

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Schriften vermischten Inhalts

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1987

6. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte

[urn:nbn:de:bsz:31-269592](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-269592)

6. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte.

Aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbeleißes,
Berlin, November 1882.

Werden zwei elastische Körper gegen einander gepreßt, so berühren sie sich nicht in einem mathematischen Punkte, sondern in einem kleinen, aber endlichen Teile ihrer Oberflächen, welchen Teil wir die Druckfläche nennen wollen. Die Gestalt und Gröfse dieser Fläche und die Verteilung der Spannungen in der Nähe derselben sind mehrfach in Betracht gezogen worden (WINKLER, Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867, I, S. 43; GRASHOF, Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 49—54), die bisherigen Bestimmungen aber sind teils angenäherte, teils sogar behaftet mit nicht bekannten Erfahrungskoefficienten. Indessen ist das Problem auch einer exakten Lösung fähig, und ich habe die bezüglichen Rechnungen im 92. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik. S. 156, mitgeteilt.¹⁾ Da der Gegenstand in einigen Punkten ein wesentlich technisches Interesse hat, erlaube ich mir, denselben hier etwas vollständiger mit einem die Härte betreffenden Zusatze zu behandeln, den Beweis für die Richtigkeit der die Grundlage bildenden Formeln will ich zunächst kurz reproduzieren.

Wir denken uns die beiden Körper zunächst in mathematische Berührung gebracht, die gemeinsame Normale fällt dann zusammen mit der Richtung des Druckes, welchen der eine Körper auf den anderen ausübt. In der gemeinsamen Tangentialebene denken wir uns das rechtwinklig geradlinige Koordinatensystem der xy eingetragen, dessen Nullpunkt mit

¹⁾ [Siehe No. 5, S. 155.]

dem Berührungspunkte zusammenfalle, die dritte dazu senkrechte Koordinate sei z . Wir können unsere Aufmerksamkeit beschränken auf denjenigen Teil der Körper, welcher dem Berührungspunkte sehr nahe liegt, da hier die Spannungen außerordentlich groß sind gegen die im übrigen auftretenden, und daher auch nur zum kleinsten Teile abhängen von den in den übrigen Teilen der Körper angreifenden Kräften. Es genügt daher, die Gestalt der Oberflächen in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes zu kennen. In erster Annäherung, sobald wir nämlich unser Augenmerk nur auf jeden der Körper für sich richten, können wir sogar die Oberfläche derselben mit der gemeinsamen Tangentialebene $z = 0$, und die Richtung der Normalen mit der z -Richtung zusammenfallen lassen; in zweiter, sobald es nämlich auf den Zwischenraum der beiden Körper ankommt, reicht es aus, in der Entwicklung der Flächengleichungen die quadratischen Glieder in x und y beizubehalten. Der Abstand gegenüberliegender Punkte der beiden Oberflächen wird dann ebenfalls eine homogene Funktion zweiten Grades der zu den Punkten gehörigen xy sein, wir können unser System der xy so drehen, daß aus dieser Funktion das Produkt in xy herausfällt, nach Vornahme dieser Operation sei der Abstand der Oberflächen gegeben durch die Gleichung $e = Ax^2 + By^2$. A und B müssen notwendig dasselbe Zeichen haben, da e nicht durch Null hindurchgehen kann; ziehen wir die Kurven, für welche e den gleichen Wert hat, so erhalten wir ein System ähnlicher Ellipsen, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Unsere Aufgabe besteht nun darin, eine solche Form für die Druckfläche und ein solches System von Verschiebungen und Spannungen in ihrer Nähe anzugeben, daß:

1. diese Verschiebungen und Spannungen den für das Gleichgewicht elastischer Körper geltenden Differentialgleichungen genügen, und daß die Spannungen in großer Entfernung von der Druckfläche verschwinden; daß
2. in den beiden Oberflächen die Tangentialkomponenten der Drucke überall verschwinden; daß
3. in der Oberfläche auch der Normaldruck außerhalb der Druckfläche verschwinde, innerhalb derselben aber Druck und Gegendruck gleich seien, und zwar muß das Integral dieses Druckes, genommen über die ganze Druckfläche, gleich sein dem vorher festzusetzenden Gesamtdrucke p ;

dafs endlich 4. der infolge der Verschiebungen geänderte Abstand der Oberflächen Null werde in der Druckfläche, und gröfser als Null bleibe aufserhalb derselben. Um die letzte Bedingung genauer zu formulieren, seien ξ_1, η_1, ζ_1 die Verschiebungen in Richtung der xyz in dem einen Körper, ξ_2, η_2, ζ_2 dieselben für den anderen; in jedem seien sie berechnet in Bezug auf die von der Druckstelle entfernten, undeformierten Teile der Körper, α bedeute die durch den Druck veranlafste Annäherung dieser Teile. Es haben sich dann zwei beliebige Punkte der beiden Körper, die gleiche Koordinaten x, y besitzen, durch den Druck genähert um die Gröfse $\alpha - \zeta_1 + \zeta_2$, diese Annäherung mufs innerhalb der Druckfläche den vorher vorhandenen Abstand $Ax^2 + By^2$ aufheben, also mufs hier sein $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$, während im übrigen in den Oberflächen $\zeta_1 - \zeta_2 > \alpha - Ax^2 - By^2$ sein mufs. Diese sämtlichen Bedingungen lassen sich nur durch ein einziges System von Verschiebungen befriedigen, ich will dieses System angeben und nachweisen, dafs dasselbe allen Anforderungen genügt.

Als Druckfläche nehmen wir eine Ellipse, deren Axen zusammenfallen sollen mit denen der Ellipsen $e = \text{constans}$, deren Gestalt aber länglicher als die jener ist. Die Gröfsen der Halbaxen a und b derselben behalten wir uns vor später zu bestimmen. Wir definieren zunächst eine Funktion P durch die Gleichung:

$$P = \frac{3p}{16\pi} \int_u^x \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{a^2 + \lambda} \cdot b^2 + \lambda \cdot \lambda} d\lambda,$$

worin die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$0 = 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{u}$$

sein soll. Die Gröfse u ist dann eine elliptische Koordinate des Punktes xyz , sie ist konstant in gewissen Ellipsoiden, die mit der Druckellipse gleiche Brennpunkte haben, und ist Null in allen Punkten, die der Druckfläche unendlich nahe liegen. Die Funktion P hat eine einfache Bedeutung in der Potentialtheorie, sie ist das Potential eines unendlich abgeplatteten,

gravitierenden Ellipsoides, welches die Druckfläche ausfüllen würde; in derselben Theorie wird bewiesen, daß es der Differentialgleichung

