Gesammelte Werke

Schriften vermischten Inhalts

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1987

17. Über die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik

urn:nbn:de:bsz:31-269592

17. Über die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 23.
S. 84—103. 1884.

Sobald Ampère die Entdeckung Oersted's erfuhr, dafs der elektrische Strom die Magnetnadel in Bewegung setze, vermutete er, dafs auch unter einander elektrische Ströme bewegende Kräfte äufsern müfsten. Offenbar war sein Gedankengang nahezu dieser: Der Strom übt magnetische Kräfte aus — denn ein Magnetpol bewegt sich unter dem Einflusse des Stromes; und der Strom wird bewegt durch magnetische Kräfte — denn nach dem Prinzip der Reaktion bewegt sich auch ein Stromträger unter dem Einflusse des Magnetes. Will man also nicht die unwahrscheinliche Annahme machen, dafs es verschiedene Arten magnetischer Kräfte gebe, so mufs sich ein Stromträger auch bewegen unter dem Einflusse derjenigen magnetischen Kräfte, die ein anderer Strom ausübt, und so folgt denn die Wechselwirkung zwischen den Strömen.

Das wesentliche Glied in dieser Schlufsfolge ist die Annahme, dafs es nur eine Art magnetischer Kraft gebe, dafs also die von Strömen ausgeübten magnetischen Kräfte in allen Wirkungen gleichwertig seien mit gleich grofsen und gleich gerichteten Kräften, welche von Magnetpolen ausfliefsen. Diese Annahme aber ist bekanntermafsen hinreichend, um nicht nur das Vorhandensein, sondern auch die exakte Gröfse der elektrodynamischen Wirkung geschlossener Ströme aus ihren magnetischen Wirkungen zu bestimmen. Ob nun Ampère von diesem Prinzipe ausging oder nicht, jedenfalls statuierte er dasselbe am Schlusse seiner Untersuchungen, indem er geradezu die Wirkung der Magnete zurückführte auf die Wirkung supponierter geschlossener Ströme. In der Folge hat man dann das Prinzip kaum erwähnt, sondern es als etwas Selbstverständliches hingenommen. Nach der Entdeckung derjenigen elektrischen Kräfte, welche veränderliche Ströme oder bewegte Magnete ausüben, trat ihm zur Seite ein analoges Prinzip in Bezug auf diese elektrischen Kräfte, ebenfalls mehr oder weniger unausgesprochen. Daſs diejenigen elektrischen Kräfte, welche aus Induktionswirkungen entspringen, nach jeder Richtung gleichbedeutend seien mit gleichen und gleichgerichteten Kräften elektrostatischer Quelle, ist ausdrücklich vielleicht nirgends behauptet worden, aber dies Prinzip ist die notwendige Voraussetzung und Folgerung der hauptsächlichsten Anschauungen, welche man sich über die elektrodynamischen Erscheinungen überhaupt gebildet hat. Nach der Faraday'schen Anschauungsweise ist das elektrische Feld etwas selbständig und unabhängig von seiner Erzeugungsweise im Raume Bestehendes; welches also auch die Veranlassung zur Entstehung eines elektrischen Feldes ist, die Wirkungen, welche dasselbe ausübt, werden immer die gleichen sein. Auf der anderen Seite suchen diejenigen Physiker, welche Weber's Anschauungen und verwandte vertreten, die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als spezielle Fälle einer und derselben von elektrischen Teilchen ausgehenden Fernkraft darzustellen. Die Behauptung, daſs diese Kräfte spezielle Fälle einer allgemeineren Kraftäuſserung sind, würde Sinn und Bedeutung verlieren, wollte man zulassen, daſs sich dieselben anders als durch Gröſse und Richtung, daſs sie sich auch nach Wesen und Wirkungsweise unterscheiden könnten. Aber abgesehen von aller Theorie findet sich die Annahme, von der wir reden, implicite enthalten in den meisten elektrischen Rechnungen; direkt geleugnet ist sie niemals worden, und so kann sie wohl als eine der Grundvorstellungen jeder bestehenden Elektrodynamik bezeichnet werden. Trotzdem hat man, soweit mir bekannt, noch nicht auf gewisse Folgerungen aufmerksam gemacht, zu welchen sie führt, und welche in folgendem entwickelt werden sollen. Als Prämissen unserer Schlüsse dienen dabei zunächst die erwähnten beiden Prinzipien, welche man als das von der Einheit der elektrischen und das von der Einheit der magnetischen Kraft bezeichen könnte, und welche zwar nicht als selbstverständlich, wohl aber als allgemein zugegeben gelten können; ferner das Prinzip von der Erhaltung der Kraft, das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung zwischen geschlossenen Stromsystemen, das Prinzip von der Superposition der elektrischen und magnetischen Wirkungen, endlich die bekannten Gesetze der magnetischen und elektromotorischen Wirkungen von geschlossenen Strömen und Magneten. Die Betrachtung bezieht sich stets auf geschlossene Ströme, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird.

1. Ein Ringmagnet, dessen Querschnitt wir der Einfachheit halber als klein gegen seine übrigen Dimensionen betrachten, verliere seinen Magnetismus. Er übt alsdann auf alle in seiner Nähe befindliche Elektricität eine Kraft aus, welche strebt, diese Elektricität um den Körper des Magnetes herumzuwirbeln. Die Gröfse dieser Kraft ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher der Magnetismus erlischt, sie kann während einer kurzen, aber endlichen Zeit konstant sein, wenn während dieser Zeit der Magnetismus mit gleichbleibender Geschwindigkeit abfällt. Die Verteilung der Kraft im Raume ist genau dieselbe, wie die Verteilung magnetischer Kraft, welche ein im Körper des Ringmagnetes fliefsender Strom um sich verbreiten würde. Wie die letztere, so hat daher auch die hier betrachtete elektrische Kraft ein Potential; dasselbe ist vieldeutig und abgesehen von seiner Vieldeutigkeit gleich demjenigen, welches eine elektrische Doppelschicht von gleichförmigem Moment erzeugen würde, welche rings durch den Ring des Magnetes begrenzt wäre. Das Potential des Ringmagnetes auf einen elektrischen Pol kann, abgesehen von der Vieldeutigkeit, dargestellt werden durch das Potential jener Doppelschicht auf den Pol, oder auch mit Berücksichtigung der Vieldeutigkeit durch den mit einer passenden Konstanten multiplizierten sphärischen Winkel, unter welchem der Magnet vom Pol aus gesehen erscheint.

