

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Schriften vermischten Inhalts

**Hertz, Heinrich**

**Vaduz/Liechtenstein, 1987**

2. Über die Induktion in rotierenden Kugeln

[urn:nbn:de:bsz:31-269592](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-269592)

## 2. Über die Induktion in rotierenden Kugeln.

Inaugural-Dissertation. Berlin, 15. März 1880.

Die Wechselwirkungen zwischen Magneten und rotierenden Metallmassen, welche ARAGO entdeckt hatte, wurden zuerst von FARADAY als Erscheinungen elektrodynamischer Anziehung aufgefasst und auf Ströme zurückgeführt, welche in den Metallmassen durch die Magnete induziert werden. Es gelang FARADAY, das Vorhandensein derartiger Ströme nachzuweisen, und die Natur des Phänomens als einer Induktionserscheinung aufser Zweifel zu setzen.

Der erste Versuch, die inzwischen ausgebildete Theorie auf einige hierher gehörige Erscheinungen anzuwenden, wurde im Jahre 1853 von FELICI gemacht. Es gelang demselben unter vereinfachten Bedingungen angenäherte Lösungen zu erhalten, die den Beobachtungen für das Erste hinreichend entsprachen.

Viel weiter ging im Jahre 1864 Herr JOCHMANN. Derselbe leitete, vom WEBER'schen Gesetze ausgehend, die vollständigen Differentialgleichungen des Problems ab, und integrierte dieselben für den Fall, dass der rotierende Körper eine unendlich ausgedehnte ebene Platte oder eine Kugel sei. Seine Rechnungen fanden sich in schönster Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Freilich mußte er die vereinfachende Annahme machen, dass die Rotationsgeschwindigkeit sehr klein sei, den Einfluss der Selbstinduktion vermochte er nicht zu bestimmen.

Endlich hat im Jahre 1872 Herr MAXWELL in sehr eleganter Weise die Theorie der Induktion in einer unendlich ausgedehnten, sehr dünnen Platte gegeben und gezeigt, wie sich dieselbe auf die ARAGO'sche Scheibe anwenden läßt.

In der vorliegenden Arbeit ist das Problem vollständig gelöst für den Fall, daß der betrachtete Körper eine um einen Durchmesser rotierende Kugel oder Hohlkugel sei. Die induzierenden Magnete können dabei im äußeren, oder, bei Hohlkugeln, im inneren Raum liegen. Auch auf den Fall ist die Lösung ausgedehnt, daß die Masse der Kugel magnetische Polarität anzunehmen vermag. Offenbar umschließt dies Problem die früher gelösten als spezielle Fälle.

Die erhaltenen Resultate habe ich durch einige Zeichnungen zu veranschaulichen gesucht.

### § 1. Festsetzung der Bezeichnungen.

In diesem Paragraphen sollen die Bezeichnungen festgesetzt, und einige bekannte Formeln, die ich beständig gebrauchen werde, zusammengestellt werden.

Koordinaten.

1. Das angewandte Koordinatensystem ist das in Fig. 6 dar-

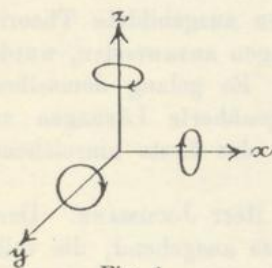


Fig. 6.

gestellte. Die als positiv geltenden Drehungsrichtungen sind in die Figur eingezeichnet. Die  $z$  Achse falle mit der Rotationsaxe zusammen. Als Polarkoordinaten mögen verwendet werden  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\theta$ .  $\omega$  entspreche der geographischen Länge, sei 0 in der  $xz$  Ebene bei positiven  $x$  und wachse im Sinne der positiven Drehung,  $\theta$  entspreche dem Komplement der

geographischen Breite und sei 0 in der positiven  $z$  Achse. Gelegentlich möge die Bezeichnung benutzt werden:

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \omega_z} = \frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \omega_y}$$

$$y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \omega_x}$$

ferner werde der Differentialquotient  $\partial/\partial\omega$  nach LAGRANGE'S Weise bezeichnet, also z. B.:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\omega} = \chi' .$$

2. Die Rechnungen seien in elektromagnetischem Mafse geführt. Im übrigen seien die Bezeichnungen für die elektrischen Größen diejenigen, welche von Herrn Geheimrat HELMHOLTZ im 72. Bande des BORCHARDT'Schen Journal's eingeführt sind.<sup>1)</sup> Es seien also:

Bezeichnung  
der  
elektrischen  
Größen.

$$u, v, w, \frac{\text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}}$$

die Dichtigkeiten der Strömung nach den  $x, y, z$ ;

$$U, V, W, \frac{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}}$$

die entsprechenden Komponenten des Vektorpotentials;

$$\varphi \frac{\text{mm}^{\frac{3}{2}} \text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}^2} \text{ )}$$

die Potentialfunktion der freien Elektrizität;

$$\kappa \frac{\text{mm}^2}{\text{sec}}$$

der spezifische Widerstand des Materiales. Der spezifische Widerstand einer Fläche von verschwindender Dicke  $\delta$ , nämlich  $\kappa/\delta$ , werde, wenn er als endlich betrachtet wird, bezeichnet mit

$$k \frac{\text{mm}}{\text{sec}} .$$

Es seien ferner:

$$\lambda, \mu, \nu, \frac{\text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}}$$

die Komponenten einer magnetischen Polarisation;

$$L, M, N, \frac{\text{mgr}^{\frac{1}{2}} \text{mm}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}}$$

<sup>1)</sup> [Wiss. Abh. Bd. 1. S. 545.]

<sup>2)</sup> Dies ist nicht elektromagnetisches Maf. In letzterem gemessen ist die Potentialfunktion der freien Elektrizität  $\varphi_m = \varphi A^2$ , wenn  $1/A$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Obige Einheit vermeidet den lästigen Faktor  $1/A^2$ .

die Potentiale der  $\lambda \mu \nu$ , letztere als Massen gedacht;

$$\theta \quad (0)$$

die magnetische Polarisationskonstante;

$$\chi \frac{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}}$$

das magnetische Potential; jedoch soll nur derjenige Teil desselben so bezeichnet werden, welcher thatsächlich von Magneten herrührt, das magnetische Potential der induzierten Strömungen sei

$$\Omega \frac{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}} .$$

$\Omega$  verliert seine Bedeutung in der Masse der Hohlkugel, kann also durch dieselbe nicht fortgesetzt werden, ist also eindeutig im innern und äussern Raum.

Mit

$$\psi' \frac{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}}$$

werde die Strömungsfunktion in einer unendlich dünnen Hohlkugel bezeichnet. Um jede Zweideutigkeit im Bezug auf die Vorzeichen zu vermeiden, ist hier die Bestimmung für  $\psi'$ : Wächst bei Durchlaufung einer Strecke  $ds$   $\psi'$  um  $d\psi'$ , so ist  $d\psi'$  die den zurückgelegten Weg von der linken zur rechten Seite in der Zeiteinheit durchströmende positive Elektrizitätsmenge. Bei Durchlaufung des Weges sind die Füsse gegen den Mittelpunkt der Kugel, das Angesicht gegen das Ziel gewandt zu denken.

Da wir es im folgenden nur mit Strömungen zu thun haben, die in konzentrischen Kugelschalen um den Nullpunkt erfolgen, so können und wollen wir

$$\psi \frac{\text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}}$$

etwas allgemeiner definieren als eine Funktion von  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\omega$ , derart, daß

$$da \cdot \psi'(\rho=a)$$

die Strömungsfunktion der Schicht zwischen  $\rho=a$  und  $\rho=a+da$  darstellt.

Den angeführten Größen sind zur Bequemlichkeit ihre Einheiten beigelegt.

3. Der äußere Radius der betrachteten Hohlkugel sei  $R$ , der innere  $r$ . Die Drehungsgeschwindigkeit der Kugel sei  $\omega$ .

Maße der betrachteten Kugel.

4. Wird eine Funktion  $\chi$ , die in einem beliebigen Raum der Gleichung  $\Delta\chi = 0$  genügt, nach Kugelfunktionen entwickelt, so soll  $\chi_n$  dasjenige Glied bezeichnen, welches den Faktor  $\rho^n$  enthält, und diese Bezeichnung soll, wenn nicht näheres bestimmt wird, auch negative  $n$  umfassen.

Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Bei weiterer Zerlegung von  $\chi_n$  gelte die Bezeichnung: für positive  $n$ :

$$\chi_n = \rho^n Y_n \quad ,$$

für negative  $n$ :

$$\chi_n = \rho^n Y_{-n-1} \quad ,$$

$$Y_n = \sum_0^n (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) P_{ni}(\theta) \quad .$$

Für alle  $n$  gelten die Gleichungen:

$$\Delta\chi_n = 0 \quad ,$$

$$x \frac{\partial \chi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} = n \chi_n \quad .$$

Die  $m$ ten Differentialquotienten von  $\chi_n$  nach den  $xyz$  sind Kugelfunktionen  $(n-m)$ ter Ordnung, sofern nicht ein vorangehender der nullten Ordnung wird. Die Ausdrücke

$$\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}, \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}, \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z}$$

sind Kugelfunktionen  $n$ ter Ordnung.

Ferner ist:

$$\Delta(\rho^m Y_n) = (m-n)(m+n+1)\rho^{m-2} Y_n \quad ,$$

$$x \frac{\partial(\rho^m Y_n)}{\partial x} + y \frac{\partial(\rho^m Y_n)}{\partial y} + z \frac{\partial(\rho^m Y_n)}{\partial z} = m \rho^m Y_n \quad ,$$

$$\frac{\partial(\rho^m Y_n)}{\partial \rho} = \frac{m}{\rho} (\rho^m Y_n) \quad .$$

Sätze über die Strömung in Kugelschalen. 5. Es sei  $\psi$  die Strömungsfunktion einer Kugelschale vom Radius  $R$ , es sei

$$\psi = \int \frac{\psi' ds}{r}$$

das Potential einer Masse, welche auf der Kugelschale mit der Dichtigkeit  $\psi$  verbreitet ist, so ist das Potential der Strömung:

$$\Omega = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\psi' \varrho) ,$$

und die Grössen  $UVW$  sind:

$$U = \frac{y}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{z}{R} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \omega_x} \psi$$

$$V = \frac{z}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{x}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \omega_y} \psi$$

$$W = \frac{x}{R} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{y}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \omega_z} \psi .$$

Ist  $\psi$  eine homogene Funktion  $n$  ten Grades in  $x, y, z$ , so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \psi$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \psi$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \psi .$$

Immer ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} .$$

Man findet diese Formeln entwickelt in MAXWELL's Treatise

on electricity, Vol. II, p. 276<sup>1)</sup>). Die Vorzeichen sind dort teilweise andere, es liegt dies daran, daß dort nicht unser Koordinatensystem, sondern das symmetrische angewandt ist. Das hier benutzte Koordinatensystem ist dasjenige, auf welches sich die HELMHOLTZ'schen Formeln beziehen.

