufs. Die erhaltenen Werte setzt man alsdann als p_0 und T_0 in die Gleichung II) ein. Indem man in der erhaltenen Gleichung $T = 273$ setzt, erhält man dasjenige p_0, welches in den Gleichungen des dritten Stadiums vorkommt. Bestimmt man nun weiter aus Gleichung III) den Enddruck p_1 des dritten Stadiums, so bildet dieser Druck und die Temperatur 273 das p_0 und T_0 in den Gleichungen des vierten Stadiums. Häufig wird es vorkommen, dafs die Temperatur, bis zu welcher das erste Stadium gilt, unterhalb des Gefrierpunktes liegt; alsdann geht man unmittelbar zum vierten Stadium über, das zweite und dritte fallen fort. Nachdem man so für alle Gleichungen die Koefficienten und die Grenzen der Gültigkeit bestimmt hat, kann man sie benutzen, um für jedes beliebige p das zugehörige T und umgekehrt zu bestimmen. Freilich werden sich alle diese Rechnungen nur durch successive Annäherungen ausführen lassen, und man wird gut thun, die erforderlichen Näherungswerte der Tafel zu entnehmen. Hat man p und T für irgend einen Zustand ermittelt, so ergeben sich die übrigen Attribute desselben leicht. Die Dichte des Gemenges folgt aus der jedesmaligen Zustandsgleichung. Die Gleichung a) giebt die Menge des noch dampfförmigen und damit auch die Menge des schon verflüssigten Wassers. Häufig wird man die Höhendifferenz h wissen wollen, welche den verschiedenen Zuständen p_0 und p_1 entspricht, unter der Annahme, dafs die ganze Atmosphäre sich im sogenannten adiabatischen Gleichgewichtszustande befindet. Will man die exakte Lösung der Aufgabe, so ist sie durch die mühsame mechanische Auswertung des Integrales

$$h = \int_{p_1}^{p_0} v dp$$

zu erlangen; da aber gerade in diesem Punkte eine exakte Bestimmung niemals besonderen Wert hat, so kann man sich hier stets an die bequeme Tafel halten.

B. Handelte es sich nur um ein Gemenge von einer ganz bestimmten Zusammensetzung, also nur um einen Wert des Verhältnisses $\mu : \lambda$, so könnte man die abgeleiteten Formeln exakt durch eine Tafel wiedergeben, welche die adiabatischen Änderungen des Gemisches von jedem Zustande aus unmittelbar übersehen liefse. Man würde Druck und Temperatur als Koordinaten in einer Ebene benutzen, und man würde diese Ebene bedecken mit einem Systeme von Kurven, welche alle Zustände verbänden, die adiabatisch ineinander übergehen können. Man würde alsdann nur nötig haben, von einem gegebenen Anfangszustande aus an der durch den betreffenden Punkt gehenden Kurve entlang zu gleiten, um durch alle Stadien hindurch das Verhalten des Gemisches zu übersehen. Da aber die Meteorologie notgedrungen sehr mannigfaltige Mischungsverhältnisse behandeln mufs, so würde sie auf diesem Wege einer grofsen Zahl von Tafeln bedürfen. Es zeigt sich nun, dafs man auch mit einer Tafel auskommen kann, wenn man sich einmal beschränkt auf solche Fälle, in welchen Gewicht und Druck des Wasserdampfes klein ist gegen Gewicht und Druck der Luft, und wenn man zweitens auch von den Resultaten keine gröfsere Genauigkeit verlangt, als sie der Vernachlässigung jener Gröfsen gegen diese entspricht. Wirft man nämlich μ fort gegen λ und e gegen p, so ist die Form der zu ziehenden Kurven die gleiche für alle verschiedenen absoluten Werte von μ, es können also dieselben Kurven für alle verschiedenen Gemische benutzt werden. Die Punkte allerdings, in welchen die verschiedenen Stadien ineinander übergehen, werden sehr verschieden liegen für verschiedene Gemische und es wird daher besonderer Vorkehrungen bedürfen, durch welche diese Punkte ermittelt werden. Nach diesen Prinzipien ist nun die Tafel konstruiert.