Dieses Potential bestimmt nun sowohl die Kräfte, mit welchen der Magnet den Pol, als auch diejenigen, mit welchen der Pol den Magnet zu bewegen strebt. Haben wir nicht einen Pol, sondern ein ganzes System elektrischer Massen, so wird durch eine einfache Summation das Potential des erlöschenden Magnetes auf diese gefunden. Rühren insbesondere die elektrischen Kräfte, welche auf den Ringmagnet wirken, gar nicht von elektrischen Massen, sondern von einem zweiten erlöschenden Ringmagnet her, so ist ihre Verteilung dieselbe, als rührten sie von einer elektrischen Doppelschicht her; nach unserer Annahme von der Einheit der elektrischen Kraft findet daher auch zwischen den beiden erlöschenden Ringmagneten Wechselwirkung statt, und das Potential, welches diese Einwirkung bestimmt, ist gleich dem zweier elektrischen Doppelschichten aufeinander, deren Flächen durch die Körper der Magnete begrenzt sind. Wie man in der Elektrodynamik das Potential zweier magnetischen Doppelschichten aufeinander zurückführt auf ein über ihre Begrenzung zu nehmendes Integral, so können wir auch hier das Potential der elektrischen Schichten, d. h. der erlöschenden Magnete, in diese Form bringen. Wir finden so, dafs dieses Potential das Produkt ist aus dem Faktor A^2[1]), den in absolutem magnetischen Mafse gemessenen Erlöschungsgeschwindigkeiten der Momente der beiden Magnete pro Längeneinheit und dem Integral $\int\int (\cos\varepsilon / r)\, dl\, dl'$, in welchem dl und dl' die Elemente der Längen der beiden Magnete bedeuten, und ε der Winkel ist, unter welchem dl gegen dl' geneigt ist.

Das so bestimmte Potential ist von gleicher Form, wie dasjenige elektrischer Ströme aufeinander, es wird also auch gleiche Wirkungen bedeuten. Zwei Ringmagnete, welche dicht nebeneinander verlaufen, werden sich im Augenblicke des gleichzeitigen Erlöschens anziehen, wenn sie in gleichem Sinne magnetisiert waren, sie werden sich abstofsen, wenn ihre Polarisation entgegengerichtet war. In der üblichen[2]) Elektro-

---

[1]) A ist, wie üblich, der reziproke Wert der Lichtgeschwindigkeit. Man erhält diesen Faktor, indem man quantitativ dieselben Überlegungen ausführt, welche hier nur qualitativ angegeben sind. Man vergleiche dieserhalb Abschnitt 2, S. 301.

[2]) Unter üblicher Elektrodynamik ist hier und im Folgenden jede Elektrodynamik verstanden, welche in den aus dem Neumann'schen Potentialgesetze abgeleiteten Kräften die exakten Werte auch dann erblickt, wenn es sich um die Anziehung veränderlicher Ströme handelt. Jede solche Elektrodynamik ist eo ipso auch gegnerisch zur Maxwell'schen.

dynamik fehlt diese Wirkung. Um sie einfacher darstellen zu können, führen wir einen neuen Namen ein. Wir bezeichnen die Veränderung einer magnetischen Polarisation als einen magnetischen Strom, und zwar nehmen wir diejenige magnetische Stromdichte als Einheit an, bei welcher die in absolutem magnetischen Maſse gemessene Polarisation pro Volumeneinheit sich in der Zeiteinheit um ihre Einheit verändert. Soweit wir aus den bisher bekannten Erscheinungen der unipolaren Induktion schlieſsen können, üben magnetische Pole, welche kontinuierlich eine geschlossene Linie füllen und in dieser mechanisch fortbewegt werden, nach auſsen dieselbe elektrostatische Wirkung aus, wie ein in jener Linie gelegener und seine Polarisation passend verändernder Ringmagnet. Darf diese Beziehung als allgemeingültig betrachtet werden, so umfaſst der Name „magnetischer Strom“ überhaupt die verschiedenen Arten bewegten Magnetismus, und wir dürfen von konstanten magnetischen Strömen so gut reden wie von konstanten elektrischen. Hier soll indes jener Name nur als eine einfachere Bezeichnung für veränderliche Polarisation angesehen werden. Unser Resultat läſst sich nun in folgender Form darstellen: Magnetische Ströme wirken aufeinander nach den gleichen Gesetzen, wie elektrische Ströme; die absolute Gröſse der Wirkung zwischen den im magnetischen Maſse durch die Zahl S gemessenen magnetischen Strömen ist gleich derjenigen zwischen den im elektrischen Maſse durch die Zahl S gemessenen elektrischen Strömen. Experimentell dürfte sich dieser Satz wohl nicht mehr bewahrheiten lassen. Es dürfte allerdings noch gelingen, zu zeigen, daſs ein erlöschender Ringmagnet elektrisch geladene Körper in Bewegung setzt; auch wohl, daſs er selbst durch elektrostatische Kräfte gedreht wird, so daſs seine Ebene sich senkrecht zur Richtung der Kraft stellt; aber auch bei sehr starken elektrostatischen Kräften werden diese Wirkungen an der Grenze der Beobachtung liegen, und so ist keine Hoffnung vorhanden, daſs man einen erlöschenden Ringmagnet sich richten sehen wird unter den schwachen Kräften, welche ein anderer erlöschender Magnet hervorruft.