6. Für die elektromotorischen Kräfte, welche die als unveränderlich vorausgesetzten Komponenten des Vektorpotentials  $UVW$  in dem mit den Geschwindigkeitskomponenten  $\alpha, \beta, \gamma$  bewegten Elemente hervorrufen, sind die Formen angenommen:

Formeln  
die elekt  
motorisch  
Kräfte.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \beta \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \gamma \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \mathfrak{Y} &= \gamma \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \alpha \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \mathfrak{Z} &= \alpha \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \beta \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) . \end{aligned}$$

Es sind dies die von Herrn JOCHMANN aufgestellten Formen. Die Abänderung, welche die Formeln des Potentialgesetzes an den Resultaten hervorrufen würden, sind in § 8 besprochen.

Wirken außer den Strömungen  $uvw$  Magnete,  $\lambda\mu\nu$ , so ist für diesen Teil der Induktion in obigen Formeln zu ersetzen:

$$U \text{ durch } \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} ,$$

$$V \text{ durch } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} ,$$

$$W \text{ durch } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .$$

Die so erhaltenen Formeln gelten auch dann, wenn sich die Magnete im Innern der rotierenden Masse befinden. Befinden sich die Magnete nur außerhalb der Masse, so wird, da in der Masse

$$\Delta L = 0 , \quad \Delta M = 0 , \quad \Delta N = 0 ,$$

<sup>1)</sup> [2. edit: p. 280.]



$$\mathfrak{X} = \beta \frac{\partial \chi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\mathfrak{Y} = \gamma \frac{\partial \chi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Z} = \alpha \frac{\partial \chi}{\partial y} - \beta \frac{\partial \chi}{\partial x} .$$

Für die Elemente unserer Kugel ist

$$\alpha = -\omega y \quad , \quad \beta = \omega x \quad , \quad \gamma = 0 .$$

### § 2. Lösung bei Vernachlässigung der Selbstinduktion.

In diesem Paragraphen soll das Problem für den Fall gelöst werden, daß von der Wirkung der Selbstinduktion abgesehen werden kann. Für die Strömungen  $u v w$  bestehen die Gleichungen:

$$xu = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{X}$$

$$xv = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{Y}$$

$$xw = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{Z}^1) ;$$

ferner, da die Strömung stationär ist, im Innern:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

und für  $\varrho = R$  und  $\varrho = r$ :

$$ux + vy + wz = 0 .$$

Hieraus ergeben sich für  $\varphi$  die Bedingungen: im Innern:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} ,$$

und an der Oberfläche:

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z} ,$$

welche  $\varphi$  bis auf eine additive Konstante bestimmen.

<sup>1)</sup> Unter Annahme der hier für  $\varphi$  gebrauchten Einheiten.

Das Potential der im äußeren und inneren Raum befindlichen Magneten sei nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$\chi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \chi_n .$$

Wir betrachten jedes Glied für sich und setzen daher das äußere Potential =  $\chi_n$ .

Dann ist

$$\mathfrak{X} = \omega x \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Y} = \omega y \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Z} = -\omega y \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - \omega x \frac{\partial \chi_n}{\partial x} = \omega z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - \omega n \chi_n .$$

Daraus folgen für  $\varphi$  die Bedingungen:  
In der Masse der Hohlkugel:

Bestimmung  
des  
elektrischen  
Potentials.

$$\Delta \varphi = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z} , \quad \text{a)}$$

für  $\rho = r$  und  $\rho = R$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\omega}{\rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right) . \quad \text{b)}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right) .$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} & \Delta \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right) \\ &= 2(2n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - 2n \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \quad (\S 1,4) \\ &= 2(n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial z} , \end{aligned}$$

so daß die Gleichung für das Innere befriedigt ist. Ferner ist  $\varphi$  ein Produkt aus  $\rho^{n+1}$  und einer Funktion der Winkel  $\theta$  und  $\omega$ , daraus ergibt sich leicht, daß  $\varphi$  der Grenzgleichung genügt.

Der Wert der Konstanten, welche man zu obigem Ausdruck zu addieren hat, um die allgemeine Lösung zu erhalten, hängt in jedem Falle von den elektrostatischen Einflüssen ab, denen die Kugel ausgesetzt ist. Es kann der Kugel in jedem Falle so viel freie Elektrizität zugeführt werden, daß die Konstante gleich Null wird, und es sei dies in der Folge vorausgesetzt.

Bestimmung  
von  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Aus  $\varphi$  folgt unmittelbar:

$$u = \frac{\omega}{x} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( Q^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\}$$

$$v = \frac{\omega}{x} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left( Q^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\}$$

$$w = \frac{\omega}{x} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \left( Q^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n\chi_n \right\} .$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit  $xyz$  und addieren, so folgt

$$ux + vy + wz = 0 .$$

Die Strömung ist also überall senkrecht zum Radius, sie findet in konzentrischen Kugelschalen um den Nullpunkt statt. Es ist dies eine Folge des Umstandes, daß Gleichung b) nicht nur an der Oberfläche, sondern in der ganzen Masse erfüllt ist.

Weiter findet man:

$$\Delta u = \frac{\omega}{x} \left\{ -2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \right\} = 0$$

$$\Delta v = 0$$

$$\Delta w = 0, \text{ da auch } \Delta \chi_n = 0 .$$

Uebrigens sind  $uvw$  homogene Funktionen  $n$ ten Grades in  $xyz$ ; es sind also  $uvw$  durch Kugelfunktionen  $n$ ten Grades dargestellt. Wir werden für  $uvw$  alsbald einfachere Formen finden.

Aufsuchung  
der Funktion  
 $\psi$ .

Da die Strömungen in den konzentrischen Kugelschichten einander ähnlich sind, so sind sie auch ähnlich denjenigen, welche in einer unendlich dünnen Hohlkugel entstehen; wir wenden uns daher zunächst zu einer solchen und bestimmen den Wert der Integrale  $UVW$ , und zwar für den inneren

Raum, wenn  $n$  positiv ist; für den äußeren Raum, wenn  $n$  negativ ist. Nur der erstere Fall soll durchgerechnet werden.  $x$  ersetzen wir durch  $k$ . Für  $UVW$  gelten die Bedingungen:

$$\Delta U = 0, \quad \Delta V = 0, \quad \Delta W = 0$$

im ganzen Raum, an der Kugelschale:

$$\frac{\partial U_a}{\partial \rho} - \frac{\partial U_i}{\partial \rho} = -4\pi u, \quad ,$$

entsprechend für  $V$  und  $W$ ; außerdem die gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen. Allen diesen Bedingungen ist genügt, wenn man setzt:

$$U_i = \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\}$$

$$V_i = \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\}$$

$$W_i = \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right\},$$

$$U_a(\rho) = \left( \frac{R}{\rho} \right)^{2n+1} U_i \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

$$V_a(\rho) = \left( \frac{R}{\rho} \right)^{2n+1} V_i \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

$$W_a(\rho) = \left( \frac{R}{\rho} \right)^{2n+1} W_i \left( \frac{1}{\rho} \right) .$$

Aus diesen  $UVW$  wollen wir die magnetisierenden Kräfte im Innern, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{etc.}$$

berechnen, und dieselben

$$= -\frac{n+1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

setzen, wir erhalten so die Funktion  $\Psi$  (§ 1,5). Wir finden nämlich:

$$\begin{aligned}
 -\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial z} \left( x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) &= -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \psi'_i \\
 -\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) &= -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \psi'_i \\
 -\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) &= -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \psi'_i .
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \psi'_i &= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left( x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \chi'_n ,
 \end{aligned}$$

und es folgen jetzt die übrigen Attribute der Strömung ohne weiteres aus  $\psi$ . Eine willkürliche Konstante, welche noch zu  $\psi$  hinzugefügt werden kann, ist ohne Belang.

Zusammen-  
stellung der  
Formeln.

Somach erhalten wir die Lösung unserer Aufgabe für eine Kugelschale in folgender Form (§ 1,5):

Es sei

$$\chi_n = \left( \frac{\rho}{R} \right)^n Y_n \quad n > 0$$

die induzierende Potentialfunktion, dann ist:

$$\begin{aligned}
 \psi'_i &= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n Y'_n \\
 \psi'_a &= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} Y'_n \\
 \psi &= \frac{\omega}{k} \frac{R}{n+1} Y'_n \\
 \Omega_i &= -\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n Y'_n \\
 \Omega_a &= \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} Y'_n .
 \end{aligned}$$

Aus den Relationen

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \omega_a} \psi, \quad \frac{\partial U_a}{\partial \rho} - \frac{\partial U_i}{\partial \rho} = -4\pi u$$

und den entsprechenden für  $V$  und  $W$  erhält man ferner:

$$u = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_x} = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_y} = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_z} = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_z}$$

Endlich läßt sich der Ausdruck für das elektrische Potential in der Masse der Hohlkugel umformen. Setzt man für den Augenblick  $\varrho' = \varrho \sin \theta$ , so ist:

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1} \left( \varrho' \frac{\partial Z_n}{\partial z} - z \frac{\partial Z_n}{\partial \varrho'} \right)$$

oder

$$\varphi = - \frac{\omega}{n+1} \varrho \sin \theta \frac{\partial Z_n}{\partial \theta},$$

und in der Kugelschale:

$$\bar{\varphi} = - \frac{\omega R}{n+1} \sin \theta \frac{\partial Y'_n}{\partial \theta}.$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich durchführen, wenn  $n$  negativ ist, sich also die induzierenden Magnete im Innern befinden. Wir erhalten aus denselben das Resultat:

Ist die induzierende Potentialfunktion

$$Z_n = \left( \frac{R}{\varrho} \right)^{n+1} Y_n,$$

so ist

$$\psi_i = - \frac{4\pi R^2}{(2n+1)n} \frac{\omega}{k} \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n Y'_n$$

$$\psi_a = - \frac{4\pi R^2}{(2n+1)n} \frac{\omega}{k} \left( \frac{R}{\varrho} \right)^{n+1} Y'_n$$

$$\Omega_i = \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n} \frac{\omega}{k} \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n Y'_n$$

$$\Omega_a = - \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left( \frac{R}{\varrho} \right)^{n+1} Y'_n$$

$$\psi = -\frac{\omega}{k} \frac{R}{n} Y'_n$$

$$u = -\frac{1}{n} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = -\frac{1}{n} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = -\frac{1}{n} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_z}$$

$$\varphi = \frac{\omega}{n} R \sin \theta \frac{\partial Y'_n}{\partial \theta} .$$

Von den hier angeführten Größen gehen  $\psi, u, v, w, \varphi$  unmittelbar aus den früheren durch Vertauschung von  $n$  mit  $-n-1$  hervor.

