Gesammelte Werke

Schriften vermischten Inhalts

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1987

16. Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten

16. Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 22, S. 449—455, 1884.

Auf einer unendlich ausgedehnten schweren Flüssigkeit, z. B. auf einer Wasserfläche, schwimme eine ebenfalls unendlich ausgedehnte elastische Platte, z. B. von Eis; auf der letzteren mögen eine Reihe von Gewichten ruhen, ohne dafs eine seitliche Spannung stattfindet, es wird die Gleichgewichtslage der Platte gesucht. Die Lösung dieser Aufgabe führt zu gewissen paradoxen Resultaten, um derentwillen sie mitgeteilt werden möge.

Beschränken wir uns auf kleine Verschiebungen, so superponieren sich die Wirkungen der Gewichte, und es genügt, wenn wir ein einzelnes Gewicht P in Betracht ziehen. Wir denken uns dasselbe wirkend im Nullpunkte des Koordinatensystemes der xy, deren Ebene mit der als unendlich dünn angesehenen Platte zusammenfallen möge. Wir setzen ferner $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = \Delta$, $x^2+y^2 = \varrho^2$, bezeichnen mit E und μ in üblicher Weise die elastischen Konstanten des Materiales der Platte, mit h ihre Dicke und nennen s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit. Ist dann noch z die vertikale Abweichung der deformierten Platte von der xy Ebene, positiv gerechnet nach unten, so ist einerseits $(Eh^3/12(1-\mu^2))\,\Delta\Delta z$ gleich dem von den elastischen Kräften auf die Flächeneinheit nach oben hin ausgeübten Schube,[1] andererseits ist der ebenfalls nach oben gerichtete hydrostatische Auftrieb per Flächeneinheit gleich sz. Die Summe beider Kräfte mufs Null sein überall aufser im Nullpunkte. Hier mufs der Integralwert der Summe

[1]) Siehe Clebsch, Theorie der Elasticität, 1862. § 73.

genommen über eine sehr kleine Fläche gleich sein dem Gewichte P. Da aber der Integralwert des hydrostatischen Druckes über eine solche Fläche verschwindet, so mufs schon der Integralwert der elastischen Reaktion für sich dieser Bedingung genügen. Setzen wir nun noch zur Abkürzung:

$$\frac{12(1-\mu^2)s}{Eh^3} = a^4 = 1/\alpha^4 \quad ,$$

so formuliert sich demnach unsere Aufgabe mathematisch dahin: Es ist ein Integral der Gleichung $\Delta\Delta z + a^4 z = 0$ zu finden, von solcher Beschaffenheit, dafs es verschwinde im Unendlichen, endlich sei im Mittelpunkte, und dafs das über die Nachbarschaft des Mittelpunktes ausgedehnte Integral $s\alpha^4 \int \Delta\Delta z dw$ gleich P werde.

Wir setzen mit Heine[1]):

$$K(\varrho) = \int_0^\infty e^{i\varrho \cos iu}\, du \quad ,$$

dann ist $K(\varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta z = -z$, daher ist $K(\varrho\sqrt[4]{-a^4})$ eine Lösung der uns vorgelegten Gleichung. Es ist demnach auch:

$$z = \frac{a^2 P}{4\pi s i}\left\{K\left[a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i)\right] - K\left[a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1-i)\right]\right\} \quad , \qquad 1)$$

eine Lösung dieser Gleichung. Dieselbe ist reell, bringt man sie auch in reelle Form, so erhält man nach einer Umformung des Integrales:

$$z = \frac{a^2 P}{4\pi s}\int_1^\infty \frac{e^{-a\varrho\sqrt{1/2}\,v} \sin a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, v\, dv}{\sqrt{v^2-1}} \quad , \qquad 2)$$

welche Form zeigt, dafs die angenommene Lösung im Unendlichen verschwindet. Um ihre Werte in der Nähe des Nullpunktes zu untersuchen, benutzt man eine von Hrn. H. Weber angegebene Entwickelung[2]) der Funktion K, zunächst nach

[1]) Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 1. S. 192, 1878.

[2]) Daselbst, S. 244. Bei der Angabe des Wertes von C findet sich hier ein irrtümliches Vorzeichen.