Unsere Prämissen erlauben uns indessen, noch weitergehende Schlüsse zu ziehen. Man weiſs, daſs aus der Kenntnis des elektrodynamischen Potentiales zweier elektrischen Ströme aufeinander und aus dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft das Vorhandensein und die absolute Gröfse der Induktionswirkung erschlossen werden kann. Gleiche Schlüsse lassen sich nun auch auf magnetische Strombahnen (Ringe weichen Eisens) anwenden. Um in einer solchen Bahn einen magnetischen Strom, den man sich alternierend denken kann, zu unterhalten, ist ein bestimmter Verbrauch von Arbeit notwendig. Wäre die Gröfse dieser Arbeit unabhängig davon, ob der Magnet, jeder elektrischen Wirkung entzogen, ruht, oder ob er, im elektrischen Felde bewegt, Arbeit leistet, so wäre nichts einfacher, als die unendliche Gewinnung von Arbeit aus dieser Bewegung. Es kann also eine solche Unabhängigkeit nicht stattfinden, vielmehr mufs die Arbeit, und also die magnetische (magnetomotorische) Kraft, welche jenen Strom von gegebener Intensität unterhält, abhängig sein von der Art und Geschwindigkeit der Bewegung der Strombahn und von der Veränderlichkeit des elektrischen Feldes. Man kann dies so auffassen, als addiere sich zu den aus anderer Quelle stammenden magnetischen Kräften eine durch die Bewegung und die Veränderlichkeit des Feldes veranlafste, welche wir als induzierte bezeichnen. Ihre Gröfse ist uns dann gegeben durch die Bedingung, dafs für jede beliebige Verrückung der Strombahn die durch die Verrückung zu gewinnende äufsere Arbeit kompensiert werde durch einen gleichen infolge der Verrückung notwendig aufzuwendenden Mehrbetrag an Arbeit im Inneren der Strombahn. Dieser Gedankengang unterscheidet sich der Form nach in nichts von demjenigen, durch welchen man die Induktionserscheinungen in elektrischen Strombahnen erschliefst, und da auch die Kräfte zwischen magnetischen Strömen der Form nach mit denjenigen zwischen elektrischen Strömen übereinstimmen, so mufs das Endresultat in beiden Gebieten formell das gleiche sein. Wir brauchen nur in den Gesetzen der elektrischen Induktion konsequent die Namen „elektrisch" und „magnetisch" zu vertauschen, um zu den hier gesuchten Induktionswirkungen magnetischer Stromkreise zu gelangen. Wir erfahren so, dafs ein ebener magnetischer Stromkreis, ein ebener Ring weichen Eisens, dessen Ebene senkrecht steht zur Kraftrichtung eines elektrischen Feldes, von einer magnetisierenden Kraft durchzuckt wird im Augenblicke, in welchem das Feld seine Intensität verliert, und dafs derselbe Ring in alternierendem Sinne polarisiert wird, sobald wir beginnen, ihn um eine Axe zu drehen, die senkrecht steht zur Richtung der elektrischen Kraft. Es erscheint die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs derartige Wirkungen der Beobachtung zugänglich werden. Es mufs aber auch ein Ringmagnet, dessen Polarisation die Richtung beständig ändert, in allen benachbarten Eisenringen wechselnde Polarisationen durch Induktion hervorrufen, und diese Wirkung ist allerdings zu klein, um einen wahrnehmbaren Wert erreichen zu können.

2. Man könnte glauben, dafs sich die hier aus allgemein angenommenen Prämissen abgeleiteten Wirkungen friedlich in das übliche System der Elektrodynamik einfügen liefsen. Dies ist jedoch nicht der Fall. In der That, denken wir uns an Stelle der bisher betrachteten Ringmagnete in sich zurücklaufende elektrische Solenoide gesetzt, in welchen die Stromstärke veränderlich ist, so sind ja die von diesen Solenoiden ausgehenden induzierten elektrischen Kräfte ganz analog denjenigen, welche die veränderlichen Ringmagnete ausübten. Aus den letzteren Kräften schlossen wir auf magnetodynamische Anziehungen, auf eine entsprechende elektrodynamische Anziehung müssen wir daher auch schliefsen für die veränderlichen Solenoide. Aber solange der Strom konstant in ihnen fliefst, findet keine Wirkung statt. Es mufs also im allgemeinen die elektrodynamische Anziehung zwischen Strömen abhängen von ihrer Veränderung, nicht nur von den augenblicklichen Stromstärken selbst. Diese Behauptung steht im Gegensatze zu einer in der üblichen Elektrodynamik allgemein acceptierten Annahme.[1]) Die Korrektur, welche wir an den Gesetzen der magetischen Wirkung konstanter Ströme anzubringen haben, um sie auf Ströme von veränderlicher Intensität auszudehnen, wird sich auf Grund unserer Prämissen berechnen lassen. Aber diese Korrektur wird nun auf Grund des Prinzips der Erhaltung der Kraft eine Korrektur auch in den induzierten elektrischen Kräften verlangen. Diese wird eine

[1]) Vgl. v. Helmholtz, Über die Theorie der Elektrodynamik, dritte Abhandlung. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 1, S. 729.

neue in den magnetischen Kräften fordern, und so fort, so dafs wir eine unendliche Reihe successiver Verbesserungen erhalten. Wir wollen diese einzelnen Glieder nun auch quantitativ berechnen. Wir nehmen an, dafs sie sich zur Gesamtwirkung einfach addieren, und dafs, wenn nur die unendlichen Summen gegen feste Werte konvergieren, dann diese Werte die wirklich der Natur entsprechenden sind. Wir bedienen uns in der Rechnung der folgenden besonderen Bezeichnung: Es soll $\overline{u}$ eine Funktion U bedeuten, für welche im ganzen unendlichen Raume $\Delta U = -4\pi u$ ist, also allgemein:

$$U = \overline{u} = \int \frac{u}{r}\, d\tau \quad ,$$

das Integral über den unendlichen Raum erstreckt.

