Gesammelte Werke

Schriften vermischten Inhalts

Hertz, Heinrich

Vaduz/Liechtenstein, 1987

5. Über die Berührung fester elastischer Körper

5. Über die Berührung fester elastischer Körper.

Aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 92, S. 156—171, 1881.

In der Theorie der Elasticität werden als Ursachen der Deformationen teils Kräfte, welche auf das Innere der Körper wirken, teils auf die Oberfläche wirkende Druckkräfte angenommen. Für beide Arten von Kräften kann der Fall eintreten, dafs dieselben in einzelnen unendlich kleinen Teilen der Körper unendlich grofs werden, so zwar, dafs die Integrale der Kräfte, über diese Teile genommen, einen endlichen Wert behalten. Beschreiben wir alsdann um den Unstetigkeitspunkt eine geschlossene Fläche, deren Dimensionen sehr klein gegen die Dimensionen des ganzen Körpers sind, sehr grofs hingegen im Vergleich zu den Dimensionen des Teiles, in welchem die Kräfte angreifen, so können die Deformationen aufserhalb und innerhalb dieser Fläche ganz unabhängig von einander betrachtet werden. Aufserhalb hängen die Deformationen ab von der Gestalt des Gesamtkörpers, der Verteilung der übrigen Kräfte und den endlichen Integralen der Kraftkomponenten im Unstetigkeitspunkte; innerhalb hängen sie nur ab von der Verteilung der im Inneren selbst angreifenden Kräfte. Die Drucke und Deformationen im Inneren sind gegen die im Aufseren unendlich grofs.

Im Folgenden wollen wir einen hierher gehörigen Fall behandeln, der praktisches Interesse hat[1]), den Fall nämlich, dafs zwei elastische isotrope Körper sich in einem sehr kleinen Teile ihrer Oberfläche berühren, und durch diesen Teil einen

[1]) Vgl. Winkler, Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867; I. S. 43. — Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. Berlin 1878; S. 49—54.

endlichen Druck der eine auf den anderen ausüben. Die sich berührenden Oberflächen stellen wir uns als vollkommen glatt vor, d. h. wir nehmen nur einen senkrechten Druck zwischen den sich berührenden Teilen an. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wollen wir die Druckfläche, die Begrenzung dieses Stückes die Druckfigur nennen. Die Fragen, deren Beantwortung uns naturgemäfs zunächst obliegt, sind die nach der Fläche, von welcher die Druckfläche ein unendlich kleiner Teil ist[1]), die Frage nach der Form und absoluten Gröfse der Druckfigur, die Frage nach der Verteilung des senkrechten Druckes in der Druckfläche. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung der Maximaldrucke, welche in den an einander geprefsten Körpern vorkommen, insofern es von diesen abhängt, ob der Druck ohne bleibende Deformation ertragen wird; von Interesse ist endlich die Annäherung der beiden Körper, welche durch einen bestimmten Gesamtdruck hervorgerufen wird.

Als gegeben haben wir zu betrachten die beiden Elasticitätskonstanten eines jeden der sich berührenden Körper, die Form und gegenseitige Lage der Oberflächen in der Nähe des Berührungspunktes, endlich den Gesamtdruck. Unsere Mafse wollen wir so wählen, dafs die Druckfläche endlich erscheint, dann gelten unsere Betrachtungen für das ganze endliche Gebiet, die Gesamtdimensionen der sich berührenden Körper aber haben wir uns als unendlich vorzustellen.

Wir denken uns zunächst die beiden Oberflächen in mathematische Berührung gebracht, und zwar so, dafs die gemeinsame Normale parallel ist der Richtung des Druckes, welchen der eine Körper auf den anderen ausüben soll. In der gemeinsamen Tangentialebene richten wir das orthogonale geradlinige System der x, y ein, dessen Nullpunkt der Berührungspunkt sein soll, die dritte senkrechte Koordinate heifse z. Der Ab-

[1]) Im allgemeinen ändern sich die Krümmungsradien der Oberfläche eines deformierten Körpers nur unendlich wenig, in unserem speziellen Falle hingegen ändern sie sich um endliche Gröfsen, und hierin liegt die Berechtigung obiger Frage. Berühren sich z. B. zwei gleiche Kugeln von gleichem Material, so gehört die Druckfläche einer Ebene an, also einer Fläche, die von jeder der sich berührenden Oberflächen ihrer Natur nach verschieden ist.

stand jedes Punktes der beiden Oberflächen von der Tangentialebene in der Nähe des Berührungspunktes, d. h. im ganzen endlichen Gebiet, wird durch eine homogene Funktion zweiten Grades in x und y dargestellt sein. Es wird daher auch der Abstand zweier korrespondierender Punkte der beiden Oberflächen durch eine solche Funktion dargestellt sein, und zwar wollen wir das System der x und y so drehen, dafs aus der letztgenannten Funktion das Glied in xy wegfällt.