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Aus diesem P leiten wir nun zwei Funktionen II ab, deren eine sich auf den einen, die andere sich auf den anderen Körper bezieht, und zwar soll sein:

$$II_1 = -\frac{1}{K_1} \left(zP - \frac{1}{1+2\theta_1} \int_z^\infty P dz \right),$$

$$II_2 = -\frac{1}{K_2} \left(zP - \frac{1}{1+2\theta_2} \int_z^\infty P dz \right).$$

Hierin sollen K und θ die Elasticitätskoeffizienten der Körper bedeuten in der KIRCHHOFF'schen Bezeichnungsweise. Der gewöhnliche Elasticitätsmodul E ist durch diese Koeffizienten ausgedrückt:

$$E = 2K \frac{1+3\theta}{1+2\theta},$$

das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung ist

$$\mu = \frac{\theta}{1+2\theta}.$$

Für die Körper, welche dem Glase oder Stahle ähnlich sind, ist dies Verhältnis nahezu $\frac{1}{3}$, daher θ nahe gleich 1, und K nahe gleich $\frac{3}{8}E$, für wenig kompressible Körper ist es nahe an $\frac{1}{2}$, also hier $\theta = \infty$, $K = \frac{1}{3}E$. In unseren Formeln wird übrigens eine besondere Kombination von K und θ die Hauptrolle spielen, für welche wir deshalb eine besondere Bezeichnung einführen. Wir setzen

$$\mathcal{J} = \frac{2(1+\theta)}{K(1+2\theta)}.$$

In Körpern, die dem Glase ähnlich sind, ist also $\mathcal{J} = 4/3K = 32/9E$, in allen Körpern liegt \mathcal{J} zwischen $3/E$ und $4/E$, da

θ zwischen 0 und ∞ liegt. In Bezug auf die Π ist zu bemerken, daß dieselben, nach obigen Formeln berechnet, unendliche Werte annehmen, aber ihre Differentialquotienten, und nur auf diese kommt es uns an, sind endlich. Wir hätten nur nötig, den Π unendliche Konstanten von passender Gröfse hinzuzufügen, um ihnen selbst endliche Werte zu verleihen. Durch einfache Differentiation, unter Berücksichtigung, daß $\Delta P = 0$, findet man:

$$\Delta \Pi_1 = -\frac{2}{K_1} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \Delta \Pi_2 = -\frac{2}{K_2} \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Wir nehmen nun für die Verschiebungen in den beiden Körpern folgende Formen an:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, & \eta_1 &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, & \zeta_1 &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P, \\ \xi_2 &= -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, & \eta_2 &= -\frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, & \zeta_2 &= -\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - 2\vartheta_2 P, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = \Delta \Pi_1 + 2\vartheta_1 \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2}{K_1(1+2\theta_1)} \frac{\partial P}{\partial z}; \\ \sigma_2 &= -\frac{2}{K_2(1+2\theta_2)} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dies System genügt zunächst den Differentialgleichungen für das Gleichgewicht, denn man hat:

$$A \zeta_1 + (1 + 2\theta_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \Pi_1}{\partial x} + \frac{2}{K_1} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} = 0,$$

und entsprechende Gleichungen gelten für ξ_2, η_2, ζ_2 ; und auch für die ζ findet man dasselbe Resultat, wenn man berücksichtigt, daß $\Delta P = 0$ ist. Für die tangentialen Komponenten des Druckes auf die Oberfläche ($z = 0$) finden wir, wenn wir die Indices fortlassen:

$$\begin{aligned} X_z &= -K \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = -K \left(2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} - 2\vartheta \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 2z \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = 0 \\ Y_z &= -K \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = -K \left(2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} - 2\vartheta \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 2z \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0, \end{aligned}$$

wie es die zweite Bedingung fordert.

Etwas mehr Mühe macht der Nachweis, daß der dritten Forderung genügt ist. Wir lassen wieder die Indices fort, da die Rechnung sich gleichmäÙig auf beide Körper bezieht. Zunächst ist überhaupt:

$$\begin{aligned} Z_z &= -2K \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \Theta \sigma \right) = -2K \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\Theta)}{K(1+2\Theta)} \frac{\partial P}{\partial z} \right\} \\ &= 2z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial P}{\partial z} , \end{aligned}$$

also in der Oberfläche $Z_z = -2\partial P/\partial z$. Nun erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung für u allgemein:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{3p}{8\pi} z \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{a^2 + \lambda \cdot b^2 + \lambda \cdot \lambda}} ,$$

und es wird also in der Oberfläche, wie es sein muß, $\partial P/\partial z$ und also auch Z_z gleich Null, wenigstens außerhalb der Druckfläche. In der Druckfläche, wo $u = 0$, nimmt der Ausdruck die Form $0 \cdot \infty$ an. Das gewöhnliche Verfahren zur Festsetzung des wahren Wertes einer solchen Form ergibt:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{8\pi ab} \frac{z^2 \frac{du}{dz}}{u\sqrt{u}} , \text{ also, da für } u = 0: z^2 = u \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ ist,}$$

$$Z_z = -2 \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{3p}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} .$$

Hierin kommt keine GröÙe mehr vor, die einen Index tragen könnte, es ist also in der Druckfläche Z_z dasselbe für beide Körper, es ist also hier Druck und Gegendruck gleich. Endlich ist das Integral von Z_z über die Druckfläche gleich dem $3p/4\pi ab$ fachen Inhalt eines Ellipsoides mit den Axenlängen 1, a , b , also gleich p , und es erhält also der Gesamtdruck in der That den Wert, welchen wir forderten.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß auch der vierten Bedingung durch passende Bestimmung der Halbaxen a und b genügt wird. Zu dem Ende bemerken wir, daß man hat:

$$\zeta_1 = \frac{\partial H_1}{\partial z} + 2\mathfrak{F}_1 P = -\frac{z}{K_1} \frac{\partial P}{\partial z} + \mathfrak{F}_1 P ,$$

dafs also für die Oberflächen wird $\zeta_1 = \vartheta_1 P$ und $\zeta_2 = \vartheta_2 P$. Da nun innerhalb der Druckfläche die untere Integralgrenze u konstant, nämlich $u = 0$ ist, so nimmt innerhalb derselben P die Form $P = L - Mx^2 - Ny^2$ an, und es ist daher nur nötig, a , b und α so zu bestimmen, dafs $(\vartheta_1 + \vartheta_2)M = A$, $(\vartheta_1 + \vartheta_2)N = B$, $(\vartheta_1 + \vartheta_2)L = \alpha$ wird, um der Gleichung $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$ zu genügen; diese Bestimmung aber ist immer möglich. Die Gleichungen für a und b lauten explicite geschrieben:

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \frac{16\pi}{3p},$$

I)

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3u}} = \frac{B}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \frac{16\pi}{3p}.$$

Es läfst sich schliesslich leicht zeigen, dafs auch die keineswegs unwesentliche, aufserhalb der Druckfläche geforderte Ungleichheit erfüllt ist; da der Nachweis die Wiederholung komplizierter Integrale erfordert, übergehe ich denselben.