Bessel'schen Funktionen, dann weiter nach Potenzen, und erhält so:

$$z = \frac{a^2P}{2\pi s}\Big\{\frac{a^2\varrho^2}{2.2}\log a\varrho - \frac{a^6\varrho^6}{2.4.6.2.4.6}(\log a\varrho - \tfrac{5}{6}) + \ldots.$$

$$3)\qquad + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{a^4\varrho^4}{2.4.2.4} + \frac{a^8\varrho^8}{2.4.6.8.2.4.6.8} - \ldots\right)$$

$$-(1+\log 2 - C)\left(\frac{a^2\varrho^2}{2.2} - \frac{a^6\varrho^6}{2.4.6.2.4.6} + \ldots\right)\Big\} \;.$$

C ist gleich 0,57721. Die Reihen sind so geordnet, dafs jede Horizontalreihe für sich ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung darstellt. Es ist aus dieser Form ersichtlich, dafs z endlich bleibt für $\varrho = 0$, ferner wird das über eine kleine Kreisfläche um den Mittelpunkt erstreckte Integral:

$$\int \varDelta\varDelta z dw = 2\pi \int \varrho \varDelta\varDelta z d\varrho = 2\pi \lim \left(\varrho \frac{\partial \varDelta z}{\partial \varrho}\right)_0 = \frac{a^4}{s} P \;.$$

Danach ist das in Betracht genommene Integral das gesuchte, zugleich haben wir in der Form 3) eine Darstellung gewonnen, welche zur numerischen Berechnung von z für kleine Werte von ϱ geeignet ist. Für grofse Werte benutzt man eine semikonvergente Reihe, welche man aus 2) durch Entwickelung der Wurzel und Integration der Glieder erhält, und deren Anfang ist:

$$4)\qquad z = \frac{a^2P}{2\pi s}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a\varrho\sqrt{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{a\varrho}}\Big\{\sin\left(a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$- \frac{1}{8\varrho}\sin\left(a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) + \ldots\Big\} \;.$$

Noch in einigen weiteren Formen läfst sich die Lösung darstellen. Wir wollen die obigen durch die folgenden Bemerkungen interpretieren.

1. An der Stelle, an welcher das Gewicht aufgelegt ist, erreicht die Einsenkung der Platte den gröfsten Wert, $z = z_0 = a^2P/8s$. Die Platte steigt von da nach allen Richtungen erst langsam, dann schnell, dann wieder langsam gegen das Niveau 0 an, in der Entfernung $\varrho = a$ ist $z = 0{,}646 z_0$, für

$\varrho = 2\alpha$ ist $z = 0{,}258 z_0$, für $\varrho = 3\alpha$ ist $z = 0{,}066 z_0$. Nahezu in der Entfernung $\varrho = \frac{7}{8}\pi\sqrt{2}\alpha = 3{,}887\alpha$ wechselt z sein Zeichen, und es erscheint also die Platte nach aufsen zu wulstartig gehoben um den Depressionspunkt. Auffällig aber mufs es erscheinen, dafs, wenn wir uns nun weiter vom Mittelpunkte entfernen, beständig mit der Periode $\pi\sqrt{2}.\alpha$ sich Hebungen und Senkungen folgen. Es wird die Platte in ein vollständiges System kreisrunder Wellen verworfen, allerdings nimmt die Höhe dieser Wellen nach aufsen so schnell ab, dafs es nicht wunderbar erscheint, wenn man dieselben ohne besondere Vorkehrungen nicht wahrnehmen kann. Die Gröfse α, welche für das Wellensystem charakteristisch ist, ist eine Länge. Berechnen wir dieselbe für den Fall, dafs Eis auf Wasser schwimmt, so haben wir $s = 10^{-6}\,\mathrm{kg/mm^3}$; μ können wir ohne Schaden gleich $\frac{1}{4}$ annehmen, E haben wir nach einer Angabe von Hrn. Reusch[1]) gleich 236 kg/mm² zu setzen, und so erhalten wir für verschiedene Dicken h:

$h =$	10	20	50	100	200 mm
$\alpha =$	0,38	0,64	1,27	2,14	3,60 m,

woraus sich dann leicht die von 100 kg veranlafste Einsenkung ergiebt:

$z_0 =$	86,4	30,5	7,72	2,73	0,96 mm.