Was zunächst die elektrischen Ströme anlangt, so seien u, v, w die Komponenten derselben. Da wir nur geschlossene Ströme in Betracht ziehen, so mufs sein:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad .$$

Sei ferner $U_1 = \overline{u}$, $V_1 = \overline{v}$, $W_1 = \overline{w}$. Dann sind die Komponenten $L_1\ M_1\ N_1$ der von den Strömen ausgeübten magnetischen Kraft zufolge der üblichen Elektrodynamik gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_1 &= A\left(\frac{dV_1}{dz} - \frac{dW_1}{dy}\right) , \\ 1)\qquad M_1 &= A\left(\frac{dW_1}{dx} - \frac{dU_1}{dz}\right) , \qquad \frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = 0 \quad . \\ N_1 &= A\left(\frac{dU_1}{dy} - \frac{dV_1}{dx}\right) , \end{aligned}$$

Aus dem Vorhandensein dieser Kräfte läfst sich nach dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft folgern, und ist gefolgert worden, dafs bei Änderungen von $u\ v\ w$ elektrische Kräfte auftreten, deren Komponenten $X_1\ Y_1\ Z_1$ sind:

$$2)\qquad X_1 = -A^2\frac{dU_1}{dt} , \qquad Y_1 = -A^2\frac{dV_1}{dt} , \qquad Z_1 = -A^2\frac{dW_1}{dt} .$$

Die Ausdrücke für diese Kräfte gelten ebensowohl für das

Innere der Leiter, in welchen die Ströme u v w fliefsen, als für den äufseren Raum. Die Kräfte (2) sind aus den Kräften (1) gefolgert unter der Voraussetzung, dafs letztere von elektrischen Strömen herrühren. Aber auf Grund unserer Prämissen dürfen wir behaupten, dafs wenn auch die Kräfte (1) in einem beliebigen Systeme veränderlicher Ströme und veränderlicher Magnete ihren Ursprung haben, dafs darum nicht minder ihre Veränderung begleitet sein mufs von dem Auftreten der Kräfte (2). Es sei A das beliebige System, welches Kräfte der Form (1) hervorruft. Wir superponieren ihm ein anderes B, welches nur aus elektrischen Strömen besteht und doch die von A ausgeübten Kräfte überall aufhebt. Ein solches System ist möglich, wir haben ja nur als Stromkomponenten u, v, w überall zu setzen $4\pi u = \Delta U_1$, $4\pi v = \Delta V_1$, $4\pi w = \Delta W_1$. Bewegen wir nun elektrische Ströme unter dem Einflusse beider Systeme A und B zusammen, so ist mit dieser Bewegung keine Arbeitsleistung verbunden. Daher kann auch die zur Unterhaltung der Ströme erforderliche elektromotorische Kraft nicht abhängig sein von der Bewegung, also ist die induzierte elektromotorische Kraft Null. Aber das System B für sich übt Induktionswirkung aus, und es mufs also das System A ebenfalls Wirkungen ausüben, die jenen von B entgegengesetzt gleich sind, die also gleich sind denen eines rein elektrischen Systemes, welches gleiche magnetische Kräfte wie A ausübt. Was für die Induktionswirkungen durch Bewegung gilt, mufs auch für diejenigen durch Intensitätsänderungen gelten, beide sind nach dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft in einfachster Weise durch einander bestimmt. Also können wir unmittelbar aus dem Vorhandensein magnetischer Kräfte von der Form (1) schliefsen auf das Auftreten elektrischer Kräfte von der Form (2), gleichgültig welches der Ursprung jener magnetischen Kräfte sei.

Richten wir nun unser Augenmerk auf magnetische Ströme. Seien λ, μ, ν die Komponenten der magnetischen Polarisation im ganzen Raume, sei:

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} = 0 \quad \text{und} \quad \Lambda = \lambda, \; M = \mu, \; N = \nu \quad .$$

Diese Gröfsen sollen in absolutem magnetischen Mafse gemessen sein. Es ist dann, wie aus den Kräften (1) nach dem Prinzipe der Erhaltung der Kraft abgeleitet wird, und wie auch in der Elektrodynamik allgemein angenommen wird, die bei Veränderungen von λ, μ, ν auftretende elektrische Kraft gegeben durch die Komponenten:

$$X_1 = A\frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) , \quad Y_1 = A\frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dN}{dx}\right) ,$$

$$Z_1 = A\frac{d}{dt}\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dA}{dy}\right) .^{1)}$$

Wir setzen nun mit Einführung unserer Bezeichnungsweise:

$$p = \frac{d\lambda}{dt} , \quad q = \frac{d\mu}{dt} , \quad r = \frac{d\nu}{dt} ,$$

und nennen p, q, r die Komponenten der magnetischen Strömung. Wir machen ferner $P_1 = \bar{p}$, $Q_1 = \bar{q}$, $R_1 = \bar{r}$ und bezeichnen P_1, Q_1, R_1 als die Komponenten des Vektorpotentiales dieser Strömung. Es werden alsdann die von der magnetischen Strömung hervorgerufenen elektrischen Kräfte:

$$\begin{aligned} X_1 &= A\left(\frac{dR_1}{dy} - \frac{dQ_1}{dz}\right) , \\ Y_1 &= A\left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dR_1}{dx}\right) , \quad \frac{dP_1}{dx} + \frac{dQ_1}{dy} + \frac{dR_1}{dz} = 0 . \\ Z_1 &= A\left(\frac{dQ_1}{dx} - \frac{dP_1}{dy}\right) , \end{aligned} \tag{3}$$