Zu der erhaltenen Lösung mache ich die folgenden Bemerkungen:

1. Rotiert eine Hohlkugel von endlicher Dicke unter dem Einfluß des Potentials  $\chi_n$  ( $n$  pos. oder neg.), so sind die induzierten Strömungen:

$$u = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_z} ,$$

und ihre Strömungsfunktion ist:

$$\psi = \frac{\varrho}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\alpha} \cdot \chi'_n .$$

Konstruktion der Strömungsfunktion.

2. Es sei  $\chi_n$  noch weiter zerlegt, wir betrachten das Glied

$$\chi_{ni} = A_{ni} \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n \cos i\omega P_{ni} .$$

Dazu gehört die Strömungsfunktion:

$$\psi_{ni} = -\frac{\varrho}{n+1} \frac{\omega i}{\alpha} A_{ni} \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n \sin i\omega P_{ni} .$$

Daraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion für die Strömungslinien, welche ein derartiges einfaches Potential hervorruft:

Man zeichne auf eine beliebige Kugelschicht die Linien gleichen Potentials auf, und drehe hierauf die Schicht um den Winkel  $\pi/2i$ , die gezeichneten Linien stellen jetzt die Stromlinien dar, welche unter dem Einflusse jenes Potentials entstehen.

Rotiert beispielsweise die Kugel unter dem Einflusse einer konstanten Kraft, deren Richtung zur Rotationsaxe senkrecht ist, so erfüllt das äußere Potential die hier gestellten Bedingungen, es ist  $n = 1$ ,  $i = 1$ . Die Niveaulinien des Potentials auf der Kugel sind Kreise, also sind auch die Strömungslinien Kreise. Die Ebenen ersterer sind parallel zur Rotationsaxe und senkrecht zur Richtung der Kraft, sonach sind die Ebenen letzterer parallel zur Richtung der Kraft und zur Rotationsaxe.

3. Wir können den Wert von  $\psi$  in eine Form bringen, welche die Summation über sämtliche Kugelfunktionen erlaubt, also die Zerlegung des äußeren Potentials nach solchen überflüssig macht.

Umformung  
der Lösung.

Es sei  $n$  positiv, dann ist

$$\int_0^e \chi_n d\varrho = \frac{e}{n+1} \chi_n$$

Sei zweitens  $n$  negativ, dann ist

$$\int_{-\infty}^e \chi_n d\varrho = \frac{e}{n+1} \chi_n$$

Also ist für positive  $n$

$$\psi = \frac{\omega}{\alpha} \int_0^e \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} d\varrho,$$

und für negative  $n$

$$\psi = -\frac{\omega}{\alpha} \int_e^{\infty} \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} d\varrho.$$



Summation  
über die  
Kugel-  
funktionen.

Diese Ausdrücke lassen ohne weiteres die Summation zu, und wir erhalten folgende zweite Form der Lösung:

Bezeichnet  $\chi_i$  den Teil des Potentials, welcher von inneren,  $\chi_a$  den Teil, welcher von äußeren Magneten herrührt, so ist:

$$\psi = \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \int_0^{\varrho} \chi_a dQ - \int_e^{\infty} \chi_i dQ \right\}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\varphi = -\omega \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \int_0^{\varrho} \chi_a dQ - \int_e^{\infty} \chi_i dQ \right\}.$$

Für eine unendlich dünne Kugelschale vom Radius  $R$  wird:

$$\psi = \frac{\omega}{k} \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \omega} dQ - \int_R^{\infty} \frac{\partial \chi_i}{\partial \omega} dQ \right\}$$

$$\varphi = -\omega \sin \theta \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \theta} dQ - \int_R^{\infty} \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta} dQ \right\}.$$

Daraus folgt zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  die Beziehung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \kappa \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

### § 3. Vollständige Lösung für unendlich dünne Hohlkugeln.

Es soll jetzt die Wirkung der Selbstinduktion in Betracht gezogen werden, es werde jedoch in diesem Paragraphen die Betrachtung auf eine unendlich dünne Kugelschale beschränkt. Der Einfachheit halber werde in der ausgeführten Rechnung  $n$  als positiv vorausgesetzt.

Einer üblichen Anschauungsweise folgend, betrachten wir zunächst den gesamten Induktionsakt als eine unendliche Reihe einzelner Induktionen; die von den äußeren Magneten induzierte Strömung induziert eine zweite, diese eine dritte, und so fort ins unendliche. Wir berechnen alle diese Ströme und

addieren sie; so lange die Summe gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, stellt dieser sicherlich die thatsächlich stattfindende Strömung dar.

Sei

$$\chi_n = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n$$

ein Teil der äußeren Potentialfunktion. Das von dieser induzierte Potential ist:

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi Rn}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} Y_n' .$$

Lassen wir erstens innerhalb der Hohlkugel eine zweite rotieren, welche der ersten unendlich nahe sei und sich mit gleicher Geschwindigkeit bewege, so wird in dieser von den Strömen erster Ordnung ( $\Omega_i$ ) eine Strömung induziert, deren magnetisches Potential im Innern ist:

Berechnung  
der succes-  
siven In-  
duktionen.

$$\Omega'_i = \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n'' .$$

Lassen wir zweitens außerhalb der ursprünglichen Hohlkugel eine zweite rotieren, die der ersten unendlich nahe sei, so wird in dieser durch den Einfluss der Ströme erster Ordnung ( $\Omega_a$ ) eine Strömung induziert werden, deren Potential im Innern ist:

$$\Omega'_i = \frac{4\pi Rn}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n} \cdot \frac{\omega}{k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n''$$

$$= \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n'' .$$

Beide Ausdrücke für  $\Omega'$  fallen zusammen. Mit beiden fällt daher auch das Potential derjenigen Strömung zusammen, welche die Strömung erster Ordnung in der Kugelschale selber induziert. Indem wir in ganz derselben Weise die folgenden Induktionen berechnen und alles addieren, erhalten wir für die Gesamtwirkung:

$$\Omega_i = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sum_1^{\infty} \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} \sum_1^{\infty} \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \sum_1^{\infty} \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

Die erhaltenen Ausdrücke lassen sich weiter entwickeln, wenn man  $Y_n$  noch weiter zerlegt. Man hat:

$$Y_n = \sum_0^n (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) P_{ni}.$$

Wir beschränken die Untersuchung auf ein Glied dieser Reihe, und sei also:

$$Y_n = A_{ni} \cos i\omega P_{ni}.$$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned} \Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_{ni} & \left\{ \frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} \sin i\omega - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^2 \cos i\omega \right. \\ & \left. - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^3 \sin i\omega + \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^4 \cos i\omega + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} = h \quad (h \text{ ist eine reine Zahl}),$$

so wird jetzt:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_{ni} (\sin i\omega - h \cos i\omega)(1 - h^2 + h^4 - h^6 + \dots) h.$$

Ist  $h$  ein echter Bruch, so konvergiert die in  $\Omega$  enthaltene Reihe und wir erhalten:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) P_{ni}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) P_{ni}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} A_{ni} \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) P_{ni} .$$

Ist  $h > 1$ <sup>1)</sup>, so divergiert die in  $\Omega$  vorkommende Reihe, und die Auffassung des Phänomens als einer Reihe successiver Induktionen ist nicht mehr zulässig, da jede folgende größer als die vorhergehende werden würde.

Nichtsdestoweniger gelten die aufgestellten Formeln für jedes  $h$ , wie man leicht a posteriori verifiziert und auch durch dieselben Schlüsse ableiten kann, welche wir bei Hohlkugeln von endlicher Dicke anzuwenden haben werden. Da ich die vorliegenden Formeln nochmals aus den allgemeinen ableiten werde, will ich mich hier nicht bei denselben aufhalten.

Wir setzen noch:

$$\operatorname{tg} \delta = h ,$$

dann können wir schreiben:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sin \delta \sin (i\omega - \delta) P_{ni}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) P_{ni}$$

Die Lösung.

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} A_{ni} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) P_{ni} .$$

Das Resultat ist also das folgende:

1. Die Strömungsfunktion, welche eine einfache Kugelfunktion induziert, ist eine einfache Kugelflächenfunktion derselben Art, wie diejenige, welche in der induzierenden Funktion enthalten ist. Die Konstruktion, welche wir früher (§ 2, 2) zur Bestimmung der Strömungskurven anwandten, können wir daher auch hier beibehalten, wir haben aber die behandelte Kugelschicht im Sinne der Rotation um einen gewissen Winkel  $\delta/i$

Konstruktion der Strömungslinien.

<sup>1)</sup> Eine kupferne Hohlkugel von 50 mm Radius, 2 mm Wandstärke, muß beiäufig ca. 87 Umdrehungen in der Sekunde machen, damit für  $i = 1$ ,  $n = 1$ ,  $h = 1$  werde.

gegen die früher festgesetzte Lage zu drehen. Dieser Winkel ist bei kleinen Drehungsgeschwindigkeiten diesen proportional, bei größeren konvergiert er gegen die GröÙe  $\pi/2i$ . Die Intensität, welche anfangs den Rotationsgeschwindigkeiten proportional wächst, wächst bei steigenden Werten derselben immer langsamer und konvergiert gegen eine feste Grenze.