Wir können dann die Gleichungen der beiden Oberflächen schreiben:

$$z_1 = A_1 x^2 + Cxy + B_1 y^2\,, \qquad z_2 = A_2 x^2 + Cxy + B_2 y^2\,,$$

und wir haben für den Abstand korrespondierender Punkte beider Oberflächen $z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2$, wo $A = A_1 - A_2$, $B = B_1 - B_2$ und alle A, B, C als verschwindend klein zu betrachten sind[1]). A und B haben nach der Bedeutung der Gröfse $z_1 - z_2$ das gleiche Vorzeichen; wir wollen dasselbe als positiv annehmen. Dies fällt zusammen mit der Bestimmung, dafs die positive zAxe in das Innere desjenigen Körpers gehe, auf welchen sich der Index 1 bezieht.

Wir denken uns weiter in jedem der beiden Körper ein besonderes mit dem betreffenden Körper im Unendlichen starr verbundenes rechtwinklig-geradliniges Koordinatensystem, welches während der mathematischen Berührung der Oberfläche mit dem entsprechenden Teile des bisherigen Systemes der xyz zusammenfällt. Bei einem auf die Körper ausgeübten Drucke werden sich diese Koordinatensysteme parallel der

[1]) Es seien ϱ_{11} und ϱ_{12} die beiden reziproken Hauptkrümmungsradien der Oberfläche des einen Körpers, positiv gerechnet, wenn die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte im Innern dieses Körpers liegen, ebenso seien ϱ_{21} und ϱ_{22} die beiden Hauptkrümmungen der Oberfläche des anderen Körpers, endlich sei ω der Winkel, welchen die Ebenen der Krümmungen ϱ_{21} und ϱ_{22} mit einander bilden. Dann ist

$$2(A + B) = \varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22}\,,$$

$$2(A - B) = \sqrt{(\varrho_{11} - \varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11} - \varrho_{12})(\varrho_{21} - \varrho_{22})\cos 2\omega + (\varrho_{21} - \varrho_{22})^2}\,.$$

Führen wir einen Hilfswinkel ι ein durch die Gleichung $\cos\iota = (A - B)/(A + B)$, so ist

$$2A = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\cos^2\frac{\iota}{2}, \quad 2B = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\sin^2\frac{\iota}{2}\,.$$

zAxe gegen einander verschieben und zwar wird ihre Verschiebung gleich sein der Annäherung der von der Druckstelle unendlich entfernten Teile beider Körper. Es wird nicht nötig sein, für diese Koordinatensysteme besondere Bezeichnungen einzuführen. Die Ebene $z = 0$ in jedem dieser Systeme ist der Oberfläche des betreffenden Körpers im Endlichen unendlich nahe und kann daher als die Oberfläche selbst angesehen werden, ebenso die Richtung der zAxe als die Richtung der Normale zu dieser Oberfläche.

Es seien ξ, η, ζ die Verschiebungen nach x, y, z; mit Y_x werde die Druckkomponente in Richtung der y bezeichnet, welche in einem Flächenelemente, dessen Normale die x-Richtung hat, von dem Körperteile, in dem x kleinere Werte besitzt, auf denjenigen, in dem x gröfser ist, ausgeübt wird, und die analoge Bezeichnung gelte für die übrigen Druckkomponenten; es seien endlich $K_1\,\theta_1$ und $K_2\,\theta_2$ die Elasticitätskoefficienten des einen und des anderen Körpers. Allgemein mögen die Gröfsen, welche sich auf den einen oder den anderen der beiden Körper beziehen, durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden; wo die Rechnungen sich gleichmäfsig auf beide beziehen, lassen wir die Indices fort. Wir haben nun folgende Bedingungen für das Gleichgewicht:

1. Im Inneren jedes Körpers mufs sein

$$0 = \Delta\xi + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad 0 = \Delta\eta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad 0 = \Delta\zeta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z},$$

$$\sigma = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

und zwar ist in 1 für θ θ_1, in 2 für θ θ_2 zu setzen.

2. An den Grenzen müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

a) Im Unendlichen verschwinden ξ, η, ζ, da hier unsere Koordinatensysteme mit den Körpern starr verbunden sind;

b) für $z = 0$, das heifst für die Oberflächen der Körper, müssen die Tangentialkräfte, die senkrecht zur zAxe sind, verschwinden, also:

$$Y_z = -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = 0\ , \qquad X_z = -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) = 0\ ;$$

c) für $z = 0$ mufs ferner aufserhalb eines gewissen Teiles dieser Ebene, nämlich aufserhalb der Druckfläche, auch die Normalkraft verschwinden, also sein

$$Z_z = 2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \theta\,\Theta\right) = 0 \quad .$$

Innerhalb jenes Teiles mufs sein

$$Z_{z1} = Z_{z2} \quad .$$

Die Verteilung des Druckes in jenem Teile kennen wir nicht, dafür haben wir hier eine Bedingung für die Verschiebung ζ:

d) Bezeichnet nämlich α die Verschiebung gegen einander der beiden Koordinatensysteme, auf welche wir die Verrückungen beziehen, so ist der Abstand korrespondierender Punkte beider Oberflächen nach der Deformation gleich $Ax^2 + By^2 + \zeta_1 - \zeta_2 - \alpha$, und da innerhalb der Druckfläche dieser Abstand verschwinden soll, mufs obiger Ausdruck gleich Null sein, also sein:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 = \alpha - z_1 + z_2 \quad .$$

e) Zu den aufgezählten Bedingungen treten dann noch die, dafs im Inneren der Druckfläche Z_z überall das positive Vorzeichen habe, sowie die, dafs aufserhalb der Druckfläche $\zeta_1 - \zeta_2 > \alpha - Ax^2 - By^2$ sei, da sonst der eine Körper in den anderen überquellen müfste.

f) Endlich mufs das Integral $\int Z_z\,ds$, genommen über den von der Druckfigur begrenzten Teil der Oberfläche gleich dem gegebenen Gesamtdruck, den wir p nennen wollen, sein.