Unsere Formeln bilden also die richtige Lösung des gestellten Problems und wir können uns ihrer bedienen, um die hauptsächlichsten, in Bezug auf den Gegenstand zu stellenden Fragen zu beantworten. Zunächst ist nötig, die Bestimmung der Gröfsen a und b weiterzuführen, denn die bisher für dieselben gefundenen Gleichungen sind nicht ohne weiteres aufzulösen, und es sind im allgemeinen nicht einmal die Gröfsen A und B explicite bekannt. Ich nehme an, es seien uns gegeben die vier Hauptkrümmungen (reciproken Hauptkrümmungsradien) der beiden Oberflächen, sowie die gegenseitige Lage der Ebenen derselben; seien die ersteren ϱ_{11} und ϱ_{12} für den einen, ϱ_{21} und ϱ_{22} für den anderen Körper und es sei ω der Winkel, welchen die Ebene von ϱ_{11} mit derjenigen von ϱ_{21} bildet. Die ϱ seien positiv gerechnet, wenn die zugehörigen Mittelpunkte im Inneren des betreffenden Körpers liegen. Unser System der xy liege so, dafs die xz -Ebene mit der Ebene von ϱ_{11} den einstweilen unbekanntem Winkel ω' bildet. Dann sind die Gleichungen der Oberflächen diese:

$$2z_1 = \varrho_{11} (x \cos \omega' + y \sin \omega')^2 + \varrho_{12} (y \cos \omega' - x \sin \omega')^2$$

$$2z_2 = -\varrho_{21} (x \cos [\omega' - \omega] + y \sin [\omega' - \omega])^2$$

$$- \varrho_{22} (y \cos [\omega' - \omega] - x \sin [\omega' - \omega])^2 .$$

Die Differenz $z_1 - z_2$ giebt den Abstand der Oberflächen, setzen wir dieselbe $= Ax^2 + By^2$ und nun rechts und links die Koeffizienten von x^2, xy, y^2 gleich, so erhalten wir 3 Gleichungen für ω', A und B ; die Auflösung derselben ergibt für den Winkel ω' , der offenbar die Lage der Axen der Druckellipse zu den Flächen bestimmt:

$$\operatorname{tg} 2\omega' = \frac{\sin 2\omega (\varrho_{21} - \varrho_{22})}{\varrho_{11} - \varrho_{12} + (\varrho_{21} - \varrho_{22}) \cos 2\omega}, \text{ und für } A \text{ und } B$$

$$2(A+B) = \varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22}$$

$$2(A-B) = -\sqrt{(\varrho_{11} - \varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11} - \varrho_{12})(\varrho_{21} - \varrho_{22}) \cos 2\omega + (\varrho_{21} - \varrho_{22})^2} .$$

Für das Folgende ist es bequem, einen Hilfwinkel τ einzuführen durch die Gleichung

$$\cos \tau = -\frac{A-B}{A+B} ,$$

es ist dann

$$2A = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22}) \sin^2 \frac{\tau}{2} ,$$

$$2B = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22}) \cos^2 \frac{\tau}{2} .$$

Diese Werte wollen wir in die Gleichungen für a und b einsetzen, gleichzeitig jedoch die Integrale in denselben in der Weise umformen, daß wir in der ersten $u = b^2 z^2$, in der zweiten $u = a^2 z^2$ setzen und das Verhältnis b/a mit k bezeichnen, wir erhalten so:

$$\frac{1}{a^3} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2 z^2)^3 (1+z^2)}} = \frac{4\pi}{3p} \frac{\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

$$\frac{1}{b^3} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right)^3 (1+z^2)}} = \frac{4\pi}{3p} \frac{\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \cos^2 \frac{\tau}{2} .$$

Dividieren wir die Gleichungen durch einander, so erhalten wir eine neue, in der nur noch k und τ vorkommen, k ist also Funktion lediglich von τ und das Gleiche gilt also von den noch in den Gleichungen vorkommenden Integralen. Wenn wir dieselben daher in der Weise auflösen, daß wir schreiben:

$$a = \mu \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} ,$$

$$b = \nu \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} ,$$

so sind μ und ν lediglich abhängig von τ , also von dem Axenverhältnisse der Ellipsen $e = \text{constans}$. Die in Betracht kommenden Integrale lassen sich sämtlich zurückführen auf ganze elliptische Integrale erster Art und deren Differentialquotienten nach dem Modul, können also mittels der LEGENDRE'schen Tafeln ohne neue Quadraturen gefunden werden. Indessen sind die Rechnungen weitläufig und ich habe deshalb die unten gegebene Tabelle¹⁾ berechnet, in welcher zu zehn Werten von τ die zugehörigen μ und ν sich finden, die Interpolation zwischen diesen Werten wird wohl immer genügende Genauigkeit bieten. Unser Resultat können wir dahin zusammenfassen: Die Gestalt der Druckellipse ist einzig bedingt durch die Form der Ellipsen $e = \text{constans}$, bei gleicher Gestalt sind die linearen Dimensionen derselben proportional der dritten Wurzel aus dem Drucke, umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus dem Mittelwerte der Krümmungen, sowie proportional der dritten Wurzel aus dem Mittelwerte der elastischen Koeffizienten ϑ , also sehr nahe proportional der dritten Wurzel aus dem Mittel der reciproken Elasticitätsmodule. Zu bemerken ist noch, daß der Inhalt der Druckfläche unter sonst gleichen Umständen zunimmt, je länglicher ihre Gestalt ist; denken wir uns also von zwei in Berührung

¹⁾

τ	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
μ	1,000	1,128	1,284	1,486	1,754	2,136	2,731	3,778	6,612	∞
ν	1,000	0,893	0,802	0,717	0,641	0,567	0,493	0,408	0,319	0

befindlichen Körpern bei gleichbleibendem Drucke den einen um die gemeinsame Normale gedreht, so wird die Gröfse der Druckfläche ein Maximum, der mittlere Druck pr. Flächeneinheit ein Minimum in derjenigen Lage, für welche das Axenverhältnis der Druckellipse am meisten von 1 abweicht.