Dieselben Überlegungen, welche uns aus den Kräften (1) erschliefsen lassen, dafs das Potential der elektrischen Stromsysteme u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 aufeinander die Form

$$A^2 \iint \frac{1}{r}(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)\, d\tau_1 d\tau_2$$

habe, führen uns bei Anwendung auf die Kräfte (3) zu dem Schlusse, dafs die magnetischen Stromsysteme p_1, q_1, r_1 und p_2, q_2, r_2 aufeinander das Potential

$$A^2 \iint \frac{1}{r}(p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

1) Vgl. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 1, S. 619.

besitzen. Dieselben Überlegungen, welche uns aus jenem Potentiale elektrischer Ströme die induzierten Kräfte (2) folgern liefsen, lassen uns aus diesem Potentiale magnetischer Ströme schliefsen auf induzierte magnetische Kräfte von der Form:

$$L_1 = -A^2 \frac{dP_1}{dt}, \quad M_1 = -A^2 \frac{dQ_1}{dt}, \quad N_1 = -A^2 \frac{dR_1}{dt}. \qquad 4)$$

Auch hier dürfen wir behaupten, dafs diese Kräfte ebensowohl im Inneren der magnetischen Körper auftreten werden, als im äufseren Raum, auch hier können wir uns überzeugen, dafs wir den Zusammenhang der Kräfte (3) und (4) nicht wohl beschränken dürfen auf den Fall, dafs die Kräfte (3) nur von magnetischen Strömen ausgehen, sondern dafs wir aussagen müssen: Sobald ein System von Strömen oder Magneten Anlafs giebt zu elektrischen Kräften der Form (3), sobald wird die Veränderung dieses Systemes Anlafs geben zu magnetischen Kräften der Form (4).

Soweit haben wir nur die Resultate des vorigen Abschnittes in präziserer Form wiederholt. Wir gehen nun weiter, indem wir schliefsen: Ein System veränderlicher Ströme übt elektrische Kräfte aus von der Form (2). Dieselben lassen sich darstellen in der Form (3). Sind sie also nicht konstant, so werden sie Anlafs geben zu magnetischen Kräften der Form (4). Diese werden als Korrektionsglied zu den bekannten magnetischen Kräften der Form (1) hinzuzufügen sein. Um nun die Darstellung der Kräfte (2) in der Form (3) zu erhalten, setzen wir:

$$-A^2 \frac{dU_1}{dt} = A\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right),$$

$$-A^2 \frac{dV_1}{dt} = A\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right),$$

$$-A^2 \frac{dW_1}{dt} = A\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right).$$

Indem wir die Gleichung:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0, \qquad \alpha)$$

vorläufig annehmen, erhalten wir durch Differentiation der zweiten Gleichung nach z, der dritten nach y und Subtraktion der dritten von der zweiten:

$$-A\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_1}{dz}-\frac{dW_1}{dy}\right)=\varDelta P \text{, und hieraus:}$$

$$P=\frac{1}{4\pi}A\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dz}\overline{V}_1-\frac{d}{dy}\overline{W}_1\right).$$

Entsprechende Ausdrücke werden für Q und R erhalten. Man überzeugt sich leicht, dafs sie der Gleichung α) genügen, so dafs die vorläufige Annahme der letzteren erlaubt war. Aus den Werten P, Q, R ergeben sich die bei ihren Änderungen auftretenden magnetischen Kräfte, die in Richtung der x auftretende wird:

$$-A^2\frac{dP}{dt}=-\frac{1}{4\pi}A^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d}{dz}\overline{V}_1-\frac{d}{dy}\overline{W}_1\right).$$

Dieses Glied haben wir zu der vorher angenommenen Kraftkomponente L_1 hinzuzuaddieren; nennen wir die korrigierte Komponente L_2 und bilden ebenso die korrigierten Komponenten M_2 und N_2, so lassen diese Kräfte sich darstellen durch das System:

$$L_2=A\left(\frac{dV_2}{dz}-\frac{dW_2}{dy}\right),$$

$$5)\qquad M_2=A\left(\frac{dW_2}{dx}-\frac{dU_2}{dz}\right),\qquad \frac{dU_2}{dx}+\frac{dV_2}{dy}+\frac{dW_2}{dz}=0,$$

$$N_2=A\left(\frac{dU_2}{dy}-\frac{dV_2}{dx}\right),$$

worin jetzt gesetzt ist:

$$U_2=U_1-\frac{1}{4\pi}A^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{U}_1,\qquad V_2=V_1-\frac{1}{4\pi}A^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{V}_1,$$

$$W_2=W_1-\frac{1}{4\pi}A^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{W}_1.$$

Nach dem vorher Ausgeführten werden wir unmittelbar schliefsen dürfen, dafs die elektromotorischen Kräfte, welche bei Veränderung des Stromsystemes auftreten, auch nicht mehr exakt die Form (2) haben, dafs vielmehr ihre korrigierten Werte sein werden:

$$X_2 = -A^2 \frac{dU_2}{dt}, \quad Y_2 = -A^2 \frac{dV_2}{dt}, \quad Z_2 = -A^2 \frac{dW_2}{dt}. \qquad 6)$$

Ganz gleiche Schlüsse werden uns nun zwingen, die durch die Gleichungen 3) und 4) dargestellten Wirkungen magnetischer Ströme zu verbessern. Die Resultate mögen andeutungsweise dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$X_2 = A\left(\frac{dR_2}{dy} - \frac{dQ_2}{dz}\right), \text{ u. s. w.,} \qquad 7)$$

$$L_2 = -A^2 \frac{dP_2}{dt}, \text{ u. s. w., worin:} \qquad 8)$$

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{4\pi} A^2 \frac{d^2}{dt^2} \overline{P}_1, \text{ u. s. w. ist.}$$

Wenn man die Kräfte, durch welche sich die verbesserten Werte der Gleichungen 5) und 7) unterscheiden von den gewöhnlich angenommenen Werten (1) und (3), in der Natur getrennt von diesen darzustellen wünscht, so hat man nur nötig, ein solches System elektrischer oder magnetischer Ströme zu bilden, dafs die Kräfte (1), resp. (3) in demselben fortfallen. Ein jedes in sich selbst zurücklaufende elektrische oder magnetische Solenoid bietet ein Beispiel dar.