Im Grundnetze sind als Abscissen die Drucke im Intervall von 300 mm bis 800 mm Quecksilber, als Ordinaten die Temperaturen zwischen -20^0 und $+30^0$ C. eingetragen. Es stellt jedoch, wie man sieht, nicht ein gleiches Längenwachstum der Koordinaten einen gleichen Druck- oder Temperaturzuwachs dar, sondern die Tafel ist so konstruiert, dafs gleichem Zuwachse der Länge ein gleicher Zuwachs der Logarithmen des Druckes resp. der absoluten Temperatur entspricht. Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, dafs so die Kurven, auf welche es ankommt, zum Teil exakt, zum Teil angenähert gerade Linien werden, was einen bedeutenden Vorteil für die genaue Konstruktion und Benutzung der Tafel ergiebt.

Die Adiabaten des ersten Stadiums sind nun bei Vernachlässigung von μ gegen λ gegeben durch die Gleichung:

$$\text{constans} = c_p \log T - AR \log p \quad .$$

Die Logarithmen sind stets natürliche. Mit Clausius ist zu setzen

$$c_p = 0.2375 \frac{\text{Kalorie}}{\text{Grad Cels.} \times \text{Kilogr.}} \,,$$

$$A = \frac{1}{423.55} \frac{\text{Kalorie}}{\text{Kilogrammmeter}} \,,$$

$$R = 29.27 \frac{\text{Kilogrammmeter}}{\text{Grad Cels.} \times \text{Kilogr.}} \,.$$

Diese Adiabaten erscheinen in unserer Zeichnung als gerade Linien. Eine von ihnen ist durch den Buchstaben (a) gekennzeichnet und mit diesem möge das System genannt werden. Die einzelnen Linien sind so gezogen, dafs von einer zur anderen der Wert der Konstanten, der Entropie, um

$$0.0025 \frac{\text{Kalorie}}{\text{Grad Cels.} \times \text{Kilogr.}}$$

wächst. Sie erscheinen dabei in gleichem Abstand von einander. Eine von ihnen ist durch den Punkt 0^0 C. und 760 mm Druck gezogen.

Die Kurven des zweiten Stadiums genügen jetzt[1]) der Gleichung:

$$\text{constans} = c_p \log T - AR \log p + \frac{R}{R_1} \frac{r}{T} \frac{e}{p} \cdot$$

R/R_1 ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes in Bezug auf Luft, also gleich 0.6219. r ist nach Clausius gleich $607 - 0.708\ (T - 273)$ Kalorien / Kilogramm, e habe ich für die verschiedenen Temperaturen der von Broch[2]) berechneten Tabelle entnommen. Die Kurven verlaufen mit schwacher Krümmung von rechts oben nach links unten. Eine von ihnen ist mit β bezeichnet. Auch sie sind so gezogen, dafs die Entropie von einer zur anderen per Kilogramm um 0.0025 Kalorien / Grad Cels. wächst und dafs eine unter ihnen durch den Punkt 0°, 760 mm geht.

Die Kurvenstücke, welche dem dritten Stadium entsprechen, fallen mit der Isotherme 0° zusammen.

Endlich sind die Kurven des vierten Stadiums ganz ähnlich denjenigen des zweiten, aber doch nicht ihnen gleich, denn ihre Formel geht aus der jener hervor, indem für r jetzt $r + q$ gesetzt wird, wo $q = 80$ Kalorien / Kilogramm ist. Sie sind mit γ bezeichnet und nach derselben Regel gezogen wie α und β, im allgemeinen bilden sie nicht die Verlängerung der Kurven β.