Unsere nächste Frage betrifft die Einsenkungen, welche die Körper erleiden und die Annäherung, welche sie infolge des Druckes erfahren; wir haben die letztere α genannt und ihren Wert schon gleich $(\vartheta_1 + \vartheta_2) L$ gefunden; indem wir das Integral L ein wenig umformen, erhalten wir:

$$\alpha = \frac{3p}{8\pi} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2 z^2)(1+z^2)}}.$$

Als Einsenkungen können wir passend die Annäherung des Mittelpunktes an die entfernten Teile der Körper bezeichnen; wir erhalten die Werte derselben sehr einfach, indem wir α durch Ausführung der Multiplikation mit $\vartheta_1 + \vartheta_2$ in zwei Summanden zerlegen. Denken wir uns für a seinen Wert eingesetzt, so erkennen wir, dafs α einen Zahlenfaktor enthält, welcher von der Gestalt der Druckellipse abhängt, dafs übrigens bei gleichem Werte dieses Faktors α proportional ist der $\frac{2}{3}$ Potenz des Druckes, der $\frac{2}{3}$ Potenz des Mittelwertes der Koeffizienten ϑ , sowie der dritten Wurzel des Mittelwertes der Krümmungen. Werden eine oder mehrere dieser Krümmungen unendlich stark, so werden Annäherung und Einsenkungen unendlich grofs, diese Folgerung wird hinlänglich erläutert durch die eindringende Wirkung der Spitzen und Schneiden.

Wir hatten angenommen, dafs die Druckfläche so klein sei, dafs die undeformierten Oberflächen in einem gogen die Druckfläche grofsen Bereiche sich durch eine Fläche zweiten Grades darstellen liessen. Nach Ausübung des Druckes können wir eine solche Voraussetzung nicht mehr machen, in der That wird aufserhalb der Druckfläche die Oberfläche sich nur durch eine verwickelte Funktion darstellen lassen. Es zeigt sich aber, dafs innerhalb der Druckellipse die Oberfläche mit derselben Annäherung wie vorher eine Fläche zweiten Grades geblieben ist. Man hat hier nämlich einmal $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 = \alpha - z_1 + z_2$.

andererseits $\zeta_1 = \vartheta_1 P$, $\zeta_2 = \vartheta_2 P$, also $\zeta_1 : \zeta_2 = \vartheta_1 : \vartheta_2$, drittens hat man als Gleichung der deformierten Oberfläche $z = z_1 + \zeta_1 = z_2 + \zeta_2$; aus diesen folgert man leicht unter Vernachlässigung einer Konstanten $(\vartheta_1 + \vartheta_2)z = \vartheta_2 z_1 + \vartheta_1 z_2$, welche Gleichung das ausspricht, was wir beweisen wollten; sie zeigt außerdem, daß sich die gemeinsame Oberfläche nach der Deformation zwischen die beiden ursprünglichen Oberflächen legen läßt; und der Oberfläche desjenigen Körpers ähnlicher ist, dessen Elasticitätsmodul der größere ist. Bei Berührung von Kugeln gehört die Druckfläche gleichfalls einer Kugel an, bei der Berührung zweier Cylinder mit gekreuzten Axen einem hyperbolischen Paraboloid.

Wir haben bisher von den Formveränderungen gesprochen, wir ziehen jetzt die Spannungen in Betracht. Den Normaldruck in der Druckfläche haben wir schon gefunden:

$$Z_x = \frac{3p}{2ab\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Derselbe nimmt also zu vom Rande aus gegen die Mitte, wie die Ordinaten eines über der Druckellipse stehenden Ellipsoides, er ist Null am Rande und in der Mitte anderthalbmal so groß, als wenn der Gesamtdruck sich gleichmäßig über die Druckfläche verbreitete. Außer Z_x lassen sich noch die beiden anderen Hauptspannungen im Nullpunkte in endlicher Form darstellen, es genüge anzugeben, daß dies gleichfalls Drucke von der Ordnung von Z_x sind, die so stark sind, daß, falls das Material überhaupt kompressibel ist, es in allen drei Richtungen zusammengedrückt wird. Ist die Druckfigur ein Kreis, so verhalten sich diese Kräfte zu Z_x wie $1 + 4\theta/2(1 + 2\theta) : 1$, für Glas beiläufig etwa wie $5/6 : 1$. Die Verteilung der Spannungen im Inneren hängt ab von der Form der Druckellipse, außerdem aber auch wesentlich von dem Elasticitätskoeffizienten θ , so daß sie eine ganz andere sein kann in dem einen und dem anderen zweier sich berührender Körper. Vergleichen wir die Spannungen in demselben Material bei gleicher Gestalt, aber ungleicher Größe der Druckellipse und verschiedener Größe des Druckes, so sehen wir, daß die Spannungen in solchen Punkten, welche zur Druckfläche ähnlich liegen, proportional sind; aus den bekannten Spannungen für den einen

Fall erhalten wir die Spannungen für ähnlich gelegene Punkte des zweiten Falles, indem wir erstere multiplizieren mit dem Verhältnisse der Gesamtdrucke und dividieren durch das Verhältnis der Druckflächen. Denken wir zwei bestimmte Körper in Berührung und nur den Druck zwischen ihnen variabel, so wächst die Beanspruchung des Materials wie die dritte Wurzel aus diesem Drucke.

Es ist schließlichs wünschenswert, ein anschauliches Bild von der Verteilung der Spannungen im Inneren zu erhalten, die Formeln sind indes viel zu verwickelt, als dafs es möglich wäre, ein solches ohne weiteres aus denselben abzulesen. Man kann indessen durch Betrachtung der Spannungen in der Nähe der z -Axe und der Nähe der Oberfläche eine angenäherte Vorstellung von dieser Verteilung erhalten. Das Resultat läfst sich etwa durch die folgende Beschreibung und die beistehende Fig. 19 wiedergeben.

Letztere stellt einen Schnitt durch die z -Axe und eine Axe der Druckellipse dar, gegen einander gekehrte Pfeile bedeuten einen Zug, von einander gekehrte einen Druck,

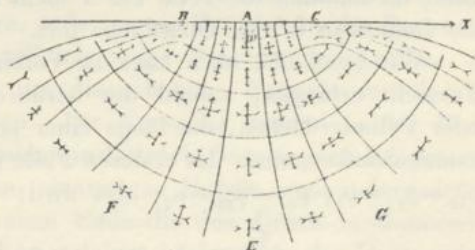


Fig. 19.