Man erkennt unmittelbar, dafs wir bei dem gewonnenen Resultate nicht als bei dem endgültigen kann stehen bleiben. In der That erschlossen wir ja die Kräfte (5) mit Hilfe der Kräfte (2); nun haben sich die Kräfte (2) als ungenau erwiesen und den Kräften (6) Platz gemacht, wir müssen daher unseren Schlufs mit diesen Kräften wiederholen. Das Resultat ist leicht zu überblicken; wir erhalten es, wenn wir überall den Index 2 mit dem Index 3 vertauschen und setzen:

$$U_3 = U_1 - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\overline{U}_2 = U_1 - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\overline{U}_1 + \frac{A^4}{16\pi^4}\frac{d^4}{dt^4}\overline{\overline{U}}_1$$

und entsprechend für die übrigen Komponenten der Vektorpotentiale. Auch die hier in den magnetischen Kräften elektrischer Ströme und den elektrischen Kräften magnetischer

Ströme neu auftretenden und mit dem Faktor A^5 behafteten Glieder lassen sich von den Gliedern niederer Ordnung getrennt zur Wahrnehmung bringen. Wir haben nur nötig, ein gewöhnliches elektrisches oder magnetisches Solenoid, ein Solenoid erster Ordnung, wie wir sagen können, selbst wieder zu einem Solenoid, einem Solenoid zweiter Ordnung zusammenzurollen, um ein System zu erhalten, in welchem die hier berechneten Kräfte die gröfsten überhaupt auftretenden sind. Aus der Betrachtung solcher Solenoide kann man die Existenz der einzelnen Glieder nachweisen, unabhängig davon, ob man anerkennt oder nicht, dafs dieselben sich zum Gesamtresultate durch einfache Addition zusammenfügen.

Unsere Schlufsfolgerung gestattet uns nun nirgends stillzustehen, sondern sie bringt zu den vorhandenen in gleicher Weise stets neue und neue Glieder hinzu und führt so auf eine unendliche Reihe. Das Endresultat darzustellen, nennen wir L, M, N, X, Y, Z die vollständig korrigierten Kräfte und erhalten:

$$9)\quad \begin{cases} L = A\left(\dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy}\right), \\ M = A\left(\dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz}\right), \\ N = A\left(\dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx}\right), \end{cases} \qquad 10)\quad \begin{cases} X = -A^2\dfrac{dU}{dt}, \\ Y = -A^2\dfrac{dV}{dt}, \\ Z = -A^2\dfrac{dW}{dt}, \end{cases}$$

worin jetzt $U V W$ sind:

$$U = u - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\bar{u} + \frac{A^4}{16\pi^2}\frac{d^4}{dt^4}\bar{\bar{u}} - \cdots\cdots$$

$$V = \bar{v} - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\bar{v} + \frac{A^4}{16\pi^2}\frac{d^4}{dt^4}\bar{v} - \cdots\cdots$$

$$W = \bar{w} - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}w + \frac{A^4}{16\pi^2}\frac{d^4}{dt^4}w - \cdots\cdots$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0 \ .$$

Die entsprechenden Gleichungen gelten für magnetische Ströme. Konvergieren die Reihen, so haben wir keinen Grund zu zweifeln, dafs sie uns die wahren Werte geben. Im allgemeinen aber werden sie konvergieren. Beachten wir etwa dasjenige Element des Integrales U, welches von der Strömung u in einem bestimmten Raumelemente herrührt. Zerlegen wir diese Strömung als Funktion der Zeit nach Kreisfunktionen, und sei $u_0 \sin nt$ derjenige Teil dieser Zerlegung, welcher den Faktor $\sin nt$ enthält. Dann wird dasjenige Element von U, welches von diesem Theile herrührt, gegeben durch die Gleichung:

$$dU = d\tau \frac{u_0 \sin nt}{r} \left(1 - \frac{1}{1.2} \frac{A^2}{4\pi} n^2 r^2 + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{A^4}{16\pi^2} n^4 r^4 - \cdots\right) .$$

Diese Reihe aber konvergiert gegen einen leicht angebbaren Grenzwert. Sind n und r nicht sehr grofs, so wird sogar jedes Glied gegen das Vorhergehende von den ersten Gliedern an verschwindend klein sein. Es wird also auch das Integral über die Elemente von U einen bestimmten Wert haben, und da das gleiche für V, W, P, Q und R gilt, so dürfen wir erwarten, in den Gleichungen 9), 10) und den entsprechenden für die magnetischen Ströme ein mit allen unseren Forderungen in Einklang befindliches System von Kräften gefunden zu haben.