Es sind nun noch Mittel anzugeben, durch welche die Übergangspunkte der verschiedenen Stadien gefunden werden können. Um das Ende des ersten Stadiums zu ermitteln, dienen die punktierten Linien. Dieselben geben in Grammen, berechnet nach der Formel $v = Re/R_1 T$, die gröfste Menge

[1]) Wenn auch μ gegen λ zu vernachlässigen ist, so ist doch fraglich, ob noch $c\mu$ gegen $c_p\lambda$ zu vernachlässigen sei, da c viermal gröfser ist wie c_p. Wenn auch in den Grenzen der Tafel μ nicht gröfser ist gegen λ als $^1/_{40}$, so erreicht doch das Verhältnis $c\mu : c_p\lambda$ schon den Wert $^1/_{10}$. Für meteorologische Anwendungen bedenke man indes, dafs in diesen extremen Fällen doch nicht das flüssige Wasser vollständig mit der Luft fortgeführt werden wird. Häufig wird ein so grofser Bruchteil desselben als Regen herausfallen, dafs man der Wahrheit näher kommt, wenn man die spezifische Wärme des flüssigen Wassers ganz vernachlässigt, als wenn man für sie das volle Gewicht in Rechnung setzt.

[2]) Siehe Trav. du Bureau intern. des poids et mesures, Tome I.

Wassers, welche ein Kilogramm des Gemenges in den verschiedenen Zuständen eben noch als Dampf zu enthalten vermag. So verbindet also die mit 25 bezeichnete Kurve alle diejenigen Zustände, in welchen auf 1 Kilogramm des Gemenges im Sättigungszustande 25 Gramm Dampf kommen. Sie sind von Gramm zu Gramm gezogen. Enthält ein Gemenge in jedem Kilogramm n Gramm Dampf, so dürfen wir offenbar der Kurve des ersten Stadiums folgen bis zur punktierten Linie n, dann aber haben wir zum zweiten, resp. vierten Stadium überzugehen.

Die Grenze des zweiten Stadiums gegen das dritte ist gegeben durch den Schnittpunkt der betreffenden Adiabate β mit der Isotherme von 0^0. Durch den Druck p_0, welcher diesem Schnittpunkte entspricht, und die Menge μ des Wassers ist der Druck p_1 bestimmt, bei welchem der Übergang vom dritten zum vierten Stadium zu erfolgen hat. Zur graphischen Bestimmung von p_1 soll die kleine Hilfstafel dienen, welche sich am Fufse der gröfseren findet. Dieselbe enthält als Abscissen die Drucke in derselben Anordnung wie die grofse Tafel, und als Ordinaten die Gesamtmenge μ des Wassers in allen Zuständen, berechnet in Grammen pro Kilogramm des Gemenges. Die schrägen Linien der Tafel sind nichts anderes als die Kurven, welche der Gleichung III) des dritten Stadiums entsprechen, wenn man in dieser Gleichung p_0 als Konstante, p_1 und μ aber als variable Koordinaten ansieht. Diese Linien sind nicht genau Gerade, obwohl sie im Mafsstabe der Zeichnung nicht von solchen zu unterscheiden sind. Der höchste Punkt jeder Linie entspricht dem Falle $p_1 = p_0$. Das zugehörige μ ist nicht Null, sondern gleich dem Minimalwerte ν, welchen μ haben mufs, damit überhaupt das Gemenge bei 0^0 gesättigt sei und die Hilfstafel zur Anwendung komme. Will man nun zu einem bestimmten Werte von p_0 und μ das zugehörige p_1 finden, so sucht man diejenige schräge Linie, deren höchster Punkt auf der Abscisse p_0 liegt, und geht auf derselben hinunter bis zur Ordinate μ. Der Druck, bei welchem man diese Ordinate erreicht; ist der gesuchte Druck p_1. Mit ihm ist der Übergangspunkt zum vierten Stadium gefunden.

Hat man nun auf diese Weise die Gesamtheit der Zustände ermittelt, welche das Gemisch durchläuft, so findet man für jeden einzelnen die übrigen interessierenden Gröfsen in folgender Weise:

1. Die punktierte Linie, auf welcher man sich befindet, giebt unmittelbar an, wie viel Gramm Wasser für den betreffenden Zustand noch dampfförmig sind. Subtrahiert man diese Menge von der ganzen ursprünglichen Menge μ, so erhält man die Menge des bereits kondensierten Wassers.