die Figur bezieht sich auf den Fall, dafs $\theta = 1$. Das Stück $ABDC$ des Körpers, welches vorher eine Erhöhung über der Druckfläche bildete, ist nunmehr wie ein Keil in den Körper hineingeprefst, es pflanzt daher den Druck nicht nur in gerader Richtung AE , sondern auch, wenn auch nicht mit gleicher Stärke, in den schrägen Richtungen AF und AG fort; die Folge davon ist, dafs das Element A auch in seitlicher Richtung kräftig komprimiert wird, andererseits die Teile bei F und G das Bestreben erhalten, sich von einander zu entfernen und so die zwischen ihnen liegenden Teile spannen. Es herrscht also auf dem Flächenelemente, dessen Normale die x -Richtung hat, bei A Druck, der, wenn wir ins Innere gehen, auf Null sinkt und in Zug übergeht, welcher schnell ein Maximum erreicht und dann mit wachsender Entfernung wieder auf Null

absinkt. Da die bei A befindlichen Teile auch in seitlicher Richtung komprimiert sind, so müssen sämtliche Punkte der Oberfläche dem Nullpunkte genähert und also in der Richtung auf denselben angespannt sein, in der That geht der bei A in Richtung der x herrschende Druck, wenn wir auf der x Axe fortschreiten, noch innerhalb der Druckfläche in Zug über; letzterer erreicht in der Nähe der Grenze derselben sein Maximum, um dann wieder auf Null abzufallen. Die Rechnung ergibt, dafs für $\Theta = 1$ diese Zugkraft bedeutend gröfser ist, als die im Inneren wirkenden. Was den dritten Hauptdruck, welcher senkrecht zur Zeichnungsebene ist, anlangt, so ist derselbe in der Axe natürlich von derselben Art, wie der in Richtung der x herrschende, in der Oberfläche ist er ein Druck, da hier sämtliche Punkte dem Nullpunkte genähert sind. Ist das Material inkompressibel, so vereinfacht sich das Bild; da nämlich die Teile bei A nicht zusammengehen, fallen die Zugkräfte in der Oberfläche fort.

Wir erwähnen noch kurz die Vereinfachungen, welche die Formeln erlangen, sobald die berührenden Flächen Kugel- oder Cylinderflächen, die längs einer erzeugenden Graden zusammenstossen, sind. Im ersteren Falle ist einfach $k = \mu = \nu = 1$, $\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_1$, $\varrho_{21} = \varrho_{22} = \varrho_2$, also wird:

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3p(\varrho_1 + \varrho_2)}{16(\varrho_1 + \varrho_2)}} \quad , \quad \alpha = \frac{3p(\varrho_1 + \varrho_2)}{16a} \quad .$$

Nicht ganz so direkt ergibt sich die Formel für die Berührung zweier Cylinder. Wir lassen hier die grofse Axe der Ellipse a unendlich werden, dann müssen wir auch den Gesamtdruck p unendlich werden lassen, wenn der Druck auf die Längeneinheit des Cylinders endlich werden soll. In der zweiten der Gleichungen I) haben wir dann $B = (\varrho_1 + \varrho_2)/2$, ferner können wir u gegen a^2 vernachlässigen, a also vor das Integralzeichen nehmen und schließlich für die unbestimmte Gröfse $p/a = \infty/\infty$ eine willkürliche endliche Konstante setzen; wir wählen als solche $\frac{1}{3}p'$. es wird sich gleich zeigen, dafs dann p' den Druck auf die Längeneinheit des Cylinders bezeichnet. Das Integral der Gleichung läfst sich nun ausführen, und dieselbe ergibt:

$$b = \sqrt{\frac{p'(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\pi(\varrho_1 + \varrho_2)}} .$$

Für den Druck Z_z findet man:

$$Z_z = \frac{2p'}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - y^2} ;$$

man kann nun leicht sich überzeugen, daß p' die ihm beilegte Bedeutung hat. Die Annäherung α würde nach unserer allgemeinen Formel hier logarithmisch unendlich werden, der Sinn hiervon ist der, daß sie nicht allein abhängt von den Vorgängen an der Druckstelle, sondern wesentlich bedingt ist durch die Form der ganzen Körper, ihre Bestimmung fällt daher außerhalb des uns hier beschäftigenden Problems.

Teils um einen Beweis für die Zuverlässigkeit der gezogenen Folgerungen und deren Anwendbarkeit auf wirkliche Verhältnisse zu liefern, teils um ein Beispiel für die Benutzung derselben zu geben, will ich einige Versuche beschreiben, die ich angestellt habe, um die erlangten Formeln mit der Erfahrung zu vergleichen. Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß die beiden in Betracht kommenden Körper mittels eines horizontalen, einarmigen Hebels aneinandergedrückt wurden, an dessen freiem Ende die den Druck bestimmenden Gewichte hingen, und an welchem in der Nähe des Drehpunktes der eine der Körper befestigt war. Der andere, welcher die Unterlage bildete, war mit einer möglichst dünnen Rufschiicht überzogen, welche die Gestalt der Druckfläche zurückhalten sollte. Der Hebel mit seiner Belastung wurde mittels einer Schraube vorsichtig auf die Unterlage herabgelassen und wieder von derselben abgehoben. War der Versuch gelungen, so durfte der Ruf nicht verwischt, sondern nur plattgedrückt sein, in durchfallendem Lichte ließen sich dann die Druckstellen kaum erkennen, im reflektierten Lichte aber zeigten sie sich als glänzende kleine Kreise oder Ellipsen, die sich unterm Mikroskope ziemlich genau messen ließen. Die folgenden Angaben sind immer schon das Mittel aus 5—8 Messungen.

Ich prüfte zunächst, ob die Dimensionen der Druckfläche wüchsen, wie die dritten Wurzeln aus dem Drucke. Zu dem Ende war am Hebel eine Glaslinse von 28,00 mm Radius be-

festigt, der kleine Hebelarm betrug 114,0 mm, der große 930 mm. Die Unterlage wurde durch eine ebene Glasplatte gebildet, an einem Stabe aus demselben Glase war der Elastizitätsmodul bestimmt und gleich 6201 kg/mm^2 gefunden. Das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung für Glas ist nach WERTHEIM 0,32, daraus folgt $\Theta = 8/9$, $K = 2349 \text{ kg/mm}^2$, $\rho = 0,0005790 \text{ mm}^2/\text{kg}$. Hiernach ergibt uns unsere Formel den Durchmesser des Druckkreises in mm: $d = 0,3650 p^{1/2}$, wenn p in Kilogrammen gerechnet wird. In der folgenden Zusammenstellung giebt die erste Reihe in Kilogrammen die Gewichte am Ende des langen Hebels, die zweite den gemessenen Durchmesser der Druckfläche in Umdrehungen der Mikrometerschraube, deren jede = 0,2737 mm war. Die dritte Reihe endlich giebt den Quotienten $d:p^{1/2}$, diese Größe muß nach dem Vorigen eine Konstante sein.

p	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
d	1,56	2,03	2,19	2,59	2,68	3,13	3,52	3,69	3,97	4,02
$d:\sqrt[3]{p}$	2,67	2,75	2,60	2,79	2,68	2,73	2,79	2,71	2,70	2,65

In der That bleibt also der genannte Quotient bis auf Unregelmäßigkeiten konstant, obgleich die Gewichte bis zum 15fachen ihres Anfangswertes variieren. Um den theoretischen Wert desselben zu erhalten, haben wir den oben berechneten Faktor 0,3650 durch den Millimeterwert der Schraube zu dividieren und mit der dritten Wurzel des Verhältnisses des großen zum kleinen Hebelarm zu multiplizieren; wir erhalten so 2,685, eine Größe, welche mit dem Mittelwerte der Beobachtungen, nämlich 2,707, fast völlig zusammenfällt.