2. Die Beanspruchung, welche die Platte erfährt, hängt ab von den zweiten Differentialquotienten von z nach x und y; sie wird daher unendlich im Nullpunkte. Dies zeigt an, dafs die gröfste Beanspruchung nicht gefunden werden kann ohne eine Kenntnis von der Verteilung des Gewichtes. Wir wollen die Maximalspannung berechnen für den einfachen Fall, dafs die Belastung P gleichmäfsig das Innere einer Kreisfläche vom Radius R erfüllt, wo R klein sein soll gegen α. Zu dem Ende berechnen wir Δz_0 für den Mittelpunkt. Nennen wir ϱ den Abstand vom Mittelpunkte, in welchem das Element dP des Gewichtes aufliegt, so ist derjenige Teil von Δz_0, welcher von diesem Elemente herrührt, nach Gleichung 3) gleich $(a^4 dP/2\pi s)(\log a\varrho - \log 2 + C)$. Vernachlässigt sind die Glieder, welche verschwinden mit ϱ. Eine einfache Integration ergiebt uns nun:

[1]) Siehe Wiedemann's Ann. Bd. 9, S. 329, 1880.

$$\Delta z_0 = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{a^4 P}{2\pi s}\left\{\log aR - \tfrac{1}{2} - \log 2 + C\right\}$$

$$= \frac{a^4 P}{2\pi s}\left\{\log aR - 0{,}6519\right\} \quad .$$

Die Maximalspannung im Mittelpunkte der gekrümmten Platte ist nun $p = (Eh/2)\,\partial^2 z/\partial x^2$, bilden wir p und setzen für a^4 seinen Wert ein, so folgt:

$$p = \frac{3(1-\mu^2)P}{2\pi h^2}\left\{\log aR - 0{,}6519\right\} \quad .$$

Es wäre verkehrt, wollte man diese Formel auch dann noch anwenden, wenn R abnimmt bis zur Ordnung der Dicke der Platte oder zu noch kleineren Werten. Es wird sich nämlich in diesem Falle der Druck im Inneren der Platte immer noch verteilen auf eine Kreisfläche, deren Durchmesser angenähert der Dicke der Platte gleichkommt. Angenähert also können wir den Fall, dafs das Gewicht soviel wie möglich in einen Punkt konzentriert ist, dadurch repräsentieren, dafs wir R in der vorigen Formel gleich $h/2$ setzen, wir erhalten so für die Maximalspannung, der das Gewicht P die Platte überhaupt aussetzen kann:

$$p = \frac{3(1-\mu^2)P}{2\pi h^2}\left\{\log\frac{h}{a} - 1{,}3090\right\} \quad .$$

Beispielsweise ergiebt sich für unsere eben betrachteten Eisplatten bei 100 kg Belastung resp.

$$p = 221\,, \quad 53\,, \quad 8{,}1\,, \quad 1{,}9\,, \quad 0{,}47 \text{ kg/cm}^2 \,.$$

Die Platte von 100 mm Dicke würde das Gewicht sicher ertragen, diejenige von 50 mm Dicke vermutlich nicht mehr.

3. Der Auftrieb, den das Wasser auf die Platte infolge von deren Deformation ausübt, ist gleich:

$$2\pi\int_0^\infty sz\varrho\, d\varrho = -\frac{2\pi s}{a^4}\int_0^\infty \Delta\Delta z\varrho\, d\varrho = -P \quad ;$$