2. Die Dichtigkeit δ des Gemenges kann bei den eingeführten Vernachlässigungen für alle Zustände berechnet werden nach der Formel: $\delta = p/RT$ oder $\log \delta = \log p - \log T - \log R$. Graphisch könnte sie ablesbar gemacht werden, wenn man die Tafel noch bedeckte mit einem Systeme von Linien gleicher Dichtigkeit. Man sieht ein, dafs diese Linien durch ein System paralleler Grade gebildet werden würden. In Wirklichkeit ist nun auf der Tafel nur eine dieser Linien, die Linie δ gezogen, um die Tafel nicht zu überlasten. Man kann aber auch schon mit Hilfe dieser einen Graden die Dichtigkeit zweier Zustände 1 und 2 vergleichen nach dieser Regel: Von den Punkten 1 und 2 ziehe man zwei Gerade parallel zu δ bis dahin, wo sie die Isotherme 0^0 schneiden, und lese die Drucke p_1 und p_2 an diesen Schnittpunkten ab. Wie $p_1 : p_2$, so verhalten sich die Dichtigkeiten in 1 und 2. Denn die Dichtigkeiten für die Zustände p_1, 0^0 und p_2, 0^0 verhalten sich nach dem Mariotte'schen Gesetze wie $p_1 : p_2$ und sie sind gleich mit den Dichtigkeiten in 1 und 2, da sie mit diesen auf Linien gleicher Dichtigkeit liegen.

3. Der Höhenunterschied h, welcher unter Annahme des adiabatischen Gleichgewichtszustandes dem Übergange von dem Zustande p_0 zu dem Zustande p entspricht, ist gegeben durch die Gleichung:

$$h = \int_p^{p_0} v\,dp = R\int_p^{p_0} T\frac{dp}{p}$$

Hierin würde man nun T als Funktion von p der Tafel entnehmen, und dann die Integration mechanisch ausführen. Thatsächlich wird die Voraussetzung adiabatischen Gleichgewichts stets so mangelhaft erfüllt sein, dafs es auf eine exakte Entwickelung ihrer Konsequenzen gar nicht ankommt.

Andererseits werden wir bei mäfsigen Höhen einen relativ sehr unbedeutenden Fehler begehen, wenn wir dem T' einen mittleren Wert geben, und es alsdann als konstant betrachten. Es schwankt nämlich im Bereiche der Tafel nur zwischen 253 und 303, legen wir ihm also den konstanten Wert $T'_0 = 273$ bei, so übersteigt der Fehler in h kaum je $\frac{1}{9}$ des ganzen Wertes. Geben wir uns mit diesem Fehler zufrieden, so haben wir $h = \text{constans} - RT'_0 \log p$, und können nun unmittelbar neben den Drucken auch die Höhen als Abscissen einführen. Es wird sogar überall einem gleichen Längenzuwachse der Abscisse ein gleicher Zuwachs der Höhe entsprechen. Die Höhenskala ist auf der Tafel ganz am Fufse angebracht, ihr Nullpunkt ist auf den Druck 760 verlegt, weil dieser als Normaldruck am Meeresspiegel bezeichnet zu werden pflegt.

C. Um nun den Gebrauch der Tafel an einem Beispiele zu erläutern, stellen wir uns die folgende konkrete Aufgabe: Gegeben ist am Meeresspiegel eine Luftmasse von 750 mm Druck, 27° Temperatur und 50 pCt. relativer Feuchtigkeit; gefragt wird, welche Zustände die Masse durchlaufe, wenn sie ohne Wärmezufuhr in höhere Schichten der Atmosphäre und damit unter niederen Druck versetzt wird und in welchen Höhen über dem Meeresspiegel angenähert die verschiedenen Zustände erreicht werden.