Ich habe zweitens die Sätze über die Gestalt der Druckfläche geprüft, indem ich zwei Glascylinder, die den gleichen Durchmesser 7,37 mm besaßen, unter verschiedener Neigung der Axen aneinanderpresste. Nennen wir ω die Größe dieser Neigung, so wird bei Benutzung früherer Bezeichnungen: $\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho$, $\varrho_{21} = \varrho_{22} = 0$, also $A + B = \varrho$, $A - B = -\varrho \cos \omega$, so nach der Hilfwinkel $\tau = \omega$. Bestimmt man daher für einen und denselben Druck die großen und kleinen Axen der Druck-

ellipse bei verschiedenen Neigungen, dividiert dann die großen Axen durch die dem Neigungswinkel zugehörige Funktion μ , die kleinen durch die zugehörige Funktion ν , so muß das Resultat aller dieser Divisionen eine und dieselbe Konstante sein, und zwar die Größe $2(3p\vartheta/8g)^{1/2}$. Die folgende Tabelle giebt nun in der ersten Spalte in Graden den Neigungswinkel ω , in den beiden folgenden die gemessenen Werte $2a$ und $2b$ in Teilen des hier angewandten Okularmikrometers, deren 96,0 ein Millimeter bedeuten, und in den beiden letzten die Quotienten $2a/\mu$ und $2b/\nu$.

ω	$2a$	$2b$	$\frac{2a}{\mu}$	$\frac{2b}{\nu}$
90	40,6	40,6	40,6	40,6
80	45,4	36,6	40,2	41,0
70	52,8	31,0	41,3	38,7
60	59,6	27,6	40,0	38,5
50	72,2	26,4	41,2	41,2
40	90,4	23,8	42,2	42,0
30	110,0	21,0	40,3	42,6
20	156,2	18,4	41,3	45,3
10	274,6	15,0	41,6	47,0

Die Quotienten ergeben also in befriedigender Weise denselben Wert, mit Ausnahme derjenigen für die kleinen Axen bei geringer Neigung. Es ist aber zu bemerken, daß es bei einer solchen Neigung äußerst schwierig ist, die Cylinder so aufeinanderzubringen, daß die gemeinsame Tangentialebene genau horizontal werde, bei jeder anderen Lagerung aber findet ein geringes Gleiten des einen Cylinders am anderen statt, welches die kleine Axe ungebührlich vergrößert. Der Druck bei allen diesen Messungen betrug 12 kg, nehmen wir auch hier für ϑ den Wert 0,0005790, so folgt aus den gemachten Angaben für die theoretische Größe der Konstanten der Wert 40,80, welcher mit dem Mittel der aus a gefolgerten Werte, nämlich 40,97, fast völlig übereinstimmt, während er von dem Mittel der aus b gefolgerten, nämlich 41,88, aus den erwähnten Gründen um eine Kleinigkeit abweicht.

Ich habe schließlic den Versuch gemacht, auch die Abhängigkeit von den Elasticitätsmodulen experimentell zu prüfen,

indem ich eine Stablinse gegen ebene Flächen verschiedener Metalle presste. Ich fand hier aber Schwierigkeiten in der Beobachtung; einmal nämlich ist es nicht so leicht, wie beim Glase völlig ebene und glatte Flächen zu erhalten, zweitens lassen sich die Metalle nicht so gut berufen, drittens muß man sich, um nicht die Elasticitätsgrenze zu überschreiten, auf sehr kleine Drucke beschränken. Alles wirkt zusammen, um nur unvollkommene Druckfiguren zu Stande kommen zu lassen, die dann bei der Messung der Willkür ziemlich freien Spielraum geben. Ich erhielt Werte, die durchgehends von der Ordnung der berechneten, aber mit zu großen Unsicherheiten behaftet waren, als daß sie sich zu einer genauen Prüfung der Theorie eigneten. Auch zeigen die mitgeteilten Zahlen hinlänglich, daß unsere Formeln keineswegs in der Luft schweben, und werden so die Anwendung rechtfertigen, die wir jetzt von ihnen machen wollen, und welche den Zweck hat, eine klarere Vorstellung von und ein exaktes Maß für diejenige Eigenschaft der Körper zu gewinnen, welche wir Härte nennen.

Die Härte wird gewöhnlich definiert als die Festigkeit, welche die Körper dem Eindringen von Spitzen und Schneiden entgegensetzen. Die Mineralogen haben sich begnügt, in derselben eine nur nach mehr oder weniger angebbare Eigenschaft zu sehen; sie nennen härter denjenigen von zwei Körpern, welcher den anderen ritzt. Dafür, daß sich nach dieser Definition eine Reihenfolge aller Körper nach ihrer Härte herstellen läßt, ist Bedingung, daß, wenn *A* das *B* und *B* das *C* ritzt, daß dann auch *A* das *C* ritzt und nicht umgekehrt, ferner, daß, wenn eine Spitze aus *A* eine ebene Platte aus *B* ritzt, dann nicht etwa eine Spitze aus *B* wiederum in eine Platte von *A* eindringt. Die Notwendigkeit des Zutreffens dieser Voraussetzungen ist nicht von vornherein ersichtlich, indessen hat die Erfahrung dieselben gerechtfertigt, eine quantitative Bestimmung der Härte von irgend welchem Werte kann das erwähnte Verfahren nicht geben. Eine solche zu finden, sind verschiedene Versuche gemacht. MUSCHENBROEK maß die Härte durch die Zahl der Schläge, welche er auf den Kopf eines Meißels führen mußte, um eine kleine Barre des zu untersuchenden Materials von gegebenen Dimensionen zu