Die Geschwindigkeit ist unendlich.

2. Wird schließlic  $\omega/k = \infty$ , so wird  $\delta = \pi/2$ , also

$$\Omega_i = -\chi_n$$

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1} \chi_n$$

$$\psi = \frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \bar{\chi}_n$$

Dieser Schluss gilt nicht für diejenigen Glieder der Entwicklung, welche symmetrisch zur Rotationsachse sind. Für diese ist  $i$ , also  $h$ , also  $\Omega$  gleich Null für jede Drehungsgeschwindigkeit. Diese Glieder rufen keine Strömung, sondern nur eine Verteilung freier Elektrizität in der Kugel hervor.

Eine unendlich schnell rotierende Hohlkugel läßt also nur diejenigen Teile des äußeren Potentials in ihrem Inneren wirken, welche symmetrisch zur Achse sind; sind solche Glieder nicht vorhanden, so ist das Innere der Kugel gegen den Einfluß von Außen geschützt. Ist das Potential eine Kugelfunktion, so findet die Strömung in den Linien gleichen Potentials statt.

Das elektrische Potential.

3. Für das elektrische Potential, welches  $\chi_n$  entspricht, hatten wir gefunden ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega}{n+1} R \sin \theta \frac{\partial \bar{\chi}_n}{\partial \theta}$$

Mit Berücksichtigung der Selbstinduktion werden wir haben:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega}{n+1} R \sin \theta \frac{\partial \bar{\chi}_n + \Omega_i}{\partial \theta}$$

Daraus folgt: Die Gestalt der Niveaulinien des Potentials bleibt (für jede induzierende Kugelfunktion) ungeändert durch die Selbstinduktion, die Niveaulinien erscheinen um denselben Winkel gedreht, wie die Strömungslinien. Für die Teile des äußeren

Potentiale, welche symmetrisch zur Achse sind, wächst  $\varphi$  ins unendliche bei wachsender Geschwindigkeit, für die übrigen konvergiert es gegen einen endlichen Grenzwert, welcher sich leicht bestimmen läßt.

### Ausartungen der Kugelschale.

Wir lassen jetzt den Radius der Kugelschale unendlich werden, die Variationen des induzierenden Potentiales aber endlich bleiben, wir untersuchen sodann näher die elektrische Bewegung am Äquator und am Pol. Wir erhalten so die Theorie geradlinig bewegter und rotierender ebener Platten. Erstere kann als ein spezieller Fall letzterer angesehen werden, es empfiehlt sich aber in mancher Hinsicht, diese Fälle gesondert zu behandeln.

#### A. Geradlinig bewegte Platten.

Wir führen das Koordinatensystem der  $\xi \eta \zeta$  ein, dessen Zusammenhang mit den  $x, y, z$  durch Fig. 7 gegeben ist.

Die Richtung der  $\eta$  ist die positive Bewegungsrichtung. Die wirkenden Magnete denken wir uns in der Kugel, also auf der Seite der negativen  $\zeta$ . Wir haben zu untersuchen, welche Form in den  $\xi \eta \zeta$  die Kugelfunktion

$$A_{ni} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \cos i\omega P_{ni}$$

annimmt.

Um endliche Variationen zu erhalten, haben wir  $n$  und  $i$   $\infty$  werden zu lassen von der Ordnung von  $R$ , wir setzen

$$\text{für } n \quad nR$$

$$\text{für } i \quad rR$$

Wir ersetzen ferner

$$\rho, \omega, \theta$$

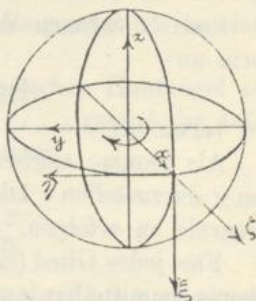


Fig. 7.

Ebene Platten.

Geradlinig bewegte Platten.

durch

$$R + \zeta, \quad \frac{\eta}{R}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{r\eta}{R}.$$

Dadurch geht über:

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} \text{ in } e^{-n\zeta}, \\ \cos i\omega \text{ in } \cos r\eta.$$

$P_{ni}(\theta)$  muß in eine solche Funktion von  $\xi$  übergehen, daß das Produkt derselben mit  $e^{-n\zeta} \cos r\eta$  der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  genügt. Eine solche Funktion ist  $\cos s\xi$  oder  $\sin s\xi$ , wenn

$$n^2 = r^2 + s^2$$

ist.

Sonach nehmen die früheren Kugelfunktionen jetzt die Form an:

$$A_{rs} e^{-n\zeta} \cos r\eta \cos s\xi,$$

und verwandte.

Als Summe solcher Formen ist die äußere Potentialfunktion  $\chi$  darzustellen. Diese Darstellung hat durch FOURIER'sche Integrale zu erfolgen.

Für jedes Glied (Element) der Entwicklung geht nun die Lösung unmittelbar aus dem früheren hervor. Für das angeführte setzen wir

$$\text{tg } \delta = \frac{2\pi r}{n} \cdot \frac{\alpha}{k},$$

worin  $\alpha$  die Geschwindigkeit der Platte bezeichnet, und haben:

$$\Omega_+ = A_{rs} e^{-n\zeta} \sin \delta \sin (r\eta - \delta) \cos s\xi$$

Die Lösung.

$$\Omega_- = -A_{rs} e^{n\zeta} \sin \delta \sin (r\eta - \delta) \cos s\xi$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{rs} \sin \delta \sin (r\eta - \delta) \cos s\xi.$$

Durch Summation über alle Glieder folgen die vollständigen Integrale des Problems. Die Summation läßt sich ausführen für den Fall, daß  $\alpha/k$  unendlich wird. Dann ist

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \delta = 1,$$

also

$$\Omega_+ = -\chi$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\chi.$$

Auf der den Magneten abgewandten Seite ist dann das Potential Null, die Strömung erfolgt überall in den Niveaulinien des induzierenden Potentials.

Abgesehen von diesem Grenzfall ist indessen die Anwendung der obigen Lösung eine sehr weitläufige; wir sehen uns deshalb nach Näherungsmethoden um. Zu solchen gelangen wir zunächst wieder durch Einführung der successiven Induktionen. Damit die Betrachtung derselben erlaubt sei, muß  $2\pi\alpha/k$  ein echter Bruch sein; ist diese Bedingung erfüllt, so führt die Rechnung, wie schon im allgemeinen Falle gezeigt ist, zu einem konvergenten Resultate.

Wir gehen wieder von der unendlichen Hohlkugel aus. Zu der induzierenden Potentialfunktion  $\chi_{-n-1}$  gehörte im äußeren Raum die induzierte Potentialfunktion:

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial \omega}.$$

Lassen wir nun  $R$  unendlich werden, während wir ersetzen

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \text{ durch } R \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$n \text{ durch } nR,$$

$$\omega R \text{ durch } \alpha,$$

$$\chi_{-n-1} \text{ durch } \chi_n = A_n e^{-n\xi} \cos r\eta \cos s\xi,$$

so wird:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k} \frac{1}{n} \frac{\partial \chi_n}{\partial \eta}.$$

Aber es ist:

$$\int_{\xi}^{\infty} \chi_n d\xi = \frac{\chi_n}{n}.$$



Also ist, nach Summation über alle  $n$ :

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial\chi}{\partial\eta} d\zeta^2 .$$

Aus diesem  $\Omega$  können wir nun in ganz derselben Weise das induzierte Potential zweiter Ordnung erhalten, und indem wir in derselben Weise fortrechnen, erhalten wir schliesslich das Resultat:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial\chi}{\partial\eta} d\zeta^2 + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \int_{\zeta}^{\infty} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial^2\chi}{\partial\eta^2} d\zeta^2 - \dots$$

Zweite Form  
der Lösung.

$$\Omega_- (-\zeta) = -\Omega_+(\zeta)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \overline{\Omega}_+ .$$

Diese Reihe führt, hinreichend fortgesetzt, zu dem exakten Resultate; in der That ist sie nur die Entwicklung desselben nach steigenden Potenzen von  $2\pi\alpha/k$ , wie sich in folgender Weise zeigt:

In der Kugelschale läßt sich das zu  $\chi_{(-n-1)i}$  gehörige  $\Omega_n$  in der Form darstellen: (Seite 55.)

$$\Omega_n = -\frac{1}{1+h^2} \left( \frac{h}{i} \frac{\partial\chi}{\partial\omega} + h^2 \chi \right)$$

$$h = \frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} .$$

Machen wir nun wieder die auf die ebene Platte bezüglichen Substitutionen, entwickeln

$$\frac{1}{1+h^2} = 1 - h^2 + h^4 - h^6 + \dots ,$$

und setzen für  $h$  seinen Wert

$$\frac{2\pi\alpha}{k} \cdot \frac{r}{n} ,$$

so folgt:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k} \frac{1}{n} \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \frac{r^2}{n^2} \chi_{rs} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^3 \frac{r^2}{n^3} \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} \\ + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^4 \frac{r^4}{n^4} \chi_{rs} - \dots,$$

aus welcher Entwicklung die vorige folgt, wenn man die Relationen

$$\int_{\zeta}^{\infty} \chi_{rs} d\zeta = \frac{\chi_{rs}}{n}, \quad \frac{\partial^2 \chi_{rs}}{\partial \eta^2} = -r^2 \chi_{rs}$$

anwendet, und die Summation über alle  $r$  und  $s$  ausführt.

Hieran knüpft sich naturgemäß der Versuch, für sehr große Werte von  $2\pi\alpha/k$  eine Entwicklung nach absteigenden Potenzen dieser Größe zu erhalten.