Zunächst suchen wir auf der Tafel denjenigen Punkt, welcher dem Anfangsstadium entspricht. Wir finden ihn als Schnittpunkt der horizontalen Isotherme 27 und der vertikalen Isobare 750. Wir bemerken, dafs er fast genau auf der punktierten Linie 22 liegt. Dies bedeutet, dafs unsere Luftmasse in jedem Kilogramm ihres eigenen Gewichtes 22.0 Gramm Wasserdampf enthalten müfste, um gesättigt zu sein. Da sie aber nur 50 pCt. relative Feuchtigkeit hat, so enthält sie 11.0 Gramm Wasser im Kilogramm. Dies merken wir uns für später. Ferner fahren wir auf der Isobare 750 hinunter bis zur Höhenskala, die sich am untersten Rande der Tafel findet, und lesen hier 100 m ab. Der Nullpunkt der Höhenskala liegt also um 100 m unterhalb des von uns als Ausgang gewählten Meeresspiegels, und wir haben von allen direkten Ablesungen der Höhenskala stets 100 m zu subtrahieren, um Höhen über dem Meeresspiegel zu erhalten. Heben wir nun unsere Luftmasse in die Höhe, so wird die Reihe der Zustände, welche sie durchläuft, zunächst gegeben durch diejenige Linie des Systemes α, welche durch den Anfangszustand geht.[1]) Eine ausgezogene Linie findet sich nicht vor, wir interpolieren deshalb eine solche. Wenn die Zahl der sich kreuzenden Linien verwirrend erscheint, so nehmen wir einen Papierstreifen und legen ihn parallel dem gerade betrachteten Systeme, es fällt dann alle Verwirrung fort. Um nun den Zustand etwa in der Nähe der Höhe 700 m kennen zu lernen, suchen wir den Punkt 700 + 100 = 800 in der Höhenskala und gehen senkrecht in die Höhe, bis wir unsere Linie α treffen. Der Schnittpunkt giebt 687 mm Druck und 19.3° Temperatur. Wir dürfen aber die Linie α nur bis zu demjenigen Punkte benutzen, in welchem sie die punktierte Linie 11 schneidet. Denn dafs wir diese Linie erreichen, bedeutet, dafs wir zu einem Zustande gelangen, in welchem die Luft nur noch eben 11 Gramm Wasser im Kilogramm dampfförmig zu enthalten vermag. Da wir nun 11 Gramm im Kilogramm haben, so beginnt bei weiterer Abkühlung die Kondensation. Der Druck für den Punkt beginnenden Niederschlages ist 640 mm, die Temperatur 13.3°. Dies ist nicht etwa die Temperatur des ursprünglichen Thaupunktes, sondern sie ist niedriger. Die punktierte Linie 11 schneidet die Isobare 750 bei 15.8°, und dies ist der ursprüngliche Thaupunkt. Da aber aufser der Abkühlung unserer Luft auch eine Vergröfserung des Volumens derselben stattgefunden hat, so hat sich das Wasser noch bis 13.3° flüchtig erhalten können. Die Höhe, in der wir uns befinden, entspricht der unteren Grenze der Wolkenbildung, sie beträgt ungefähr 1270 m. Um die Zustände weiter zu verfolgen, legen wir durch den Schnittpunkt eine Kurve des Systemes β und folgen dieser. Dieselbe fällt viel langsamer gegen die Abscissenaxe ab, als die bisher benutzte Linie α, es ändert sich also die Temperatur jetzt viel langsamer mit der Höhe als bisher, was in dem Freiwerden der latenten Wärme des Wasser-

[1]) Die Buchstaben α, β, γ, welche die Systeme bezeichnen, wird man in kleinen Kreisen am Rande der Tafel finden. Zu jedem derselben führt eine Linie desjenigen Systemes, welches bezeichnet werden soll. Die Zustandsänderung unseres Beispieles ist in der Tafel durch eine gestrichelte Linie angegeben.