Die besondere Form der Oberfläche ber beiden Körper kommt nur in der Grenzbestimmung 2d) vor, abgesehen von dieser verhält sich jeder derselben wie ein unendlich grofser Körper, der den ganzen Raum auf einer Seite der Ebene $z = 0$ ausfüllt, während auf diese Ebene nur senkrechte Drucke wirken. Das Gleichgewicht eines solchen Körpers betrachten wir daher näher. Sei P eine Funktion, welche innerhalb des Körpers der Gleichung $\Delta P = 0$ genügt; im besonderen wollen wir uns P vorstellen als Potential einer auf der Ebene $z = 0$ im Endlichen verteilten Elektricitätsmenge. Sei ferner

$$\Pi = -\frac{zP}{K} + \frac{1}{K(1+2\theta)}\left\{\int_z^i P\,dz - J\right\},$$

wo i eine unendliche Gröfse sein soll und J eine Konstante, die so gewählt ist, dafs Π endlich wird. Zu diesem Behufe wird J gleich sein müssen dem natürlichen Logarithmus von i, multipliziert mit der Gesamtmenge freier Elektricität, die dem Potentiale P entspricht. Aus der Festsetzung für Π folgt:

$$\Delta\Pi = -\frac{2}{K}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Wir setzen nun, nach Einführung der Abkürzung

$$\frac{2(1+\theta)}{K(1+2\theta)} = \vartheta:$$

$$\xi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial\Pi}{\partial z} + 2\vartheta P,$$

$$\sigma = \Delta\Pi + 2\vartheta\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Man überzeugt sich leicht, dafs das vorgelegte System von Verschiebungen den für ξ, η, ζ aufgestellten Differentialgleichungen genügt, und dafs in der Unendlichkeit diese Verschiebungen verschwinden. Für die Komponenten der Drucke erhalten wir:

$$X_x = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\},$$

$$Y_y = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\},$$

$$Z_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\theta)}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\},$$

$$X_y = -2K\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y},$$

$$X_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial x}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z},$$

$$Y_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial y}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}.$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt, dafs für das vorgelegte System in der Ebene $z = 0$ die zur z Axe senkrechten Tangentialkräfte verschwinden. Wir bestimmen noch die Verschiebung ζ und den Normaldruck Z_z für die Ebene $z = 0$; wir finden

$$\zeta = \vartheta P \quad , \quad Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z} \, .$$

Die Dichtigkeit der Elektricität, welche zum Potentiale P gehört, ist gleich $-(1/2\pi)(\partial P/\partial z)$, wir erhalten daher den Satz: Die Verschiebung ζ in der Oberfläche, welche dem Normaldruck Z_z entpricht, ist gleich dem $\vartheta/4\pi$fachen des Potentials, welches zu einer dem Druck Z_z numerisch gleichen elektrischen Dichtigkeit gehört.

Indem wir nun die Betrachtung der **beiden** Körper wieder aufnehmen, denken wir uns die Elektricität, deren Potential P ist, nur in einem begrenzten Teile der Ebene $z = 0$ verbreitet, setzen Π_1 und Π_2 den Ausdrücken gleich, die aus dem für Π gegebenen Ausdrucke entstehen, wenn den Zeichen K und θ der Index 1 oder 2 gegeben wird, und machen:

$$\xi_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \quad , \quad \eta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} \quad , \quad \zeta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P \quad ,$$

$$\xi_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} \quad , \quad \eta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} \quad , \quad \zeta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - 2\vartheta_2 P \quad ,$$

woraus für $z = 0$ folgt:

$$\zeta_1 = \vartheta_1 P \quad , \quad \zeta_2 = \vartheta_2 P \quad , \quad Z_{z1} = -2\frac{\partial P}{\partial z} \quad , \quad Z_{z2} = 2\frac{\partial P}{\partial z} \, .$$

Bei dieser Annahme wird den gemachten Auseinandersetzungen zufolge den Bedingungen 1, 2a) und 2b) genügt. Da $\partial P/\partial z$ auf beiden Seiten der Ebene $z = 0$ entgegengesetzte Werte hat und verschwindet aufserhalb der elektrischen Fläche, deren Potential P ist, so sind durch den gemachten Ansatz auch die Bedingungen 2c) erfüllt, falls die Druckfläche die mit Elektricität belegte Fläche ist. Daraus, dafs P an der Fläche $z=0$ stetig ist, folgt ferner für diesen Wert von z: $\vartheta_2\zeta_1 + \vartheta_1\zeta_2 = 0$. Nach der Bedingung 2d) aber haben wir für die Druckfläche: $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - z_1 + z_2$, also wird hier:

$$\zeta_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2) \quad , \quad \zeta_2 = -\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2) \quad .$$