Ist  $h > 1$ , so haben wir

$$\frac{1}{1+h^2} = \frac{1}{h^2} \left( 1 - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^4} - \dots \right),$$

also:

$$\Omega_+ = -\chi_{rs} - \frac{k}{2\pi\alpha} \frac{n}{r^2} \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^2 \frac{n^2}{r^2} \chi_{rs} \\ + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^3 \frac{n^3}{r^4} \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \dots$$

Die Glieder dieser Reihe lassen nun allerdings, wie der Versuch zeigt, eine Darstellung, welche unmittelbar die Summation über alle  $\chi_{rs}$  erlaubt, nicht zu; setzen wir aber voraus, daß  $\chi$  symmetrisch zur  $\eta$ -Axe sei, so daß in seiner Entwicklung nur Glieder mit  $\cos r\eta$  vorkommen, so haben wir

$$-n\chi_{rs} = \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\zeta} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial\chi}{\partial\eta} = \int_0^\eta \chi_{rs} d\eta, \quad \text{u}$$

und können dann wenigstens für die Glieder erster Ordnung in  $k/2\pi\alpha$  die Summation ausführen. Indem wir uns auf diese beschränken, erhalten wir:

Annähernde  
Lösung für  
große Werte  
der Ge-  
schwindig-  
keit.

$$\Omega_+ = -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha} \int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi} d\eta ,$$

und für das sehr klein werdende Gesamtpotential auf der positiven Seite:

$$\Omega + \chi = - \frac{k}{2\pi\alpha} \int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi} d\eta .$$

Außer der schon angeführten Bedingung müssen wir dieser Formel jedoch eine weitere Beschränkung auferlegen.

Ist nämlich  $2\pi\alpha/k$  auch noch so groß, so wird doch für gewisse Elemente, für welche  $r$  verschwindet,  $h < 1$ , also die benutzte Entwicklung ungültig werden. Dieser Umstand hat zur Folge, daß der aufgestellte Ausdruck nur in einem begrenzten Gebiete gilt, welches übrigens um so weiter ist, je größer  $2\pi\alpha/k$  wird. Ich verweise deshalb auf die gleich folgende Betrachtung (Seite 64).

Potential der  
freien Elek-  
tricität.

Wir bestimmen noch das Potential  $\varphi$  der freien Elektrizität. Dasselbe ergibt sich aus dem für die Hohlkugel gewonnenen Resultate durch ganz dieselben Substitutionen, welche wir beständig angewandt haben und wird erhalten:

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\varphi = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\xi} d\xi ,$$

2. mit Berücksichtigung derselben:

$$\varphi = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial(\chi + \Omega)}{\partial\xi} d\xi .$$

Von Interesse ist der Fall, daß die Geschwindigkeit  $\alpha$  unendlich wird. Nehmen wir an, daß  $\chi$  symmetrisch zur  $\eta$ -Axe ist, und beschränken uns auf ein endliches Gebiet, so haben wir für  $\alpha = \infty$ :

$$\Omega + \chi = - \frac{k}{2\pi\alpha} \int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi} d\eta ,$$

also wird:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{k}{2\pi} \int_0^z \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} d\eta d\zeta \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_0^\eta \frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\eta . \end{aligned}$$

$\varphi$  nähert sich also bei wachsender Geschwindigkeit einem festen endlichen Grenzwerte.

### B. Rotierende Scheiben.

Rotierende  
Scheiben.

Es werde jetzt die Nachbarschaft des Poles betrachtet, wir erhalten so die Theorie einer unendlichen rotierenden Scheibe. Die induzierenden Magnete mögen wieder im Innern der Kugel gedacht sein. Die Schlüsse, welche wir anzuwenden haben, sind den im vorigen Falle gemachten ganz analog.

Als Koordinaten benutzen wir  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $z$ ;  $\rho$  soll hier den senkrechten Abstand von der Rotationsaxe bezeichnen. In den allgemeinen Formeln haben wir dann zu ersetzen:

$$\rho \text{ durch } R + z ,$$

$$\theta \text{ durch } \frac{\rho}{R} ,$$

$$\omega \text{ bleibt } \omega ,$$

nach Einführung dieser Substitutionen haben wir  $R$  unendlich werden zu lassen. Es geht dann eine einfache Kugelfunktion über in die Form:

$$A_n i e^{-n\alpha} \cos i\omega J_i(n\rho) ,$$

(und in analoge), in welcher  $J$  die  $i$ te BESSEL'sche Funktion bezeichnet. Durch Integrale, welche den FOURIER'schen ganz analog sind, ist das gegebene  $\chi$  in Glieder dieser Form zu zerspalten.

Wir behandeln jedes Glied einzeln.

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\pi\omega}{k} \cdot \frac{i}{n} ,$$

so ist für das angeführte Glied die Lösung des Problems:

$$\Omega_+ = A_{ni} e^{-nz} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) J^i(n\varrho)$$

Die Lösung.

$$\Omega_- = -A_{ni} e^{nz} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) J^i(n\varrho)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{ni} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) J^i(n\varrho) .$$

Durch Summation ergeben sich die vollständigen Integrale.

Wir suchen wieder eine Entwicklung nach Potenzen von  $2\pi\omega/k$  zu erhalten durch Berücksichtigung der successiven Induktionen. Durch genau dieselben Schlüsse wie oben erhalten wir:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\omega}{k} \int_z^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \omega} dz + \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 \int_z^\infty \int_z^\infty \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} dz^2 - \dots$$

Zweite Form  
der Lösung.

$$\Omega_-(-z) = -\Omega_+(z)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega}_+ .$$

Be-  
merkungen  
zu letzterer.

Die Gültigkeit dieser Formeln ist aber an eine Beschränkung geknüpft, welche den früheren analogen aufzuerlegen wir nicht nötig hatten. Ihre Ableitung setzt nämlich voraus, daß für jedes einzelne Glied der Entwicklung von  $\chi$  die Anschauung der Gesamtinduktion als einer Reihe successiver Induktionen erlaubt sei. Nach den Resultaten, die wir für Kugeln erhalten haben, ist diese Bedingung nur für diejenigen Glieder erfüllt, für welche  $2\pi\omega/kn$  ein echter Bruch ist. Nun kann aber  $n$  jeden Wert von Null bis  $\infty$  annehmen, für eine Reihe von Gliedern ist daher die notwendige Bedingung nicht erfüllt, das Resultat kann also nur ein angenähertes sein. In Bezug hierauf bemerke ich folgendes:

1. Im Endlichen verschwinden die Glieder, für welche  $n$  einen sehr kleinen Wert hat, gegen diejenigen, für welche  $n$  einen endlichen Wert hat. Der in obiger Formel begangene Fehler muß daher zunächst für große  $\varrho$  einen merklichen Wert erhalten.

2. Die Größe  $2\pi\omega/k$  kann immer so klein gedacht werden, daß innerhalb eines gegebenen Gebietes die Annäherung eine gegebene sei. Denn eine Verkleinerung von  $2\pi\omega/k$  vermindert

die Anzahl der Glieder, welche der erforderlichen Bedingung nicht genügen, eine beliebige Verkleinerung vermindert die Anzahl derselben in beliebigem Grade.

Die genaue Bestimmung des Gültigkeitsgebietes bei einem gegebenen  $2\pi\omega/k$  und gegebener Annäherung dürfte Schwierigkeiten haben; für die Anwendungen ist diese Bestimmung ohne Wichtigkeit, da es sich hier erstens immer um sehr kleine Werte von  $2\pi\omega/k$ , zweitens nicht um unendliche, sondern um begrenzte Platten handelt.

Die Gleichung

$$\Omega = -\frac{2\pi\omega}{k} \int_z^{\infty} \frac{\partial\chi}{\partial\omega} dz$$

ist exakt, wenn man von der Selbstinduktion absieht. Es zeigt sich also, daß die Erlaubnis, von der Selbstinduktion absehen zu dürfen, nicht nur an die Bedingung, daß  $2\pi\omega/k$  klein sei, sondern auch an die Beschränkung auf ein gewisses endliches Gebiet geknüpft ist. Die Größe dieses Gebietes hängt von  $2\pi\omega/k$  ab, über dasselbe hinaus aber ist ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion auch keine angenäherte Bestimmung der Strömung mehr möglich. Ein ganz analoges Resultat wird uns am Ende des § 4 begegnen.

Möglichkeit, die Selbstinduktion zu vernachlässigen.

Auch eine Entwicklung für große Werte von  $2\pi\omega/k$  läßt sich aufstellen. Wir bezeichnen mit  $\chi_0$  den Teil von  $\chi$ , welcher symmetrisch zur Rotationsaxe ist, mit  $\chi_1 = \chi - \chi_0$  den Rest. Dem  $\chi_0$  entspricht für jede Drehungsgeschwindigkeit der Wert  $\Omega = 0$ . Wir erhalten daher, wenn wir  $\chi$  als symmetrisch zur  $x$ -Axe annehmen, für große Werte von  $2\pi\omega/k$ :

Annäherung für große Werte der Geschwindigkeit.

$$\Omega = -\chi_1 - \frac{k}{2\pi\omega} \int_0^{\omega} \frac{\partial\chi_1}{\partial z} d\omega$$

Die Ableitung ist dieselbe wie oben. Die Reihe läßt sich hier auch vollständig und auch für solche  $\chi$  ausführen, welche nicht symmetrisch zur  $x$ -Axe sind; ich gehe darauf nicht weiter ein.

Zum Schluß bestimmen wir das Potential  $\varphi$  der freien Elektrizität. Durch die passenden Substitutionen ergibt sich aus den allgemeinen Formeln:

Potential der  
freien Elek-  
tricität.

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\varphi = \omega Q \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} dz .$$

Diesem  $\varphi$  ist eventuell eine Konstante von der Größe hinzuzufügen, das in der Unendlichkeit  $\varphi = 0$  wird. Die Formel, zu welcher wir gelangt sind, ist schon von Herrn JOCHMANN angegeben für den Fall, das  $\chi$  symmetrisch zur  $z$ -Axe ist, es zeigt sich, das dieselbe ganz allgemein gilt.

2. mit Berücksichtigung der Selbstinduktion haben wir:

$$\bar{\varphi} = \omega Q \int_0^{\infty} \frac{\partial(\chi + \Omega)}{\partial \rho} dz .$$

Für  $\infty$  werdende  $\omega$  erhalten wir, wenn  $\chi$  symmetrisch zur  $x$ -Axe ist:

$$\varphi = \omega Q \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0}{\partial \rho} dz + \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_1}{\partial \rho} d\omega .$$

Das erste Glied wächst mit  $\omega$  ins unendliche.

