Gesammelte Werke

Schriften vermischten Inhalts

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1987

15. Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder

urn:nbn:de:bsz:31-269592

15. Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder.

Aus Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. 28, S. 125—128, 1883.

Ein homogener elastischer Kreiscylinder sei durch zwei feste zu seiner Axe senkrechte Wände begrenzt. Auf seine Mantelfläche mögen unter beliebiger Neigung gegen dieselbe Druckkräfte wirken, welche senkrecht zur Cylinderaxe und von der dieser Axe parallelen Koordinate unabhängig sind. Alsdann läſst sich die Verteilung der Kräfte im Inneren in geschlossener Form von so bemerkenswerter Einfachheit darstellen, daſs dieselbe trotz der Beschränktheit des Problemes von Interesse ist.

Es sei F der Druck, welcher auf dem Elemente ds der Mantelfläche lastet; f die Richtung dieses Druckes; es sei ferner durch M_n bezeichnet die Komponente in Richtung der m des Druckes, welcher auf einem der Cylinderaxe parallelen Flächenelemente lastet, dessen Normale die Richtung n hat; unter m,n sei verstanden der Winkel, welchen die Richtung m mit der Richtung n bildet; unter r der Radius vector, welcher das in Betracht gezogene Flächenelement mit dem Elemente ds des Mantels verbindet; unter ϱ die Senkrechte, welche von dem Elemente ds auf die Cylinderaxe gefällt ist; endlich unter R der Radius des Cylinders. Unter dieser Bezeichnung ist

$$M_n = -p \cos n,m + \frac{2}{\pi} \int F \cdot \frac{\cos f,r \cos n,r \cos m,r}{r} \, ds \quad ,$$

$$p = \frac{1}{2R\pi} \int F \cos f,r \, ds \quad . \qquad 1)$$

Die Integrationen sind um den ganzen Umfang des Mantels zu erstrecken.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dafs der Ausdruck 1) ein mögliches System von Druckkräften darstellt. Sind x und y rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, welche zur Axe des Cylinders senkrecht ist, so bilden die Drucke X_x, Y_y, Y_x, da sie von der dritten Koordinate unabhängig sind, dann ein mögliches System, wenn sie den Differentialgleichungen genügen:

$$2)\quad 0=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_x}{\partial y},\quad 0=\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 X_y}{\partial y\partial x}.$$

Es seien nun ϱ und ω Polarkoordinaten, nämlich $\varrho\cos\omega=x$, $\varrho\sin\omega=y$ und es bezeichne gleichzeitig in den Druckkomponenten P_ϱ, P_ω, Ω_ω ω die Richtung, welche senkrecht zur Richtung von ϱ ist; es ist dann das Drucksystem

$$3)\qquad P_\varrho=\frac{\cos\omega}{\varrho},\quad P_\omega=0,\quad \Omega_\omega=0$$

ein solches, welches den Gleichungen 2) genügt. Man weist dies nach, indem man die aus 3) folgenden Werte der X_x, Y_y, Y_x berechnet und dieselben in 1) einsetzt. Die drei Gleichungen 3) können ersetzt werden durch die eine:

$$M_n=\frac{\cos\omega\cos n,\varrho\cos m,\varrho}{\varrho}=\frac{\cos x,\varrho\cos n,\varrho\cos m,\varrho}{\varrho}.$$

Auch eine Summe solcher M_n mit verschiedenen Polen und mit beliebigen Konstanten multipliziert, wird ein den Differentialgleichungen 2) genügendes System darstellen. Nun ist das in Gleichung 1) vorkommende Integral eine solche Summe und da der vor dem Integralzeichen stehende Ausdruck nur einen gleichmäfsig durch den Cylinder verbreiteten konstanten Druck p darstellt, so ist das durch Gleichung 1) angedeutete System ein mögliches.

Wir beweisen zweitens, dafs, wenn wir uns der Mantelfläche unendlich nähern und die Richtung der Normale n mit der Richtung des Cylinderradius ϱ zusammenfallen lassen, dafs dann M_n zusammenfällt mit der Komponente von F in der Richtung von m, dafs also dann wird $M_n=F\cos m,n$. Wir zerlegen zu dem Ende das Integral in zwei Teile, deren einer sich bezieht auf die dem betrachteten Elemente unendlich nahen Teile der Grenze, der andere auf die entfernteren. Für diesen letztgenannten, und zwar nur für diesen, ist

$$r = 2R\cos\varrho,r \quad , \quad \frac{\cos\varrho,r}{r} = \frac{\cos n,r}{r} = \frac{1}{2R} \quad ,$$

also wird dieser Teil des Integrales

$$= \frac{1}{R\pi}\int F\cos f,r\cos m,r\, ds$$

$$= \frac{1}{2R\pi}\int \{F\cos f,m + F\cos(f,\varrho - m,\varrho)\}\, ds \quad ,$$

da $f,\varrho + m,r = f,m \ ; \ f,r - m,r = f,\varrho - m,\varrho$.