dampfes seinen Grund hat. Nachdem wir nun 1000 m seit dem Beginne der Kondensation gestiegen sind, ist die Temperatur nur bis 8.2°, also nur um 0.51° auf je 100 m, gesunken. Wir befinden uns auf der punktierten Linie 8.9 und ersehen daraus, dafs jetzt noch 8.9 Gramm Wasser flüchtig sind, dafs also in diesen ersten Tausend Metern der Wolkenschicht 2.1 Gramm Wasser pro Kilogramm Luft kondensiert sind. Die Temperatur 0° erreichen wir bei dem Drucke 472 mm und in der Höhe 3750 m, während wir sie schon in der Höhe 2600 m erreicht hätten, wenn die Luft trocken gewesen wäre und wir die Linie α nicht hätten verlassen müssen. 4.9 Gramm Wasser oder 0.45 pCt. des gesamten Inhaltes erweisen sich jetzt als kondensiert, und dieser Teil beginnt bei weiterer Ausdehnung zu gefrieren und Hagel zu bilden. Bis aber nicht das letzte Teilchen Wasser gefroren ist, kann die Temperatur nicht weiter sinken, und wir werden daher auf eine gewisse Strecke die Temperatur 0° gleichmäfsig beibehalten. Um zu erfahren, bis wie weit, dient uns die Hilfstafel zwischen der Höhenskala und der gröfseren Tafel. Wir fahren auf der Isobare 472 hinunter bis zur punktierten Linie dieser Tafel, wir legen durch den Treffpunkt eine Linie parallel den schrägen Linien der Hilfstafel und gehen auf dieser Linie bis zu derjenigen horizontalen Linie, welche durch die Zahl 11, das Gewicht des gesamten Wassers, charakterisiert ist, und welche wir leicht zwischen die gezeichneten Horizontalen 10 und 15 interpolieren. Sobald wir diese Linie erreicht haben, lesen wir den Druck $p = 463$ mm ab und kehren zur grofsen Tafel zurück. Bei dem gefundenen Drucke ist der Gefrierungsprozefs beendigt, die Höhenschicht, innerhalb deren er stattfand, hat eine Dicke von nahezu 150 m. Auffallen mufs es, dafs den punktierten Linien zufolge die Menge des dampfförmigen Wassers während des Gefrierungsprozesses wieder ein wenig zugenommen hat. Dies ist indes ganz richtig, es hat ja das Volumen zugenommen, ohne dafs die Temperatur gesunken wäre. Mit dem Drucke 463 mm verlassen wir die Temperatur 0°. Das Wasser, welches jetzt noch niedergeschlagen wird, geht unmittelbar in den festen Zustand über. Da bald nicht mehr viel Wasser dampfförmig ist, so beginnt die Temperatur wieder mit der Höhe schneller zu sinken. Wir erfahren die verschiedenen Zustände, indem wir uns derjenigen der Linien γ anvertrauen, welche durch den Punkt 463 auf der Isotherme 0^0 gelegt werden kann. Die Temperatur -20^0, bis zu welcher unsere Tafel benutzbar ist, wird erreicht in der Höhe 7200 m und bei dem Drucke 305 mm, nur noch 2 Gramm Wasser finden sich luftförmig im Kilogramm, die übrigen 9 sind kondensiert. Interessiert es uns, zu wissen, wie sich die Dichte in diesem Zustande zur Dichte im Anfangszustande verhält, so legen wir durch die entsprechenden Punkte zwei Parallelen zur Linie δ. Dieselben treffen die Isotherme 0^0 bei den Drucken 330 und 680. Wie diese Drucke, d. h. wie 33 : 68, so verhalten sich die Dichten zu einander und wie 33 und 68 zu 76, so verhalten sie sich zur Dichte der Luft im Normalzustande von 0^0 und 760 mm Druck.