durchschneiden; um das Jahr 1850 haben die Herren CRACE-CALVERT und JOHNSON die Härte bestimmt durch das Gewicht, welches nötig ist, um einen abgestumpften Stahlkonus mit ebener Endfläche von 1,25 mm Durchmesser in einer halben Stunde 3,5 mm tief in das zu untersuchende Material einzutreiben; in einem 1865 erschienenen Buche¹⁾ bestimmt Herr HUGUENY die gleiche Eigenschaft durch das Gewicht, welches nötig ist, eine ganz bestimmte Spitze 0,1 mm in das Material einzusenken. Neuere Definitionsversuche habe ich nicht kennen gelernt. Allen diesen Versuchen lassen sich folgende Vorwürfe machen: 1. Es ist das erreichte Mafs nicht nur kein absolutes, da zur Bestimmung der Härte eines Körpers durchaus ein härterer erforderlich ist, sondern es ist vollständig abhängig von einer zufällig gewählten Spitze; aus den erhaltenen Werten können wir durchaus nicht schliessen auf die zum Eintreiben einer anderen Spitze notwendigen Kräfte; 2. da endliche und dauernde Formveränderungen benutzt werden, so treten elastische Nachwirkungen, die doch mit der Härte nichts zu thun haben, in nicht zu übersehender Gröfse in die Messung ein, wie die Einführung der Zeit in die Definition der Herren CRACE-CALVERT und JOHNSON nur allzu deutlich zeigt, und es ist daher selbst zweifelhaft, ob die gemessene Härte den Körpern unter allen Umständen die Reihenfolge der gewöhnlichen Härteskala giebt; 3. kann man nicht behaupten, dafs die so gemessene Härte eine Eigenschaft der Körper in deren ursprünglichem Zustande ist (obgleich sie zweifellos durch denselben bedingt ist). Denn in der Lage der Messung ruht die Spitze schon auf dauernd gedehnten oder komprimierten Schichten des Körpers.

Ich will nun versuchen, an die Stelle dieser eine andere Definition zu setzen, welcher man die gleichen Vorwürfe nicht machen kann. Die Festigkeit zunächst will ich nicht bestimmt ansehen durch solche Kräfte, welche gewisse bleibende Änderungen hervorrufen, sondern durch die grössten Kräfte, welche eben noch wirken dürfen, ohne dafs (mit einer gewissen vorherbestimmten Genauigkeit) Abweichungen von der vollkommenen

¹⁾ M. F. HUGUENY, Recherches expérimentales sur la dureté des corps.

Elasticität vorkämen. Da das Material nach Einwirkung solcher Kräfte in seinen Anfangszustand zurückkehrt, so ist die so definierte Festigkeit eine Gröfse, die sich wirklich auf das ursprüngliche Material bezieht, was man nicht in gleicher Weise von einer anders definierten Festigkeit aussagen kann. Das allgemeinste Problem der Festigkeit isotroper Körper wäre nun offenbar die Beantwortung der Frage: Innerhalb welcher Grenzen dürfen die auf ein Element wirkenden Hauptdrucke X_x, Y_y, Z_z liegen, damit die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde? Denken wir uns die X_x, Y_y, Z_z als rechtwinklig geradlinige Koordinaten, so wird es in diesem Systeme für jedes Material eine gewisse geschlossene oder teilweise ins Unendliche auslaufende Fläche um den Nullpunkt geben, welche der Elasticitätsgrenze entspricht; die X_x, Y_y, Z_z , welche den Punkten innerhalb dieser Fläche zugehören, werden ertragen, die übrigen nicht. Zunächst ist klar, dafs, wenn wir für das in Betracht kommende Material diese Fläche oder die entsprechende Funktion $\Psi(X_x, Y_y, Z_z) = 0$ kennen, wir schon alle Fragen, zu deren Lösung uns die Härte verhelfen soll, beantworten könnten. Denn denken wir uns eine Spitze von gegebener Gestalt und aus gegebenem Material gegen einen anderen Körper gedrückt, so kennen wir nach dem Vorigen sämtliche in den Körpern auftretende Spannungen, wir haben also nur zu untersuchen, ob unter denselben eine ist, die einem Punkte außerhalb der Fläche $\Psi(X_x, Y_y, Z_z) = 0$ entspricht, um sagen zu können, ob und in welchem der beiden Körper eine bleibende Deformation eintritt. Indessen ist zu einer Bestimmung jener Fläche bisher nicht einmal der Versuch gemacht, wir kennen nur einzelne Punkte derselben; so entsprechen die Schnittpunkte mit den positiven Axen der Druckfestigkeit, die mit den negativen Axen der Zugfestigkeit, andere Punkte der Torsionsfestigkeit; allgemein kann man sagen, dafs jedem Punkte der Festigkeitsfläche eine gewisse Art von Festigkeit entspricht. Wir werden daher auch die Härte einem bestimmt angebbaren Punkte der Festigkeitsfläche entsprechen lassen und uns begnügen, die Lage dieses zu kennen, so lange uns die Gesamtform verborgen ist. Dies Ziel erreichen wir durch folgende Definition: Die Härte ist die Festigkeit, welche ein Körper derjenigen Deformation entgegengesetzt, die einer Be-

rührung mit kreisförmiger Druckfläche entspricht. Ein absolutes Maß aber für die Härte erhalten wir, wenn wir festsetzen: Die Härte eines Körpers wird gemessen durch den Normaldruck auf die Flächeneinheit, welcher im Mittelpunkte einer kreisförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte des Körpers die Spannungen eben die Elasticitätsgrenze erreichen. Um diese Definition zu rechtfertigen, haben wir zu zeigen: 1. daß die in ihr nicht berücksichtigten Nebenumstände außer Belang sind, 2. daß die Ordnung, in welche sie die Körper nach der Härte bringt, zusammenfällt mit der gewöhnlichen Härteskala. Um das erste zu beweisen, denken wir uns einen Körper aus dem Materiale *A* in Berührung mit einem Körper aus *B*, und einen anderen Körper aus *A* in Berührung mit einem Körper aus *C*. Die Form aller Oberflächen an den Berührungsstellen soll beliebig sein, wir nehmen aber an, daß die Druckfläche ein Kreis sei, und daß *B* und *C* härter als *A* oder gleich hart seien. Wir können dann den Gesamtdruck in beiden Berührungen gleichzeitig so von Null an wachsen lassen, daß der Normaldruck im Mittelpunkte des Druckkreises beständig in beiden Fällen derselbe ist. Wir wissen, daß dann in beiden Fällen überhaupt dieselben Spannungen gleichzeitig auftreten, gleichzeitig und in zur Druckfläche ähnlich gelegenen Punkten muß daher auch die erste Überschreitung der Elasticitätsgrenze stattfinden. Wir würden daher auch aus beiden Fällen für die Härte dieselbe Größe gefunden haben und diese Härte würde demselben Punkte in der Festigkeitsfläche entsprochen haben. Übrigens ist klar, daß die Elemente, in welchen die Überschreitung der Elasticitätsgrenze stattfindet, für verschiedene Materien eine sehr verschiedene Lage zur Druckfläche haben können, und daß die Lage der Härtepunkte in der Druckfläche eine sehr unähnliche sein kann. Es ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß der zweite Körper, dessen wir uns bedient, um die Härte von *A* zu bestimmen, aus demselben Material *A* bestehen dürfte, wir haben also zur Bestimmung der Härte eines Materials ein anderes überhaupt nicht nötig; dies ist der Umstand, welcher uns berechtigt, obige Messung als eine absolute zu bezeichnen. Um den zweiten Punkt zu erweisen, denken wir uns zwei Körper von verschiedenem Material aneinanderge-