Wir haben bei der Behandlung ebener Platten immer angenommen, das nur auf einer Seite der bewegten Platte sich induzierende Magnete befinden; diese Voraussetzung ist unwesentlich. Ist sie nicht erfüllt, so zerlegen wir das gesamte Potential nach seinem Ursprung in zwei Teile, und behandeln jeden so, wie dies oben an einem von ihnen gezeigt ist.

#### § 4. Vollständige Lösung für Kugeln und Hohlkugeln von endlicher Dicke.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Induktion in einer Hohlkugel von endlicher Dicke. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, mögen zunächst nur im äußeren Raum induzierende Magnete vorausgesetzt werden.

Es seien  $U, V, W$  die Komponenten eines Vektorpotentials, welches von geschlossenen Strömen herrührt, die ganz oder teilweise im Innern der Kugel liegen. Wir suchen die

von  $U, V, W$  induzierten Ströme  $u' v' w'$ . Für dieselben bestehen die Gleichungen:

$$xu' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega x \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$xv' = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega y \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$xw' = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \omega x \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \omega y \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

Die Differentialgleichungen.

ferner im Innern:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

und an der Oberfläche:

$$u'x + v'y + w'z = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$O = x \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + y \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Unter Beachtung des Umstandes, daß

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

erhalten wir nun für  $\varphi$  die Bedingungen:

In der Masse der Hohlkugel:

$$\Delta \varphi = 2\omega \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \omega (x \Delta V - y \Delta U),$$

und an der Grenze:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\omega}{\rho} \left\{ \rho^2 \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) - zO \right\}.$$

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz:

Haben  $UVW$  die Form:

$$U = Q^m \left( y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right)$$

Satz, welcher die Grundlage des Folgenden bildet.



$$V = \rho^m \left( z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

$$W = \rho^m \left( x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right),$$

welche Form der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

genügt, so sind die Lösungen der vorstehenden Differentialgleichungen:

$$\varphi = -\omega \rho^m \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right)$$

$$= \omega \rho^{m+1} \sin \theta \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta}$$

$$u' = -\frac{\omega}{x} \rho^m \left( y \frac{\partial \chi'_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi'_n}{\partial y} \right)$$

$$v' = -\frac{\omega}{x} \rho^m \left( z \frac{\partial \chi'_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi'_n}{\partial z} \right)$$

$$w' = -\frac{\omega}{x} \rho^m \left( x \frac{\partial \chi'_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi'_n}{\partial x} \right).$$

Beweis des-  
selben.

Um den Beweis der Richtigkeit zu führen, drücken wir zunächst die Bedingungen für  $\varphi$  in  $\chi_n$  aus. Es ist: (§ 1,4)

$$\Delta U = m(m+2n+1) \rho^{m-2} \left( y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right)$$

$$\Delta V = m(m+2n+1) \rho^{m-2} \left( z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

$$\Delta W = m(m+2n+1) \rho^{m-2} \left( x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right)$$

$$y \Delta U - x \Delta V = m(m+2n+1) \rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right)$$

$$z \Delta V - y \Delta W = m(m+2n+1) \rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - n x \chi_n \right)$$

$$x \Delta W - z \Delta U = m(m+2n+1) \rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - n y \chi_n \right),$$

ferner:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -m\rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) - \rho^m (n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -m\rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - nx\chi_n \right) - \rho^m (n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -m\rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - ny\chi_n \right) - \rho^m (n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial y} .$$

Daraus folgt:

$$O = -n(n+1)\rho^m \chi_n .$$

Also werden die Bedingungen für  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi &= -\omega m(m+2n+3) \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) \rho^{m-2} \\ &\quad - 2\omega(n+1)\rho^m \frac{\partial \chi_n}{\partial z} ; \end{aligned}$$

an der Grenze:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -(m+n+1) \frac{\omega}{\rho} \rho^m \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) .$$

Diesen Bedingungen aber genügt  $\varphi$ , denn es ist  
erstens:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi &= -\omega \left\{ \mathcal{A} \left( \rho^{m+2} \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right) - 2n \frac{\partial}{\partial z} (\rho^m \chi_n) - nz \mathcal{A} (\rho^m \chi_n) \right\} \\ &= -\omega \left\{ \rho^n \frac{\partial \chi_n}{\partial z} [(m+2)(m+2n+1) - 2n] \right. \\ &\quad \left. - nz \rho^{m-2} \chi_n [m(m+2n+1) + 2m] \right\} \\ &= -\omega \left\{ m(m+2n+3) \rho^{m-2} \left( \rho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(n+1) \rho^n \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\} , \end{aligned}$$

wonach die erste Bedingung erfüllt ist;

zweitens ist  $\varphi$  das Produkt aus einer Funktion der Winkel und  $\rho^{m+n+1}$ , also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{m+n+1}{\rho} \varphi,$$

wonach auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Aus dem so als richtig nachgewiesenen  $\varphi$  folgen aber die  $u' v' w'$  durch die ursprünglichen Differentialgleichungen, zunächst allerdings in einer etwas komplizierteren Form. Ganz dieselbe Form ist aber schon Seite 46 aufgetreten, und es hat sich schon dort gezeigt, daß sie mit der hier gegebenen identisch ist.

Folgerungen.

An diesen Satz knüpfen sich die folgenden Bemerkungen.

1. Wir können in demselben  $\rho^m$  durch eine Reihe von Potenzen, deren jede mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert ist, also durch eine willkürliche Funktion von  $\rho$  ersetzen. Wir können zweitens  $\chi_n$  durch eine Reihe von Kugelfunktionen verschiedenen Grades mit beliebigen Koeffizienten ersetzen, da die Ordnungszahl  $n$  im Endresultat keine Rolle spielt. Hieraus ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes:

Ist  $\chi$  eine ganz beliebige Funktion und

$$U = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_x}$$

$$V = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_y}$$

$$W = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_z},$$

so sind die von  $U, V, W$  induzierten  $u' v' w'$ :

$$u' = -\frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z}.$$

Es ist nicht schwer, diesen Satz mit den in früheren Paragraphen erhaltenen Resultaten in Verbindung zu setzen.

2. Die durch obige Formen gegebenen  $UVW$  rühren von Strömungen her, die in konzentrischen Kugelschalen erfolgen. Denn es ist

$$x\Delta U + y\Delta V + z\Delta W = 0 \quad .$$

Umgekehrt lassen sich die  $U, V, W$  solcher Strömungen immer in obiger Form darstellen. Denn ist  $\chi_n f(\varrho)$  das Glied in der Entwicklung der Strömungsfunktion, welches die  $n$ te Kugelfunktion enthält, so haben die zu diesem Gliede gehörigen  $U, V, W$  ohne weiteres die obige Form.

Andererseits geschehen auch die induzierten Strömungen in konzentrischen Kugelschalen. Denn es ist

$$u'x + v'y + w'z = 0 \quad .$$

Wir folgern daraus:

Eine Strömung, welche in konzentrischen Kugelschalen erfolgt, induziert eine Strömung, welche dieselbe Eigenschaft hat. Und weiter: Die Strömungen, welche in einer rotierenden Hohlkugel durch ruhende Magnete induziert werden, erfolgen immer in konzentrischen Kugelschalen um den Nullpunkt.

Die Strömung geschieht immer in konzentrischen Kugelschalen.

3. Es ist

$$\varphi = \omega (xV - yU) \quad ,$$

sobald  $U, V, W$  die obige Form, also die induzierenden Ströme die besprochene Eigentümlichkeit haben. Wir werden dies in § 8 benutzen müssen.

Es ist nun nicht mehr schwer, die successiven Induktionen zu berechnen, welche ein gegebenes äußeres Potential hervorruft. Sei  $\chi_n$  das  $n$ te Glied in der Entwicklung desselben. Wir fanden die Ströme erster Induktion:

Berechnung der successiven Induktionen.

$$u_1 = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x}$$

$$v_1 = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y}$$

$$w_1 = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z}$$

Die zugehörigen  $U_1$   $V_1$   $W_1$  sind:

$$U_1 = \frac{2\pi}{n+1} \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\rho^{2n+1}} \right)$$

$$V_1 = \frac{2\pi}{n+1} \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\rho^{2n+1}} \right)$$

$$W_1 = \frac{2\pi}{n+1} \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\rho^{2n+1}} \right)$$

Man findet diese Werte durch eine einfache Integration, indem man beachtet, daß  $u_1$   $v_1$   $w_1$  Produkte von  $\rho^n$  und Kugel­flächen­funktionen sind. Das Potential jeder unendlich dünnen Kugelschicht im Inneren und Äußeren derselben ist bekannt und eine Integration nach  $\rho$  giebt die angeführten Werte. Es folgen aus denselben die Strömungen zweiter Induktion:

$$u_2 = -\frac{2\pi}{n+1} \left( \frac{\omega}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial \chi''}{\partial \omega_x} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\rho^{2n+1}} \right)$$

$$v_2 = -\frac{2\pi}{n+1} \left( \frac{\omega}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial \chi''}{\partial \omega_y} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\rho^{2n+1}} \right)$$

$$w_2 = -\frac{2\pi}{n+1} \left( \frac{\omega}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial \chi''}{\partial \omega_z} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\rho^{2n+1}} \right)$$

In derselben Weise kann die Rechnung beliebig fortgesetzt werden, die Resultate derselben werden jedoch immer komplizierter und wir wenden uns daher zur exakten Lösung des Problems.

Allgemeine  
Lösung.

Wir sahen, daß die Strömungen immer senkrecht zum Radius sind, wir können also wieder von der Strömungsfunktion Gebrauch machen.

Sei  $f(\rho) = f$  eine beliebige Funktion von  $\rho$ , sei

$$\psi = \rho \cdot f \cdot \chi_n$$

die Strömungsfunktion eines in der Kugel bestehenden Strom­systemes.