Nun ist, da die Kräfte F weder eine Verschiebung des Cylinders in der Richtung m, noch eine Drehung um die Axe hervorbringen sollen:

$$\int F\cos f,m\, ds = 0 \quad , \quad \int F\sin f,\varrho\, ds = 0 \quad .$$

Es wird daher der untersuchte Teil des Integrales

$$= \frac{1}{2R\pi}\cos m,\varrho \int F\cos f,\varrho\, ds \quad ,$$

er hebt sich daher gegen das erste Glied in M_n fort, und M_n reduziert sich daher auf den Teil des Integrales, welcher von der benachbarten Mantelfläche herrührt. Hier haben wir $r\, d\varrho,r = ds\cos\varrho,r$, also

$$\frac{\cos n,r}{r}\, ds = \frac{\cos\varrho,r}{r}\, ds = d\varrho,r \quad ,$$

und also, da wir F und f in dem unendlich kleinen Teile als Konstante ansehen können:

$$M_n = \frac{2}{\pi} F \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos f,r\cos m,r\, d\varrho,r$$

$$= \frac{2}{\pi} F \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(r,\varrho - f,\varrho) \cos(r,\varrho - m,\varrho)\, d\varrho,r$$

$$= \frac{F}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(2r,\varrho - f,\varrho)\, d\varrho,r + \frac{F}{\pi} \cos f,m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dr,\varrho$$

$= F \cos f,m,$ was zu beweisen war.

Bei Berechnung des ersten der Teile, in welche wir das Integral zerlegten, hätten wir, streng genommen, die dem Elemente naheliegenden Teile der Mantelfläche von der Integration ausschliefsen müssen; eine einfache Betrachtung lehrt, dafs der begangene Fehler verschwindend klein ist.

Beispiel. Die Anwendung unserer Formel ist besonders bequem in dem Falle, dafs nur an einzelnen Stellen des Cylindermantels Druckkräfte angreifen. Denken wir uns beispielweise einen Cylinder zwischen zwei ebene parallele Platten gebracht und letztere mit dem Drucke P gegen einander geprefst. In solcher Lage befinden sich angenähert die Walzen, welche häufig die Unterlagen eiserner Brücken bilden. Wir legen die x Axe durch die Berührungspunkte der Cylinder und der Platten, machen ihren Schnittpunkt mit der Cylinderaxe zum Nullpunkt, nennen die zu den x senkrechten Koordinaten y und bezeichnen mit r_1 den Abstand des betrachteten Elementes von dem einen, mit r_2 den Abstand von dem anderen Berührungspunkte. Alsdann erhalten wir die Druckkomponente N_n, welche in Richtung der Normalen des betrachteten Elementes entfällt:

$$N_n = -\frac{P}{R\pi} + \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{\cos r_1 x \cos^2 r_1 n}{r_1} + \frac{\cos r_2 x \cos^2 r_2 n}{r_2} \right\}.$$

Bestimmen wir die Richtung n so, dafs bei festgehaltenen r_1 und r_2 N_n ein Maximum oder Minimum wird, so erhalten wir die Werte und Richtungen der Hauptdrucke für den Punkt $r_1 r_2$. Diese Rechnung läfst sich ausführen. Für die x- und y Axe fallen die Richtungen der Hauptdrucke mit den Rich-

tungen der Axen zusammen, hierdurch erhält man leicht für diese Axen:
für die x Axe

$$X_x = \frac{P}{R\pi} \frac{3R^2+x^2}{R^2-x^2}, \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi},$$

für die y Axe

$$X_x = \frac{P}{R\pi} \frac{3R^4-2R^2y^2-y^4}{R^4+2R^2y^2+y^4}, \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi} \cdot \left(\frac{R^2-y^2}{R^2+y^2}\right)^2.$$

Die Elemente der Axen sind sämtlich gedrückt in Richtung der x, gespannt in der dazu senkrechten Richtung. Im Mittelpunkte ist der Druck in Richtung der x $6/\pi$-mal so grofs, als wenn sich der Druck P gleichmäfsig über den ganzen Querschnitt $2R$ verteilte. Übrigens erhellt, dafs schon in diesem einfachsten Falle die Verteilung der Drucke eine äufserst komplizierte ist.