drückt, die Druckfläche sei ein Kreis, die nach unserer Festsetzung gemessene Härte des einen H , die kleinere des zweiten h . Lassen wir nun den Druck zwischen ihnen wachsen, bis der Normaldruck im Nullpunkte h eben übersteigt, so wird der Körper mit der Härte h eine dauernde Einsenkung erfahren, während der andere nicht über seine Elasticitätsgrenze hinaus angestrengt ist; indem wir die Körper nun mit passendem Drucke über einander bewegen, können wir in ersterem eine Reihe dauernder Eindrücke hervorbringen, während letzterer intakt bleibt. Ist der letztere eine Spitze, so können wir diesen Vorgang beschreiben als ein Geritztwerden des weicheren Körpers durch den härteren und es fällt sonach unsere Härteskala mit der mineralogischen zusammen. Allerdings sagt unsere Theorie nicht aus, ob das Gleiche gilt für alle die Berührungen, bei welchen die Druckfläche elliptische Gestalt hat, aber dies Schweigen ist gerechtfertigt. Man sieht leicht, daß, ebenso gut wie unter Zuhilfenahme einer kreisförmigen Druckfläche, man die Härte definieren könnte unter Zuhilfenahme einer bestimmten Ellipticität derselben. Alle so verschieden definierten Härten werden kleine Abweichungen in den numerischen Werten von einander zeigen. Entweder nun es stimmt wenigstens die Reihenfolge der Körper in den verschiedenen Härteskalen überein, dann ist unsere Festsetzung überhaupt im Einklange mit der mineralogischen, oder dies findet nicht statt, dann ist der Fehler auf Seite der letzteren, da dieselbe dann eine bestimmte Härteskala überhaupt nicht zu geben vermag. Es scheint übrigens sehr wahrscheinlich, daß die Abweichungen der verschieden definierten Härten von einander nur klein ausfallen würden, so daß wir mit einem geringen Opfer an Genauigkeit in dem Bisherigen und Kommenden die Beschränkung auf eine kreisförmige Druckfläche bei Seite lassen könnten. Nur Versuche können sicheren Aufschluß geben.

Es sei nun H die Härte eines Körpers und derselbe sei in Berührung mit einem anderen, dessen Härte größer als H . Dann ist die Aussage, welche wir mit Hilfe dieses Wertes machen können, die, daß alle diejenigen und nur diejenigen Berührungen mit kreisförmiger Druckfläche ertragen werden, für welche

$$Z_x = \frac{3p}{2\pi a^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3p(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})^2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}} \cong H ,$$

oder für welche

$$\frac{p(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})^2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2} = \frac{\pi^3 H^3}{24} \text{ ist.}$$

Die Kraft, welche nötig ist, um eine Spitze mit kugelförmiger Endfläche in die ebene Fläche eines weicheren Körpers eben einzusenken, ist proportional der dritten Potenz der Härte dieses letzteren Körpers, dem Quadrate des Krümmungsradius der Endfläche, sowie dem Quadrate des mittleren Koeffizienten ϑ für die beiden Körper. Um diese Aussage in bessere Übereinstimmung mit den üblichen Bestimmungen der Härte zu bringen, könnte man versucht sein, letztere nicht durch den Normaldruck selbst, sondern durch dessen dritte Potenz messen zu wollen. Abgesehen davon, daß die erzeugte Analogie eine scheinbare wäre (denn es würde immer noch nicht die Kraft, welche eine und dieselbe Spitze in verschiedene Körper eintreibt, der Härte der letzteren proportional sein), widerspräche dieses Verfahren der Konsequenz, da es die Härte aus der Reihe der übrigen Festigkeiten herausrisse.

Obgleich sich unsere Folgerungen auf Schlüsse stützen, welche durch die Erfahrung gut bestätigt werden, sind sie doch selber einer Prüfung durch die Erfahrung sehr bedürftig. Denn es könnte sein, daß die wirklichen Körper den Vorstellungen der Homogenität, welche wir zugrunde gelegt haben, sehr wenig entsprechen; es ist ja bekannt genug, daß die Festigkeitsverhältnisse in der Nähe der Oberfläche, auf welche es uns hier ankommt, häufig ganz andere sind, als diejenigen im Inneren der Körper. Ich selber habe nur wenige Versuche am Glase angestellt. Im Glase und allen ähnlichen Körpern besteht die erste Überschreitung der Elastizitätsgrenze in einem kreisförmigen Sprunge, der in der Oberfläche am Rande der Druckellipse entsteht und sich bei wachsendem Drucke nach außen kegelförmig ins Innere verbreitet. Wächst der Druck weiter, so umschließt diesen Sprung ein zweiter, der sich gleichfalls ins Innere fortsetzt, dann diesen ein dritter u. s. f., natürlich wird die Erscheinung immer unregelmäßiger.

Aus den Drucken sowohl, welche nötig sind, um unter gegebenen Umständen den ersten Sprung zu veranlassen, als auch aus der Gröfse dieses Sprunges, erhält man die Härte des Glases; ich fand so aus Versuchen, bei welchen ich eine harte Stahllinse gegen Spiegelglas presste, für die Härte des letzteren 130 bis 140 kg/mm²; aus den Erscheinungen, welche beim Zusammenstofse zweier Glaskugeln eintraten, konnte ich auf eine Härte von 150 schliessen, während sich aus den Sprungfiguren beim Zusammenpressen zweier dünner Glasstäbe mit natürlicher Oberfläche eine weit gröfsere Zahl, 180 bis 200, ergab. Zum Teil mögen diese Abweichungen in den Unvollkommenheiten der Versuche begründet sein (da auch dieselbe Versuchsanordnung ziemlich beträchtliche Abweichungen der einzelnen Resultate gab), zum Teil aber sind sie ohne Zweifel in der mangelhaften Homogenität und der verschiedenen Oberflächenfestigkeit begründet. Ergeben sich so grofse Schwankungen wie die erwähnten als die Regel, so verlieren natürlich die aus unserer Theorie gezogenen numerischen Resultate ihre Bedeutung; unsere Betrachtungen geben dann immer noch einen Mafsstab ab für den Wert, welcher exakten Messungen über die Härte überhaupt beizulegen ist.