Alle diese Angaben sind direkt aus der Tafel abgelesen. Fehler, die stören könnten, finden sich wohl nur in den Höhenangaben. Diese beziehen sich nämlich genau genommen auf das Aufsteigen in einer Atmosphäre von der überall gleichen Temperatur 0^0. Meist aber wird anzunehmen sein, dafs die Temperatur der Atmosphäre überall die gleiche sei, wie die der aufsteigenden Luftmasse. Mit einem Minimum von Rechnung kann man die hieraus entspringenden Fehler bedeutend reduzieren. So fanden wir den Punkt beginnenden Niederschlages bei dem Drucke 640 mm. Diesem entspricht die Höhe 1270 m nur dann, wenn die Temperatur 0^0 ist. In unserem Falle aber lag sie zwischen 27^0 und 13^0, also im Mittel bei 20^0. Bei dieser Temperatur mufs die Höhe um $\frac{20}{273}$ oder $\frac{1}{14}$ gröfser sein, da die Dichtigkeit der Luft um den gleichen Bruchteil kleiner ist, als bei 0^0, die Höhe beträgt also in Wirklichkeit zwischen 1350 und 1400 m.

Wir müssen das Beispiel noch durch die Erwähnung besonderer Fälle ergänzen:

1. Wir nahmen an, dafs während des Hagelstadiums noch die ganze ursprüngliche Wassermenge von 11 Gramm in der Luft enthalten gewesen sei. Dies wird nun allerdings nur bei sehr schnellem Aufsteigen zutreffend sein, in anderen Fällen wird vielleicht der gröfste Teil des kondensierten Wassers als Regen herausgefallen sein, und also nur ein Bruchteil desselben zum Gefrieren gelangen. Hat man eine Schätzung, wie grofs

dieser Bruchteil ist, so gestattet die Tafel immer noch die Entnahme der richtigen Verhältnisse. Hätte man in unserem Beispiele Grund zu der Annahme, die Hälfte des bis 0° kondensierten Wassers sei entfernt gewesen, so wären bei Erreichung der Isotherme 0° nur noch 8.5 Gramm Wasser im Kilogramm Luft vorhanden gewesen. Wir wären alsdann bei der Benutzung der Hilfstafel nicht bis zur Horizontalen 11, sondern nur bis zur Horizontalen 8.5 herabgegangen und hätten die Temperatur 0° schon bei 466 mm Druck verlassen, dies wäre der einzige Unterschied gewesen.

2. Hätten wir nicht 50 pCt., sondern nur 10 pCt. relativer Feuchtigkeit in unserem Beispiele angenommen, so hätten wir die Linie α benutzen können bis zur punktierten Linie 2.2. Dieser Schnittpunkt findet sich bei 455 mm und $-13.6°$, also bedeutend unter Null. Es wäre also zu einer Bildung flüssigen Wassers gar nicht gekommen, und also auch nicht zu dem Stadium der Hagelbildung, sondern nur zu einer Sublimation des Wassers aus dem dampfförmigen in den festen Zustand. Wir wären von dem Schnittpunkte mit der Linie 2.2 aus unmittelbar derjenigen Linie des Systemes γ gefolgt, welche sich durch diesen Schnittpunkt hätte legen lassen. Die Frage ist nicht uninteressant: welchen Thaupunkt durfte unser Gemenge in seinem Anfangszustande von Druck und Temperatur höchstens besitzen, wenn die Kondensation flüssigen Wassers, d. h. die Kondensation oberhalb 0°, eben vermieden sein sollte? Um sie zu beantworten, verfolgen wir die Linie α bis zur Isotherme 0° und finden hier die punktierte Linie 5.25. Wir hätten also höchstens 5.25 Gramm Wasser im Kilogramm Luft haben dürfen. Um nun zu erfahren, bei welcher Temperatur die Luft beim Druck 750 mm alsdann gesättigt gewesen wäre, gleiten wir auf der Linie 5.25 hinauf bis zur Isobare 750 mm und treffen dieselbe bei der Temperatur 4.8° und dies ist der gesuchte Maximalwert des Thaupunktes.