Die Gleichung der Druckfläche ist, wenn wir von einer Konstanten, die von der Wahl des Koordinatensystems abhängt und daher bedeutungslos ist, absehen, $z = z_1 + \zeta_1 = z_2 + \zeta_2$, also entwickelt $(\vartheta_1 + \vartheta_2) z = \vartheta_2 z_1 + \vartheta_1 z_2$. Hiernach ist die Druckfläche Teil einer Fläche zweiten Grades, die zwischen den sich berührenden Flächen in deren undeformiertem Zustande liegt, sie ist ähnlicher der Begrenzung desjenigen Körpers, dessen Elasticitätskoefficient gröfser ist; sind beide Körper von demselben Material, so ist sie geradezu die Mittelfläche zwischen deren Oberflächen, da dann $2z = z_1 + z_2$ wird.

Wir machen jetzt eine bestimmte Annahme über die Anordnung der Elektricität, deren Potential P ist. Sie sei verbreitet auf einer Ellipse, deren Halbaxen a und b in die Richtung der Axen der x und y fallen, mit einer Dichtigkeit, die gleich

$$\frac{3p}{8\pi^2 ab}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ist, das heifst so, dafs sie aufgefafst werden kann als eine Masse, die mit gleicher räumlicher Dichtigkeit ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid erfüllt. Es ist dann

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \,.\, b^2+\lambda \,.\, \lambda}}\, d\lambda \quad ,$$

wo die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{u} = 1$$

bezeichnet. Für das Innere der Druckfläche, welche durch die genannte Ellipse begrenzt wird, ist $u = 0$, also $P = L - Mx^2 - Ny^2$, wo L, M, N gewisse bestimmte positive Integrale bedeuten. Die Bedingung 2d) ist demnach erfüllt, wenn wir a und b so bestimmen, dafs

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) M = A \quad , \quad (\vartheta_1 + \vartheta_2) N = B$$

wird, was immer möglich ist. Die in der Bedingung vorkommende Unbekannte α bestimmt sich dann durch die Gleichung

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) L = \alpha \quad .$$

Dafs die erste der Bedingungen 2e) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$Z_x = \frac{3p}{2\pi ab}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \; .$$

Um zu zeigen, dafs es auch die zweite ist, ist zu beweisen, dafs für $z = 0$ und $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$, $(\vartheta_1 + \vartheta_2) P > \alpha - Ax^2 - By^2$ ist. Zu diesem Zwecke beachte man, dafs hier:

$$P = L - Mx^2 - Ny^2 - \frac{3p}{16\pi}\int_0^u \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \,.\, b^2+\lambda \,.\, \lambda}}\, d\lambda$$

und daher, da der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks im betrachteten Gebiete negativ ist, $P > L - Mx^2 - Ny^2$. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\vartheta_1 + \vartheta_2$ folgt die, welche wir zu beweisen suchten. Dafs endlich auch die letzte Bedingung 2f) erfüllt ist, ergiebt eine einfache Integration, und wir besitzen daher in der angenommenen Form von P und dem zugehörigen System der $\xi\eta\zeta$ eine allen Bedingungen genügende Lösung.

Die Gleichungen für die Axen der Druckellipse werden, explicite geschrieben:

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2}\,\frac{16\pi}{3p} \; ,$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3 u}} = \frac{B}{\vartheta_1 + \vartheta_2}\,\frac{16\pi}{3p} \; ,$$

oder, nach Einführung des Verhältnisses $a{:}b = k$ und einer einfachen Umformung:

$$\frac{1}{a^3}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)^3(1+z^2)}} = \frac{8\pi}{3p}\,\frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,,$$

$$\frac{1}{a^3}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{k^2\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)^3}} = \frac{8\pi}{3p}\,\frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,.$$

Durch Division wird eine transcendente Gleichung für das Verhältnis k erhalten.[1]) Dasselbe hängt nur ab von dem Verhältnisse $A:B$, und man erkennt leicht aus der Bedeutung, welche wir den Kräften und Verschiebungen untergelegt haben, dafs die Druckellipse immer länglicher ist, als die Ellipsen, in welchen der Abstand der beiden Körper konstant ist. Für die absolute Gröfse der Druckfläche folgt, dafs dieselbe bei gegebener Form der Oberflächen portortional ist der dritten Wurzel aus dem Drucke, sowie der dritten Wurzel aus der Gröfse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Für die Annäherung der Körper durch den Druck haben wir nach dem Vorigen:

---

[1]) Die Auflösung dieser Gleichung und die Auswertung der zur Bestimmung von a und b notwendigen Integrale kann mit Hilfe der Legendre'schen Tafeln ausgeführt werden, ohne dafs neue Quadraturen nötig würden. Die immerhin weitläufige Rechnung wird für die meisten Fälle überflüssig gemacht durch die folgende kleine Tabelle, deren Einrichtung diese ist. Drückt man die Gröfsen A und B in den Gleichungen für a und b durch die Hauptkrümmungen und den in einer früheren Anmerkung eingeführten Hilfswinkel τ aus, so lassen sich die Auflösungen dieser Gleichungen in der Form darstellen:

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}\,,\qquad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}\,,$$

wo μ und ν transcendente Funktionen des Winkels τ sind. Die Tabelle giebt nun die Werte dieser Funktionen für zehn Werte des in Winkelgraden angegebenen Argumentes τ.

$$\alpha = \frac{3p}{8\pi} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)}} .$$

Führen wir die Multiplikation mit der Summe $\vartheta_1 + \vartheta_2$ aus, so zerfällt α in zwei Summanden, die eine besondere Bedeutung haben; es sind die Annäherungen des Nullpunktes an die unendlich entfernten Teile des einen und des anderen Körpers; wir können sie bezeichnen als die Einsenkungen, die der eine und der andere Körper erlitten hat. Bei gleicher Gestalt der sich berührenden Oberflächen ist die Annäherung proportional der $\frac{2}{3}$ten Potenz des Druckes und der gleichen Potenz der Gröfse $\vartheta_1 + \vartheta_2$. Ändern A und B unter Beibehaltung ihres Verhältnisses ihren absoluten Wert, so ändern sich die Dimensionen der Druckfläche umgekehrt wie die dritten Wurzeln aus diesem Werte, die Annäherung direkt wie diese Wurzeln. Werden A und B unendlich, so wird auch die Annäherung unendlich; Körper, welche sich mit scharfen Spitzen berühren, dringen in einander ein.

Hieran anknüpfend wollen wir die Beanspruchung desjenigen Elementes bestimmen, welches sich im Anfangspunkte unseres Koordinatensystems befindet, indem wir die drei Ausdehnungen $\partial\xi / \partial x$, $\partial\eta / \partial y$, $\partial\zeta / \partial z$ suchen. Wir haben zunächst für den Nullpunkt:

$$\sigma = \frac{2}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi} \frac{1}{ab} ,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi} \frac{1}{ab} .$$

Weiter haben wir für die Ebene $z = 0$:

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} , \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y} ,$$

$$\Pi = \frac{1}{K(1+2\theta)} \int_0^\infty P dz = \frac{1}{2K(1+2\theta)} \int_{-\infty}^\infty P dz .$$

Man erkennt, dafs in der gedachten Ebene ξ und η proportional sind den Kräften, welche ein unendlicher elliptischer Cylinder ausübt, der auf der Druckfläche steht und dessen Dichtigkeit nach innen zunimmt nach demselben Gesetze, nach welchem der Druck in der Druckfläche zunimmt. Im allgemeinen sind also ξ und η durch verwickelte Funktionen gegeben; für die Punkte, welche der Axe nahe liegen, lassen sie sich indessen leicht berechnen. Wir schneiden um die Axe einen sehr dünnen Cylinder heraus, dessen Mantelfläche der Mantelfläche des ganzen ähnlich ist; diesen Cylinder können wir als homogen betrachten, und da der äufsere Teil auf die Punkte im Innern keine Anziehung ausübt, so müssen die Komponenten der in Rede stehenden Kräfte, und also auch ξ und η für die verschiedenen Punkte gleich sein einer Konstanten, multipliziert mit respektive x/a und y/b. Daraus folgt

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x} - b\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \quad .$$

Andererseits haben wir

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = \sigma - \frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab} \quad .$$

Hieraus finden wir nun für die drei Gröfsen, die wir suchten,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{a(a+b)} \quad ,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{b(a+b)} \quad ,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab} \quad .$$

Das negative Vorzeichen dieser drei Gröfsen zeigt an, dafs das in Frage stehende Element in allen drei Richtungen komprimiert wird. Die Kompressionen sind der dritten Wurzel aus dem Gesamtdrucke proportional. Aus ihnen sind leicht die Drucke im Anfangspunkte zu bestimmen. Diese Drucke sind die gröfsten, welche überhaupt in den geprefsten Körpern vorkommen; man kann daher behaupten, dafs ein Überschreiten der Elasticitätsgrenze nicht eher statthaben wird, als bis diese Drucke von der Ordnung derjenigen werden, welche ein solches

Überschreiten veranlassen können. In plastischen Körpern, z. B. in den weichen Metallen, wird dies Überschreiten zunächst in einer seitlichen Ausweichung, verbunden mit dauernder Kompression bestehen, dasselbe wird daher auch nicht eine ins Unendliche wachsende Störung des Gleichgewichtes zur Folge haben, sondern die Druckfläche wird sich so lange über das berechnete Mafs hinaus vergröfsern, bis der Druck auf die Flächeneinheit hinreichend klein geworden ist, um ertragen zu werden. Schwieriger ist es, die Erscheinung in spröden Körpern, wie hartem Stahl, Glas, Krystallen zu bestimmen, in welchen eine Überschreitung der Elasticitätsgrenze nur als Entstehung eines Risses oder Sprunges, also nur unter dem Einflusse von Zugkräften auftritt. Von dem oben betrachteten Elemente, als von einem allseitig komprimierten, kann ein solcher Sprung nicht ausgehen, und es ist bei unserer heutigen Kenntnis von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht möglich, genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsendem Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere Diskussion so viel, dafs in Körpern, welche in ihrem elastischen Verhalten dem Glase oder harten Stahle ähnlich sind, bei weitem die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Diskussion wahrscheinlich, dafs der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft.