er ist also gleich dem belastenden Gewichte. Wie grofs also auch das Gewicht, es wird immer getragen; auf den Auftrieb, welchen die ebene unbelastete Platte erfährt, kommt es nicht an. Legt man eine nicht zu kleine runde Scheibe steifen Papieres aufs Wasser, so kann man die Mitte derselben mit mehreren hundert Gramm belasten, während doch der Auftrieb des Papieres kaum einige Gramm beträgt. Schwimmt also ein Mensch auf einer ausgedehnten Eisplatte, so ist es, genau genommen, korrekter, zu sagen, er schwimme, weil er das Eis durch sein Gewicht zu einem sehr flachen Bote gewölbt habe, als zu sagen, er schwimme, weil das Eis leicht genug sei, ihn neben dem eigenen Gewichte zu tragen. Denn er würde ebenso gut schwimmen, wenn das Eis auch gar nicht leichter wäre, als das Wasser; und wenn man statt des Menschen beliebig grofse Gewichte auf das Eis stellte, so könnten dieselben wohl einbrechen durch das Eis, niemals aber versinken mit dem Eise. Die Grenze der Belastung hängt von der Festigkeit, aber nicht von der Leichtigkeit des Eises ab. Die Sache verhält sich anders, wenn Personen oder Gewichte gleichmäfsig über die Fläche verteilt sind, oder wenn der Radius der Platte nicht sehr grofs, d. h. nicht ein Vielfaches von α ist.

4. Betrachtet man den letzteren Fall, d. h. den Fall endlicher Platten, näher, so kommt man zu dem oberwähnten paradoxen Resultate. Für den freien Rand der kreisrund angenommenen Platte müssen die Bedingungen[1]) erfüllt sein:

$$\text{a)}\quad \Delta z - \frac{1-\mu}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0 \quad , \qquad \text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial \varrho}\Delta z = 0 \quad .$$

Im Mittelpunkte mufs dieselbe Bedingung bestehen, wie vorher. Durch diese drei Bedingungen ist die aus den drei im Mittelpunkte endlichen Integralen der Gleichung $\Delta\Delta z + a^4 z = 0$ zusammenzusetzende Lösung völlig bestimmt. Jenachdem für den Rand der Platte alsdann sich z negativ oder positiv ergiebt, jenachdem also der Rand über oder unter den Wasserspiegel zu liegen kommt, jenachdem schwimmt die Platte ohne weitere Vorrichtung (ohne eigenen Auftrieb), oder schwimmt sie nicht. Der Fall, dafs am Rande c) $z=0$ ist, bildet die Grenze. Fragen wir, unter welchen Umständen die Gleichungen a) b) c) gleichzeitig möglich sind, so werden wir auf das Ver-

[1]) Siehe Clebsch, l. c. § 73.

schwinden einer Determinante verwiesen, welche den Radius der Platte als Unbekannte enthält. In der That wird diese Determinante für gewisse Werte von R gleich Null, und zwar findet man mit einiger Geduld, dafs der kleinste Wert von R, für welchen dies eintritt, zwischen $2{,}5\,\alpha$ und $2{,}8\,\alpha$ liegt. Er liegt bei $2{,}5\alpha$, wenn $\mu = 0$, und bei $2{,}8\alpha$, wenn $\mu = \frac{1}{2}$ ist. Denken wir uns unsere Platte von gleichem spezifischen Gewichte mit der Flüssigkeit, so wird bei jeder Belastung, solange nicht ihr Radius den obigen Wert besitzt, im Gleichgewichtszustande der Rand unter den Wasserspiegel fallen müssen, es wird daher die Platte auch nicht das kleinste Gewicht zu tragen vermögen. Erreicht der Radius genau den kritischen Wert, so fällt der Rand der Platte in die Wasserlinie, und zwar für jede Belastung, daher vermag jetzt plötzlich die Platte jedes Gewicht zu tragen, welches nicht die Elasticitätsgrenze überschreitet. Wird der Radius noch gröfser, so wird am Rande jetzt z negativ, wir dürfen dann also noch ein gewisses Gewicht gleichmäfsig über die Platte verteilen, ohne dafs der Rand derselben tiefer als bis zum Wasserspiegel herabgedrückt würde, d. h. wir dürfen auch von vornherein die Platte etwas schwerer, als die Flüssigkeit annehmen. Denken wir uns also eine solche Platte, die an und für sich nicht schwimmen würde, in ihrer Mitte mit einem hinreichenden Gewichte belastet und nun aufs Wasser gelegt, so wird sie schwimmen; die Sicherheit des Schwimmens wird zunehmen, je mehr wir Gewichte in ihrer Mitte hinzufügen, sie wird abnehmen, wenn wir Gewichte aus der Mitte entfernen, und wenn wir hierin eine gewisse Grenze überschreiten, so wird die Möglichkeit des Schwimmens aufhören, die Platte wird versinken mit dem Reste der Gewichte.