Die Stromdichten sind:

$$u = f \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = f \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = f \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z} .$$

Sei nun  $F(\varrho) = F$  eine zweite Funktion von  $\varrho$ , welche mit  $f$  durch die Gleichung verbunden ist:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\varrho^{2n+1}} \left\{ \int_r^{\varrho} a^{2n+2} f(a) da + \int_{\varrho}^R \varrho^{2n+1} a f(a) da \right\} ,$$

aus welcher durch Differentiation folgt:

$$\frac{d}{d\varrho} \left( \varrho^{-2n} \frac{d}{d\varrho} (\varrho^{2n+1} F) \right) = -4\pi \varrho f(\varrho) .$$

Es sind dann die zu  $u, v, w$  gehörigen  $U, V, W$ :

$$U = F \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$V = F \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$W = F \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z} .$$

Daraus folgen die von dem System  $\psi$  induzierten Ströme:

$$u' = -\frac{\omega}{\kappa} F' \frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\kappa} F' \frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\kappa} F' \frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_z} .$$

Die zu diesem System gehörige Strömungsfunktion ist:

$$\psi' = -\frac{\omega}{\kappa} \varrho F' \chi'_n .$$

Es induziert also die Funktion

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die andere:

$$\psi' = -\frac{\omega}{\alpha} \varrho F \chi'_n .$$

Es bedeute nun  $\psi$  die in der Kugel unter dem Einflusse der äusseren Potentialfunktion  $\chi_n$  thatsächlich bestehende Strömung,  $\psi_0$  sei die von den äusseren Magnetismen direkt induzierte Strömung, dann ist offenbar die Bedingung des stationären Zustandes:

$$\psi = \psi_0 + \psi' .$$

Um diese Gleichung weiter zu entwickeln, zerlegen wir  $\chi_n$  und betrachten jedes Glied für sich; sei das vorgelegte:

$$\chi_{ni} = A \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n \cos i\omega P_{ni} .$$

Wir haben dann (Seite 50):

$$\psi_0 = -\frac{\omega}{\alpha} A \varrho \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n \frac{i}{n+1} \sin i\omega P_{ni} .$$

Setzt man nun

$$\psi = -\frac{\omega}{\alpha} A \varrho \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n \frac{i}{n+1} (f_1(\varrho) \sin i\omega + f_2(\varrho) \cos i\omega) P_{ni} ,$$

so wird

$$\psi' = \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 A \varrho \left( \frac{\varrho}{R} \right)^n \frac{i^2}{n+1} (F_1 \varrho \cos i\omega - F_2 \varrho \sin i\omega) P_{ni} .$$

Die Gleichung  $\psi = \psi_0 + \psi'$  ist nun erfüllt, wenn  $f_1$  und  $f_2$  den Gleichungen genügen:

$$f_1(\varrho) = 1 + \frac{i\omega}{\alpha} F_2(\varrho)$$

$$f_2(\varrho) = -\frac{i\omega}{\alpha} F_1(\varrho) ,$$

durch welche  $f_1$  und  $f_2$  vollständig bestimmt sind.

Denken wir uns  $f_1$  und  $f_2$  gefunden, so läßt sich das Resultat der Untersuchung in folgender Form aussprechen:

Die Selbstinduktion läßt die Form der Strömungslinien (für jedes einzelne Glied der Entwicklung) ungeändert, ihre Wirkung besteht darin:

erstens, die Erscheinung um den  $i$ ten Teil eines gewissen Winkels  $\delta$  im Sinne der Rotation zu drehen, eines Winkels, der für die verschiedenen Schichten von verschiedener Größe ist, und für welchen die Gleichung  $\operatorname{tg} \delta = f_2/f_1$  gilt,

zweitens, die Intensität der Strömung in den verschiedenen Schichten in verschiedener Weise abzuändern. Das Verhältnis der wirklich stattfindenden Intensität zu der ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion erhaltenen ist

$$= \sqrt{f_1^2 + f_2^2} : 1$$

Mit der Bestimmung der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  werden wir uns einige Zeit zu beschäftigen haben.

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein: Es sei

$$\frac{4\pi i \omega}{z} = \mu^2$$

Behandlung  
der Gleichungen für  
die  $f$ .

$$\mu r = s, \quad \mu R = S$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1 \sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2 \sigma$$

Wir denken uns in die Gleichungen, welche  $f_1$  und  $f_2$  bestimmen, für  $R_1$  und  $R_2$  ihre Werte gesetzt, wir transformieren sodann die Gleichungen auf  $\varphi$  und  $\sigma$ , und erhalten:

$$\varphi_1 \sigma = 1 + \frac{1}{(2n+1)\sigma^{2n+1}} \left\{ \int_a^a a^{2n+2} \varphi_2 a da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a \varphi_2 a da \right\}$$

$$\varphi_2 \sigma = - \frac{1}{(2n+1)\sigma^{2n+1}} \left\{ \int_a^a a^{2n+2} \varphi_1 a da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a \varphi_1 a da \right\}.$$

Durch Differentiation geben dieselben:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} \varphi_1) \right) = -\sigma \varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} \varphi_2) \right) = \sigma \varphi_1$$



Die Form der Funktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  hängt also nur ab von  $n$ , in den Integrationskonstanten kommen dann allerdings noch  $\mu$ ,  $s$  und  $S$  vor.

Obige Gleichungen können geschrieben werden:

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma} \varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' + \frac{2n+2}{\sigma} \varphi_2' = \varphi_1 .$$

Als Differentialgleichungen können dieselben vollständig ersetzt werden durch die folgenden:

$$\varphi_2 = \pm \varphi_1 \sqrt{-1}$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma} \varphi_1' \pm \varphi_1 \sqrt{-1} = 0 .$$

Denn alle Lösungen der letzteren befriedigen erstere, und die allgemeine Lösung der letzteren enthält  $2 \times 2$  willkürliche Konstanten, ist also auch die allgemeine Lösung der ersteren.

Setzen wir  $\lambda^4 = -1$ , und verstehen insbesondere unter  $\lambda$  diejenigen Wurzeln dieser Gleichung, deren reeller Teil positiv ist, also:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{-1}) ,$$

so werden unsere Gleichungen:

$$\varphi_2 = -\lambda^2 \varphi_1$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma} \varphi_1' - \lambda^2 \varphi_1 = 0 .$$

Die beiden partikulären Integrale derselben sind:

$$\int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n e^{\sigma \lambda v} dv , \quad \int_1^{\infty} (1-v^2)^n e^{-\sigma \lambda v} dv ,$$

gültig für reelle positive  $\sigma$ .

Dafs diese Integrale die Gleichungen befriedigen, wird etwas weiter unten gezeigt werden. Da in unserem Falle  $n$  eine ganze Zahl ist, so lassen sich die Integrale ausführen und also das Resultat der Auflösung in endlicher geschlossener

Form aufstellen, der Einfachheit halber möge die Integralform beibehalten werden. Setzt man

$$p_n \sigma = \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n e^{\sigma v} dv$$

$$q_n \sigma = \int_1^{\infty} (1-v^2)^n e^{-\sigma v} dv ,$$

Definition  
der  $p$  und  $q$ .

so sind offenbar die Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= Ap_n(\lambda_1 \sigma) + Bp_n(\lambda_2 \sigma) + Cq_n(\lambda_1 \sigma) + Dq_n(\lambda_2 \sigma) \\ -\varphi_2 &= \lambda_1^2 Ap_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 Bp_n(\lambda_2 \sigma) + \lambda_1^2 Cq_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 Dq_n(\lambda_2 \sigma) . \end{aligned}$$

Diese Lösungen sind in die Integralgleichungen einzusetzen und daraus die Konstanten zu bestimmen. Zur Ausmittelung der dabei auftretenden Integrale dienen die folgenden Rechnungen:

Man hat:

$$p_n(\lambda \sigma) = \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n e^{\lambda \sigma v} dv ,$$

$$\begin{aligned} \sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n) &= \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n (\sigma v \lambda + 2n + 1) e^{v \lambda \sigma} dv \\ &= 2n p_{n-1}(\lambda \sigma)^1 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left[ \sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n) \right] &= \lambda \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n (v^2 \lambda \sigma + 2(n+1)v) e^{v \lambda \sigma} dv \\ &= \lambda^2 n p_n(\lambda \sigma)^1 . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß  $p_n$  eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist.

Durch rückwärtsschreitende Integration findet man nun aus den vorigen Formeln:

<sup>1)</sup> Die letzten Glieder der Gleichungen werden durch Umformung der voranstehenden Integrale, vorzüglich durch partielle Integration erhalten.

Integral- und  
Rekursions-  
formeln der  
 $p$  und  $q$ .

und

$$\int \sigma p_n(\lambda \sigma) d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} p_{n-1}(\lambda \sigma)$$

$$\int \sigma^{2n} p_{n-1}(\lambda \sigma) d\sigma = \frac{1}{2n} \sigma^{2n+1} p_n(\lambda \sigma) ,$$

aus welchen durch Differentiation die Rekursionsformeln folgen:

$$p_n(\lambda \sigma) = \frac{2n}{\lambda} \frac{p'_{n-1}(\lambda \sigma)}{\sigma}$$

$$p_{n-1}(\lambda \sigma) = \frac{2n+1}{2n} p_n(\lambda \sigma) + \frac{\lambda \sigma}{2n} p'_n(\lambda \sigma) ,$$

aus welchen folgt:

$$p_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} p_n + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{4n(n+1)} p_{n+1}$$

$$p_n = \frac{2}{\lambda^2 \sigma^2} \{ 2n(n-1) p_{n-2} - n(2n-1) p_{n-1} \} .$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich nun auch für die  $q_n$  durchführen, die Resultate gehen aus den eben gewonnenen einfach durch Vertauschung von  $p$  mit  $q$  hervor, man hat also auch:

$$\int \sigma q_n(\lambda \sigma) d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} q_{n-1}(\lambda \sigma)$$

$$\int \sigma^{2n} q_{n-1}(\lambda \sigma) d\sigma = \frac{1}{2n} \sigma^{2n+1} q_n(\lambda \sigma) \text{ etc.}$$

Mit Zuhilfenahme dieser Formeln hat die Ausführung der notwendigen Integrationen keine Schwierigkeit, beispielsweise hat man, unter Zuhilfenahme einer partiellen Integration:

$$\begin{aligned} & \int_a^s \alpha^{2i+2} p_n(\alpha) d\alpha + \sigma^{2n+1} \int_a^s \alpha p_n(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{2n s^{2n+1} p_{n-1}(s)}{\lambda^2} + \frac{(2n+1) s^{2n+1} p_n(s)}{\lambda^2} \\ & \quad - \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma) \\ &= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{s^{2n+3}}{2(n+1)} p_{n+1}(s) - \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma). \end{aligned}$$

Setzt man diese und die ähnlich zu bildenden Ausdrücke für  $q$  in die Gleichungen ein, beachtet, daß  $q_2 = -q_1 \lambda^2$ , und  $\lambda^4 = -1$ , so heben sich die  $p$  und  $q$ , wie es sein muß, heraus und es bleiben Gleichungen zurück von der Form

$$0 = \text{const}_1 + \frac{\text{const}_2}{\rho^{2n+1}},$$

welches die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} \varphi) \right) = 0$$

sind.