Die gefundenen Formeln werden besonders einfach für den Fall, dafs beide sich berührenden Körper Kugeln sind. In diesem Falle gehört auch die Druckfläche einer Kugel an. Ist ϱ der reciproke Radius der letzteren und sind ϱ_1 und ϱ_2 die reciproken Radien der sich berührenden Kugeln, so besteht die Beziehung $(\vartheta_1+\vartheta_2)\varrho = \vartheta_2\varrho_1+\vartheta_1\varrho_2$, welche für Kugeln aus gleichem Material in die einfachere $2\varrho = \varrho_1+\varrho_2$ übergeht. Die Druckfigur ist ein Kreis, dessen Radius wir a nennen wollen. Setzen wir

$$x^2+y^2=r^2\ , \qquad \frac{r^2}{a^2+u}+\frac{z^2}{u}=1\ ,$$

so wird

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1 - \frac{r^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{u}}{(a^2+u)\sqrt{u}}\,du\ ,$$

welches Integral sich auch in geschlossener Form darstellen läfst.

Man findet nun leicht für den Radius des Druckkreises a und für die Annäherung α der Kugeln sowie für die Verschiebung ζ in der Fläche $z = 0$, innerhalb des Druckkreises:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16(\varrho_1 + \varrho_2)}}\ , \qquad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a}\ ,$$

$$\zeta = \frac{3p}{32}\,\vartheta\,\frac{2a^2 - r^2}{a^3}\ .$$

Aufserhalb des Druckkreises wird ζ durch eine etwas verwickeltere, einen arctg enthaltende Funktion dargestellt. Sehr einfache Ausdrücke ergeben sich für ξ und η in der Fläche $z = 0$. Für die Verdichtung in der Fläche $z = 0$ findet man

$$\sigma = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi}\,\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a^3}$$

innerhalb des Druckkreises, aufserhalb desselben ist $\sigma = 0$. Für den Druck Z_z innerhalb des Druckkreises wird erhalten

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi}\,\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a^3}\ .$$

Im Mittelpunkte hat man

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi a^2}\ , \qquad X_x = Y_y = \frac{1+4\theta}{4(1+2\theta)}\,\frac{3p}{\pi a^2}\ .$$

Die erlangten Formeln lassen sich ohne weiteres auf besondere Fälle anwenden. Für θ kann man in den meisten Körpern mit hinreichender Annäherung 1 setzen. K wird dann gleich $\frac{3}{8}$ des Elasticitätsmoduls, ϑ wird gleich $\frac{32}{9}$ des reciproken Wertes des Elasticitätsmoduls; in allen Körpern liegt ϑ zwischen dem Dreifachen und dem Vierfachen dieses reciproken Wertes. Prefst man beispielshalber eine Glaslinse von 100 Meter Radius durch das Gewicht eines Kilogrammes gegen eine ebene Glasplatte (unter welchen Umständen der Radius des ersten NEWTON'schen Ringes gleich ca. 5,2 Millimetern wird), so erhält man eine Druckfläche, die einer Kugel von 200 Meter Radius angehört, der Radius des Druckkreises ist 2,67 mm, die Annäherung der beiden Glaskörper beträgt nur 71 Milliontel Millimeter, der Druck Z_z in der Mitte der Druckfläche ist gleich 0,0669 Kilogramm pro Quadratmillimeter, die dazu senkrechten Drucke X_x und Y_y betragen ca. $\frac{5}{8}$ obigen Wertes. Denken wir uns als zweites Beispiel eine Reihe von Stahlkugeln vom Radius R durch ihre eigene Schwere gegen eine horizontale starre Platte geprefst, so findet man sehr nahezu, in Millimetern gerechnet, den Radius des Druckkreises $a = \frac{1}{1000} R^{\frac{4}{3}}$; also für eine Kugel vom Radius

	1 mm,	1 m,	1 km,	1000 km,
wird	$a =$ ca. $\frac{1}{1000}$ mm,	10 mm,	100 m,	1000 km,
oder $a =$	$\frac{1}{1000}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{1}$

des Radius. Bei Kugeln, deren Radius grösser als 1 km ist, beträgt der Radius des Druckkreises schon mehr als $\frac{1}{10}$ des Radius der Kugel. Auf solche Verhältnisse finden unsere Rechnungen keine Anwendung, da wir eben dies Verhältnis als einen kleinen Bruch voraussetzten. Aber eben dafs in Kugeln von dieser Gröfse bei kleinen Deformationen ein Gleichgewicht nicht mehr möglich ist, zeigt, dafs ein solches überhaupt nicht zu stande kommen kann. Denken wir uns als ein anderes Beispiel zwei Stahlkugeln von gleichem Radius R aneinander gelegt und nur durch die gegenseitige Gravitation aneinander geprefst. Es ergiebt sich hier der Radius des Druckkreises $\varrho = 0{,}000000378\, R^{\frac{5}{3}}$, wenn in Millimetern gerechnet wird.[1]) Ist der Radius der beiden Kugeln gleich 4,3 Kilometern, so wird $\varrho = \frac{1}{100} R$, ist er gleich 136 Kilometern, so wird $\varrho = \frac{1}{10} R$. Zwischen beiden Werten und näher dem letzteren wird derjenige Wert von R liegen, für welchen