3. Es fällt nun in die Augen, dafs sich dies System in einfacherer Weise, als es durch die Gleichungen 9) und 10) geschieht, darstellen, oder wie der terminus technicus lautet, beschreiben läfst. Zufolge jener Gleichungen haben wir:

$$\Delta U = -4\pi u + A^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u} - \cdots\cdots$$

und

$$A^2 \frac{d^2 U}{dt^2} = A^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u} - \cdots\cdots ,$$

also $\Delta U - A^2 d^2 U / dt^2 = -4\pi u$. Den analogen Differentialgleichungen genügen die übrigen Komponenten der Vektorpotentiale, sowohl der elektrischen als der magnetischen Ströme. Da im leeren Raume u, v, w, p, q, r gleich Null sind, so ist hier die Verbreitung dieser Potentiale gegeben durch die Gleichungen:

$$\Delta U - A^2 \frac{d^2 U}{dt^2} = 0\,, \qquad \Delta P - A^2 \frac{d^2 P}{dt^2} = 0\,,$$

$$\Delta V - A^2 \frac{d^2 V}{dt^2} = 0\,, \qquad \Delta Q - A^2 \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0\,,$$

$$11)\qquad \Delta W - A^2 \frac{d^2 W}{dt^2} = 0\,, \qquad \Delta R - A^2 \frac{d^2 R}{dt^2} = 0\,,$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0\,, \qquad \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0\,.$$

Es stellen sich demnach jetzt die Vektorpotentiale als Gröſsen dar, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit — der Lichtgeschwindigkeit — ausbreiten, und zwar nach den gleichen Gesetzen, wie die Schwingungen des Lichtes und der strahlenden Wärme. Gleiche, resp. ganz ähnliche Gesetze für die Ausbreitung der Potentiale haben im Jahre 1858 Riemann und im Jahre 1867 Lorenz angenommen, in dem Wunsche, die optischen und elektrischen Erscheinungen unter gemeinsamen Gesichtspunkten zu vereinigen. Daſs durch diese Gesetze den geltenden Kräften der Elektrodynamik neue Glieder hinzugefügt wurden, entschuldigten diese Forscher damit, daſs diese Glieder zu klein seien, als daſs sie sich in den Experimenten hätten bemerkbar machen können. Wir sehen aber, daſs die Hinzufügung dieser Glieder weit entfernt ist, einer Entschuldigung zu bedürfen, daſs sie viel eher geboten ist, und daſs das Fehlen dieser Glieder die Verletzung ganz allgemein angenommener Prinzipien involvieren müſste.

Die Vektorpotentiale elektrischer und magnetischer Ströme traten bisher als etwas Verschiedenes auf und aus ihnen leiteten sich die elektrischen und magnetischen Kräfte in asymmetrischer Weise ab. Dieser Gegensatz zwischen beiden Arten von Kräften verschwindet, sobald wir versuchen, die Ausbreitung dieser Kräfte selbst zu bestimmen, d. h. sobald wir die Vektorpotentiale aus den Gleichungen eliminieren. Das kann einmal geschehen, indem man die Gleichungen 9) nach t differenziert, und die Differentialquotienten von UVW nach t mit Hilfe der Gleichungen 10) entfernt, zweitens kann es geschehen, indem man die Gleichungen 10) nach t differenziert, sich erinnert, daſs z. B.:

$$A^2 \frac{d^2U}{dt^2} = \varDelta U = \frac{d}{dy}\left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right)$$

ist, und nun die in Klammern stehenden Kombinationen der UVW mittels der Gleichungen 9) fortschafft. Auf diese Weise erhält man sechs Gleichungen, welche die L, M, N, X, Y, Z im leeren Raume miteinander verknüpfen, nämlich die folgenden:

$$\begin{aligned}
A\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\,, & A\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\,,\\
A\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\,, & A\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}\,,\\
A\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\,, & A\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Dieselben Gleichungen verknüpfen auch diejenigen Kräfte, welche von magnetischen Strömen erzeugt werden, denn sie werden ebensowohl durch Elimination der P, Q, R als der U, V, W erhalten. Sie verknüpfen daher die magnetischen und elektrischen Kräfte im leeren Raume überhaupt, unabhängig vom Ursprunge der letzteren. Die magnetischen und elektrischen Kräfte sind jetzt miteinander vertauschbar. Eliminiert man einmal die einen, das anderemal die anderen, so erhält man das folgende System, welches indessen das System 12) nicht völlig ersetzt:

$$\begin{aligned}
\varDelta L - A^2\frac{d^2L}{dt^2} &= 0\,, & \varDelta X - A^2\frac{d^2X}{dt^2} &= 0\,,\\
\varDelta M - A^2\frac{d^2M}{dt^2} &= 0\,, & \varDelta Y - A^2\frac{d^2Y}{dt^2} &= 0\,,\\
\varDelta N - A^2\frac{d^2N}{dt^2} &= 0\,, & \varDelta Z - A^2\frac{d^2Z}{dt^2} &= 0\,,\\
\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} &= 0\,, & \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Das durch die Gleichungen 12) und 13) gelieferte System von Kräften ist nun kein anderes als das von Maxwell angegebene. Maxwell gelangte zu demselben, indem er den Äther als ein Dielektrikum ansah, dessen Polarisation bei ihrer