[Am Schlusse des Heftes der meteorologischen Zeitschrift, in welchem diese Abhandlung erschien, findet sich die folgende Nachschrift der Redaktion:]

Als die Drucklegung des Heftes schon begonnen hatte, erhielten wir einen Brief von Herrn Dr. HERTZ, aus dem wir uns erlauben, einen Teil zum Abdruck zu bringen, mit der Bemerkung indessen, dafs unserer Ansicht nach der einleitende Teil seiner Abhandlung für eine um so wertvollere Bereicherung unserer Zeitschrift anzusehen ist, als zwar die Resultate in befriedigender Übereinstimmung mit jenen von GULDBERG und MOHN stehen, der Weg aber, auf dem sie gewonnen sind, teilweise abweicht und sich vollständiger an die Arbeiten von CLAUSIUS etc. anschliefst. Zudem ist der Gegenstand für die Meteorologie so wichtig und jene Arbeiten von GULDBERG und MOHN, auf welche wir Herrn Dr. HERTZ aufmerksam gemacht haben, keineswegs so allgemein zugänglich, dafs nicht eine Darlegung des Gegenstandes in einer neuen Zeitschrift sehr am Platze wäre. Herr Dr. HERTZ schreibt uns:

„Meinen besten Dank für die freundliche Übersendung der Arbeit von GULDBERG und MOHN; wenn ich dieselbe früher gekannt hätte, hätte ich den ganzen Abschnitt A meiner Arbeit weggelassen, denn thatsächlich stimmt derselbe aufser in der Bezeichnung aufs Haar mit der GULDBERG-MOHN'schen Berechnung überein. Einen Schreck habe ich übrigens doch von der Sache gehabt. Denn indem ich das von GULDBERG und MOHN berechnete Beispiel auf meiner Tafel aufsuchte, ging alles hinreichend gut bis 0°, indem ich aber weiter fuhr, fand ich, dafs das Gemisch die Temperatur −20° nach meiner Tafel bei 320 mm Druck erreicht, und GULDBERG und MOHN geben nach ihren Formeln 292·73 mm an.

Ein Fehler von 28 mm ging doch zu weit, und ich fürchtete stark, dafs ich in der Konstruktion einen Fehler gemacht hätte. Es scheint jedoch, dafs GULDBERG und MOHN sich verrechnet haben (im numerischen Beispiele), denn indem ich mit deren eigenen Formeln und Konstanten die Rechnung mehrfach wiederhole, finde ich stets 313 mm für den betreffenden Druck. Eine Abweichung von 7 mm in maximo ist also vorhanden zwischen den exakten Formeln und den Ablesungen der Tafel, und eine solche Ungenauigkeit ist mit den notwendigerweise zu machenden Vernachlässigungen auch verbunden. Ich denke, sie wird für die Meteorologie unter 100 Fällen 90mal irrelevant sein und durch die unvergleichliche Bequemlichkeit aufgewogen werden. Thatsächlich schätze ich für die genaue Durchrechnung des Beispieles von Guldberg und Mohn eine Arbeit von mindestens drei bis vier Stunden, während es in wenigen Minuten auf der Tafel verfolgt werden kann. Auch sind jene 7 mm eigentlich nicht gröfser, als die Unsicherheit der ganzen Rechnung überhaupt, welche dadurch entsteht, dafs nur ein Teil des ausgefällten Wassers mit der Luft fortgeführt wird.

Ist es noch Zeit, einen Zusatz oder Nachschrift von 10 bis 15 Zeilen zu machen, in welchen ich die Priorität Guldberg's und Mohn's anerkenne und zugleich auf den Grund jener Diskrepanz hinweise? Ich fürchte, es möchten andere die Tafel mit jenem Beispiele vergleichen, dieselbe für ungenau bis auf 28 mm halten und sie deshalb verwerfen. Doch auf die Priorität haben Sie ja selber hingewiesen ...

Kiel, den 8. Dezember 1884. Dr. H. Hertz."