---

[1]) In diesen Rechnungen ist der Elasticitätsmodul des Stahles zu 20000 kg/mm², die Dichtigkeit des Stahls zu 7,7, die mittlere der Erde zu 6 angenommen.

die Elasticitätskräfte aufhören, der Gravitation das Gleichgewicht zu halten. Werden Stahlkugeln von gröfserem Radius aneinander gelegt, so werden sie zerbrechen, und zwar in Teile, deren Dimensionen von der Ordnung der eben für R angegebenen Werte sind.

Zum Schlufs wollen wir von den erlangten Formeln eine Anwendung machen auf den Stofs elastischer Körper. Sowohl aus schon vorhandenen Beobachtungen, als auch aus den Resultaten der gleich anzustellenden Betrachtungen folgt, dafs die Stofszeit, d. h. die Zeit, während welcher die stofsenden Körper in Berührung sind, wenn auch absolut sehr klein, doch sehr grofs ist im Verhältnis zu derjenigen Zeit, welche elastische Wellen nötig haben, um in den in Rede stehenden Körpern Längen von der Ordnung desjenigen Teils der Oberflächen zu durchlaufen, welcher beiden Körpern in ihrer gröfsten Annäherung gemeinsam ist, und welchen wir die Stofsfläche nennen wollen. Daraus folgt, dafs der elastische Zustand beider Körper in der Nähe des Stofspunktes während des ganzen Verlaufs des Stofses sehr nahezu gleich ist dem Gleichgewichtszustande, den der zwischen beiden Körpern in jedem Augenblicke vorhandene Gesamtdruck bei längerer Dauer hervorbringen würde. Bestimmen wir daher den zwischen beiden Körpern herrschenden Druck aus der Beziehung, welche wir zwischen diesem Drucke und der Annäherung in Richtung der gemeinsamen Normale früher für ruhende Körper aufgestellt haben, und wenden im übrigen auf das Innere jedes der beiden Körper die Differentialgleichungen für bewegte elastische Körper an, so werden wir den Verlauf des Vorganges mit grofser Annäherung erhalten. Zu allgemeinen Sätzen können wir auf diese Weise naturgemäfs nicht kommen, wir erhalten aber eine Reihe solcher, wenn wir jetzt die weitere Voraussetzung machen, dafs die Stofszeit grofs sei auch gegen diejenige Zeit, welche die elastischen Wellen nötig haben, um die ganzen Dimensionen der stofsenden Körper zu durchlaufen. Ist diese Bedingung erfüllt, so bewegen sich alle Teile der stofsenden Körper, mit Ausnahme derjenigen, welche dem Stofspunkte unendlich nahe liegen, wie die Teile starrer Körper; dass die fragliche Bedingung in wirklichen Körpern erfüllt sein kann, werden wir aus unseren Resultaten nachweisen.

Wir behalten unsere Koordinatensysteme der xyz bei. Sei α die Komponente in Richtung der z der Entfernung zweier Punkte des einen und des anderen Körpers, zweier Punkte, die so gewählt sind, dafs ihre Entfernung von der Stofsfläche klein ist gegen die Dimensionen der ganzen Körper, grofs gegen die Dimensionen der Stofsfläche; sei ferner α' die Ableitung von α nach der Zeit. Ist nun dJ diejenige Bewegungsgröfse, welche während des Zeitelementes dt der eine Körper verliert, der andere gewinnt, so ist, wie die Theorie des Stofses starrer Körper zeigt: $d\alpha' = -k_1 dJ$, wo k_1 eine Gröfse ist, die nur von den Massen der stofsenden Körper, ihren Hauptträgheitsmomenten und der Lage der Hauptträgheitsaxen zur Stofsnormale abhängt.[1]) Andererseits ist dJ gleich dem Zeitelemente dt, multipliziert mit dem während desselben zwischen den Körpern thätigen Drucke. Dieser ist aber gleich $k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$, wo k_2 eine aus dem Vorigen zu bestimmende Konstante ist, die nur von der Form der Oberflächen und den Elasticitätsverhältnissen in unmittelbarer Nähe des Stofspunktes abhängt. Sonach ist $dJ = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$ und $d\alpha' = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$, oder wenn wir integrieren, und mit α'_0 den Wert von α' unmittelbar vor dem Stofse bezeichnen:

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 + \tfrac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}} = 0 \,,$$

welche Gleichung nichts anderes ist, als die der Erhaltung der Energie. Für die gröfste Annäherung der Körper ist $\alpha' = 0$; setzen wir den entsprechenden Wert von α gleich α_m, so ist $\alpha_m = (5\alpha_0'^2 / 4k_1 k_2)^{\frac{2}{5}}$, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck ist $p_m = k_2 \alpha_m^{\frac{3}{2}}$; daraus ergeben sich ohne weiteres die Dimensionen der Stofsfläche.