Veränderung die Wirkungen elektrischer Ströme ausübt. Wir sind zu demselben gelangt auf Grund anderer, auch von den Gegnern jener Faraday-Maxwell'schen Anschauung im allgemeinen anerkannter Prämissen. Die Gleichungen 12) und 13) erscheinen uns als eine notwendige Vervollständigung der gewöhnlich als exakt angesehenen Gleichungen 1), 2) und 3). Die Faraday-Maxwell'sche Anschauung giebt von unserem Standpunkte aus nicht die Begründung, wohl aber die einfachste Deutung des Gleichungssystemes 12) und 13). In Maxwell's Theorie beziehen sich die Gleichungen 12) und 13) nicht allein auf den leeren Raum, sondern ebenso gut auf jedes andere Dielektrikum. Auch von unseren Prämissen ausgehend, können wir diese Gesetze als in jedem homogenen Medium geltend ableiten. Als erfahrungsmäfsig feststehend müssen wir die Thatsache annehmen, dafs die magnetischen Kräfte, welche ein in das homogene Medium eingesenktes Stromsystem umgeben, dieselbe durch die Gleichungen 1) gegebene Verteilung besitzen, wie im leeren Raume. Wir haben uns daher nur die Leiter und Eisenmassen, welche wir zu unseren Überlegungen benutzen, vollständig in das betreffende Medium eingetaucht zu denken, wir haben in diesem Medium die Einheit der Elektricität und des Magnetismus durch dieselben Worte zu definieren, durch welche dies sonst für den leeren Raum geschieht, wir haben alsdann die Konstante A zu bestimmen, welche uns die absolute Gröfse der magnetischen Kraft giebt, die der in dem neuen elektrostatischen Mafse gemessene Strom Eins zur Folge hat — alle weiteren Kräfte ergeben sich als Folgerungen aus der angenommenen Erfahrungsthatsache und den allgemeinen Prämissen, und da sämtliche Schlüsse die gleichen sind, wie für den leeren Raum, so ist auch das Endresultat das gleiche. Die Konstante A allerdings wird einen anderen Wert annehmen, als im leeren Raume, und einen verschiedenen für verschiedene Medien. Ihr reciproker Wert ist allemal die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer und magnetischer Änderungen. Sie ist eine innere Konstante, aber auch die einzige innere elektrodynamische Konstante des Mediums; die beiden Konstanten, aus welchen man sie gewöhnlich zusammensetzt, nämlich die Dielektricitäts- und die Magnetisierungskonstante sind im Gegensatze zu ihr als äufsere Konstanten zu bezeichnen; nicht allein die Messung, sondern auch die Definition der letzteren ist unmöglich, sobald nicht mindestens zwei Medien (von denen das eine der leere Raum sein kann) gegeben sind.

Ich habe im Vorhergehenden versucht, die Gültigkeit der MAXWELL'schen Gleichungen nachzuweisen auf Grund von Prämissen, welche auch von der gegnerischen Elektrodynamik zugegeben werden und unter Benutzung von Schlufsreihen, welche dieser Elektrodynamik geläufig sind. Ich habe mich deshalb in der Anschauungsweise dieser Elektrodynamik bewegt; keineswegs soll die gegebene Ableitung aufserhalb dieses Zusammenhanges als exakter Beweis dafür ausgegeben werden, dafs das MAXWELL'sche System das einzig mögliche sei. Ein solcher Beweis allein aus unseren Prämissen erscheint selbst unmöglich; das Genaue kann aus dem Ungenauen wohl als das von gewissem Standpunkte aus Nächstliegende, nicht aber als etwas Notwendiges abgeleitet werden.[1]) Soviel scheint mir indes aus dem Vorhergehenden ohne Einwand zu folgern erlaubt: Wenn nur die Wahl vorliegt zwischen dem gewöhnlichen Systeme der Elektrodynamik und dem MAXWELL'schen, so gebührt dem letzteren unbedingt der Vorzug. Die Begründung ist diese:

1) Das auf unvermittelte Fernwirkung gegründete System der elektrodynamischen Wirkung geschlossener Ströme in seinem gegenwärtigen Zustande ist sicherlich unvollständig. Entweder es mufs mehrere verschiedene Arten elektrischer

---

[1]) Den Punkt, an welchem im Vorhergehenden nur das Nächstliegende, nicht das Notwendige abgeleitet wurde, bildete offenbar jedesmal die Art, in welcher aus dem Prinzipe der Erhaltung der Kraft gefolgert wurde. Diese Art ist die nächstliegende vom Standpunkte der üblichen Elektrodynamik aus, denn sie entspricht genau dem anerkannten Schlusse, mittels dessen v. HELMHOLTZ 1847 und Sir W. THOMSON 1848 die Induktion aus der elektrodynamischen Wirkung folgerten. Aber sie ist vielleicht nicht die einzig mögliche, denn ebenso wie jenem Schlusse liegen auch ihr neben dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft noch stillschweigende Voraussetzungen zu Grunde. Auch jener Schlufs könnte nicht gezogen werden, wollte man die Möglichkeit zulassen, dafs die Bewegung der Metalle im magnetischen Felde an sich Wärme erzeugen könnte, dafs der Widerstand der Leitungen abhängen könnte von jener Bewegung, und dergleichen mehr.

Kraft einführen, was es nie gethan hat —, oder es mufs das Vorhandensein von Wirkungen zugeben, welche ihm bisher fehlen. Das MAXWELL'sche System trägt nicht in gleicher Weise in sich den Beweis seiner Unvollständigkeit.

2) Sucht man das übliche System der Elektrodynamik zu vervollständigen, so kommt man unter allen Umständen zu sehr verwickelten und schwer zu handhabenden Gesetzen. Und entweder man weigert sich, die gehäuften Schlüsse des Abschnittes 2 anzuerkennen — dann endet man mit einer unfruchtbaren Inkompetenzerklärung —, oder man erkennt dieselben, wie es vom Standpunkte des Systemes aus billig erscheint, als bündig an, so gelangt man zu Kräften, welche der Sache nach übereinstimmen mit den vom MAXWELL'schen Systeme geforderten. Aber das letztere bietet dann eine ungleich einfachere Darstellungsweise dieses Resultates.

3) Die Bedenken, welche man gegen die weitergehenden Schlüsse des Abschnittes 2 etwa erheben kann, treffen nicht die im Abschnitte 1 besonders dargestellte Schlufsfolge, welche uns die Anziehung zwischen magnetischen Strömen lehrte. Diese letztere hängt direkt ab von den Prämissen, sie fällt nur zugleich mit diesen, aber sie reicht aus, dem MAXWELL'schen Systeme das Übergewicht zu verleihen, denn sie ist angezeigt in diesem Systeme, sie ist unbekannt in der gegnerischen Elektrodynamik.