Um die Abhängigkeit des Vorganges von der Zeit zu gewinnen, integrieren wir nochmals und erhalten

---

[1]) Siehe Poisson, Traité de mécanique, II, Chap. 7. In der dort benutzten Bezeichnungsweise ist die Konstante k_1

$$k_1 = \frac{1}{M} + \frac{(b\cos\gamma - c\cos\beta)^2}{A} + \frac{(c\cos\alpha - a\cos\gamma)^2}{B} + \frac{(a\cos\beta - b\cos\alpha)^2}{C}$$
$$+ \frac{1}{M'} + \frac{(b'\cos\gamma' - c'\cos\beta')^2}{A'} + \frac{(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma')^2}{B'} + \frac{(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha')^2}{C'}$$

$$t = \int_{\alpha}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}} .$$

Die obere Grenze ist so gewählt, dafs $t = 0$ wird für den Augenblick der gröfsten Annäherung. Für jeden Wert der unteren Grenze α erhält man durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel zwei gleiche positive und negative Werte von t. Es ist sonach α eine gerade, α' eine ungerade Funktion von t; unmittelbar nach dem Stofse entfernen sich die Stofspunkte in Richtung der Normalen mit derselben relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie sich vor dem Stofse einander näherten. Nach derselben transcendenten Funktion, nach welcher α' von seinem Anfangs- auf seinen Endwert übergeht, gehen alle übrigen Geschwindigkeitskomponenten von ihren Anfangswerten auf ihre Endwerte über.

Die beiden Körper berühren sich zunächst für $\alpha = 0$, sie verlassen sich, wenn α wieder gleich 0 ist; sonach ist die Dauer der Berührung oder die Stofszeit

$$T = 2 \int_0^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}} = 2\eta \sqrt[5]{\frac{25}{16 \alpha_0' k_1^2 k_2^2}} = 2\eta \frac{\alpha_m}{\alpha_0'} ,$$

wenn

$$\eta = \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^{\frac{5}{2}}}} = 1{,}4716$$

ist. Die Stofszeit kann demnach auf verschiedene Weise unendlich werden, ohne dafs diejenige Zeit, mit welcher verglichen sie grofs sein soll, gleichfalls unendlich würde. Insbesondere wird die Stofszeit unendlich, wenn die anfängliche relative Geschwindigkeit der stofsenden Körper unendlich klein ist; welches also auch im übrigen die Verhältnisse eines gegebenen Stofses sind, für hinreichend klein gewählte Geschwindigkeiten werden die gegebenen Entwickelungen jede gewünschte Genauigkeit besitzen. Allemal wird diese Genauigkeit gleich sein derjenigen, welche den sogenannten Gesetzen des Stofses vollkommen elastischer Körper für den gegebenen Fall innewohnt. Für den zentralen Stofs zweier Kugeln von gleichem Radius R

und gleichem Material von der Dichte q werden die Konstanten k_1 und k_2:

$$k_1 = \frac{3}{2R^3\pi q}\ , \quad k_2 = \frac{8}{3\vartheta}\sqrt{\frac{R}{2}}\ ,$$

speziell für den Stofs zweier gleichen Stahlkugeln vom Radius R wird daher, wenn als Einheit der Länge das Millimeter und als Einheit der Kraft das Gewicht eines Kilogramms benutzt wird:

$$\log k_1 = 8{,}78 - 3\log R\ ,$$
$$\log k_2 = 4{,}03 + \tfrac{1}{2}\log R/2\ .$$

Daraus ergiebt sich dann für zwei solcher Kugeln, die mit einer relativen Geschwindigkeit v zusammenstofsen:

der Radius der Stofsfläche . . . $a_m = 0{,}0020\, R v^{\frac{2}{5}}\,\mathrm{mm}$,
die Stofszeit . . . . $T = 0{,}000024\, R v^{-\frac{1}{5}}\,\mathrm{sec}$,
der Gesamtdruck im Augenblicke der gröfsten Annäherung . . . . $p_m = 0{,}00025\, R^2 v^{\frac{6}{5}}\,\mathrm{kg}$,
der gleichzeitig im Stofsmittelpunkte herrschende Maximaldruck pro Flächeneinheit . . . . $p'_m = 29{,}1\, v^{\frac{2}{5}}\,\mathrm{kg/mm^2}$.

Beträgt beispielsweise der Radius der Kugeln 25 mm, die Geschwindigkeit 10 mm/sec, so wird $a_m = 0{,}13$ mm, $T = 0{,}00038$ sec, $p_m = 2{,}47$ kg, $p'_m = 73{,}0\,\mathrm{kg/mm^2}$. Für zwei Stahlkugeln von der Gröfse der Erde, die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 mm/sec zusammenträfen, würde die Dauer der Berührung nahe an 27 Stunden betragen.