Die hier auftretenden Konstanten müssen einzeln verschwinden, und es werden so die folgenden 4 Gleichungen für  $A B C D$  erhalten, unter Beachtung des Umstandes, daß

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = -\frac{1}{\lambda_2^2}$$

ist:

$$\frac{2n+1}{2n} = Ap_{n-1}(\lambda_1 S) + Bp_{n-1}(\lambda_2 S) + Cq_{n-1}(\lambda_1 S) + Dq_{n-1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = Ap_{n-1}(\lambda_1 S) - Bp_{n-1}(\lambda_2 S) + Cq_{n-1}(\lambda_1 S) - Dq_{n-1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = Ap_{n+1}(\lambda_1 S) + Bp_{n+1}(\lambda_2 S) + Cq_{n+1}(\lambda_1 S) + Dq_{n+1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = Ap_{n+1}(\lambda_1 S) - Bp_{n+1}(\lambda_2 S) + Cq_{n+1}(\lambda_1 S) - Dq_{n+1}(\lambda_2 S).$$

Dieselben lassen sich leicht auflösen und ergeben:

$$A = \frac{2n+1}{4n} \frac{q_{n+1}(\lambda_1 S)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)q_{n+1}(\lambda_1 S) - p_{n+1}(\lambda_1 S)q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$C = -\frac{2n+1}{4n} \frac{p_{n+1}(\lambda_1 S)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)q_{n+1}(\lambda_1 S) - p_{n+1}(\lambda_1 S)q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$B = \frac{2n+1}{4n} \frac{q_{n+1}(\lambda_2 S)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)q_{n+1}(\lambda_2 S) - p_{n+1}(\lambda_2 S)q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

$$D = -\frac{2n+1}{4n} \frac{p_{n+1}(\lambda_2 S)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)q_{n+1}(\lambda_2 S) - p_{n+1}(\lambda_2 S)q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

Indem man diese Ausdrücke in  $q_1$  und  $q_2$  einsetzt, erhält man die vollständige Lösung. Dieselbe lässt sich einfacher darstellen in folgender Weise: Da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  konjugiert sind, so sind auch  $p(\lambda_1\sigma)$  und  $p(\lambda_2\sigma)$  konjugiert, ebenso sind, wie man leicht sieht,  $A$  und  $B$  konjugiert, und es ist daher

$$Ap_n(\lambda_1\sigma) + Bp_n(\lambda_2\sigma)$$

gleich dem doppelten Werte des reellen Teiles jedes dieser Ausdrücke. Ebenso ist

$$Ap_n(\lambda_1\varrho) - Bp_n(\lambda_2\varrho) ,$$

welcher Ausdruck in  $q_2$  vorkommt, gleich dem Doppelten des imaginären Teiles des ersten Gliedes. Indem man dies beachtet, und die Werte von  $A$  und  $C$ , erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

Lösung der Gleichungen für die  $f$  mittels der  $p$  und  $q$ .

$$\begin{aligned} & \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{p_n(\lambda_1\sigma)q_{n+1}(\lambda_1s) - q_n(\lambda_1\sigma)p_{n+1}(\lambda_1s)}{p_{n-1}(\lambda_1\delta)q_{n+1}(\lambda_1s) - q_{n-1}(\lambda_1\delta)p_{n+1}(\lambda_1s)} \\ & = q_1 + q_2\sqrt{-1} = f_1 + f_2\sqrt{-1} . \end{aligned}$$

Besonders einfach wird die Gleichung, wenn  $s = 0$  ist, es sich also um eine Vollkugel handelt. Dann ist  $q_{n+1}(s)$  unendlich, unsere Gleichung wird also:

$$\frac{2n+1}{2n} \frac{p_n(\lambda_1\sigma)}{p_{n-1}(\lambda_1\delta)} = q_1 + q_2\sqrt{-1} .$$

Die Größen, auf deren Kenntnis es uns besonders ankommt, nämlich der Winkel  $\delta = \arctg f_2/f_1$  und die Verstärkung der Stromstärke  $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ , haben eine sehr einfache analytische Bedeutung, sie sind Amplitude und Modul der links stehenden komplexen Größen.

Die Rechnungen lassen sich weiter führen mit Zuhilfenahme der folgenden Bemerkungen:

Weitere Eigenschaften der  $p$  und  $q$ .

Die Integrale, durch welche  $p$  und  $q$  definiert sind, lassen sich für ganzzahlige  $n$  unbestimmt ausführen, und die  $p$  und  $q$  also in geschlossener Form erhalten. Wir können und wollen unter den  $p$  und  $q$  diese so ausgerechneten Funktionen verstehen. Dann sind auch  $q$  mit negativem Argument zulässig, und es gilt die Gleichung

$$-p_n(\varrho) = q_n(\varrho) + q_n(-\varrho) ,$$

aus welcher folgt, dafs

$$p_n(\varrho) = p_n(-\varrho) \quad .$$

Denn sei, unbestimmt ausgeführt,

$$\int (1-v^2)^n e^{-\sigma v} dv = V(\sigma, v) \quad ,$$

dann ist

$$q_n(\sigma) = V(\sigma, \infty) - V(\sigma, 1)$$

$$\begin{aligned} p_n(\sigma) &= \int_0^1 (1-v^2)^n e^{-\sigma v} dv + \int_0^1 (1-v^2)^n e^{\sigma v} dv \\ &= V(-\sigma, 1) - V(-\sigma, 0) \\ &\quad + V(\sigma, 1) - V(\sigma, 0) \quad . \end{aligned}$$

Aber es ist für ganze  $n$

$$V(\sigma, \infty) = 0 \quad , \quad V(-\sigma, 0) = -V(\sigma, 0) \quad ,$$

und so folgt die Behauptung.

Die einfachsten Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung sind also:

$$q_n(\sigma) \text{ und } q_n(-\sigma) \quad .$$

Folgendes sind die Werte der ersten  $q$ , von welchen der erste direkt, die übrigen durch Rekursion bestimmt sind:

$$q_0 = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$q_1 = -\frac{2e^{-\sigma}}{\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$q_2 = \frac{2 \cdot 2! \cdot e^{-\sigma}}{\sigma^3} \left(1 + \frac{3}{\sigma} + \frac{3}{\sigma^2}\right)$$

$$q_3 = -\frac{2 \cdot 3! \cdot e^{-\sigma}}{\sigma^4} \left(1 + \frac{6}{\sigma} + \frac{15}{\sigma^2} + \frac{15}{\sigma^3}\right) \text{ etc.,}$$

Die ersten  $q$ .

woraus also folgt:

$$p_0 = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$p_1 = \frac{2}{\sigma^2} \left( e^{\sigma} + e^{-\sigma} - \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{\sigma} \right) \text{ etc.}$$

Für grosse Werte von  $\sigma$  nähern sich die  $p$  und  $q$  den Ausdrücken:

$$q_n = (-2)^n n! \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{n+1}}$$

$$p_n(\sigma) = -q_n(-\sigma)$$

Die  $p$  und  $q$   
für grosse  
und kleine  
Werte des  
Argumentes.

Für sehr kleine Werte von  $\sigma$  wird:

$$q_n(\sigma) = \frac{(-2)^n n! 1.3 \dots 2n-1}{\sigma^{2n+1}} e^{-\sigma}$$

Die Gleichung  $-p(\sigma) = q(\sigma) + q(-\sigma)$  verliert hier ihre Bedeutung, da für  $\sigma = 0$ ,  $q = \pm \infty$  wird. Um auch für sehr kleine  $\sigma$   $p$  zu kennen, entwickeln wir es in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von  $\sigma$ . Es geschieht das leicht, indem man in dem Integral, welches  $p$  darstellt, für  $e^\sigma$  seine Reihe setzt und gliedweise integriert; man erhält:

$$p_n(\sigma) = \frac{2^{n+1} n!}{1.3 \dots 2n-1} \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{2.2n+3} + \frac{\sigma^4}{2.4.2n+3.2n+5} + \dots \right\}$$

Von Wichtigkeit für später ist uns noch die folgende Formel: Es ist:

$$\begin{aligned} & q_n(\sigma) q_{n-1}(-\sigma) - q_n(-\sigma) q_{n-1}(\sigma) \\ a) &= -\frac{4n(n-1)}{\sigma^2} \left\{ q_{n-1}(\sigma) q_{n-2}(-\sigma) - q_{n-1}(-\sigma) q_{n-2}(\sigma) \right\} \\ &= \frac{n!(n-1)!}{\sigma} \left( -\frac{4}{\sigma^2} \right)^n, \end{aligned}$$

welche Formel sich durch die für  $q$  gefundene Rekursionsformel leicht beweisen läßt.

In allen besprochenen Eigenschaften der  $p_n$  und  $q_n$  zeigt sich eine nahe Verwandtschaft derselben zu den BESSEL'schen Funktionen; in der That lassen sich die  $J^m$  durch die  $p_{m+\frac{1}{2}}$  und  $q_{m+\frac{1}{2}}$  ausdrücken.

Aus der Formel, welche unser Resultat bildete, können wir nun die Funktion  $p$  fortschaffen, und erhalten:

$$\frac{2n+1}{n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda s) q_n(-\lambda \sigma) - q_{n+1}(-\lambda s) q_n(\lambda \sigma)}{q_{n+1}(\lambda s) q_{n-1}(-\lambda \delta) - q_{n+1}(-\lambda s) q_{n-1}(\lambda \delta)} \quad 1)$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} \quad .$$

Definitive  
Form der  
Lösung.

Wir wenden diese Formel, welche die exakte Lösung giebt, auf spezielle Fälle an, welche Vereinfachungen zulassen. Anwendung derselben.

1. Es sei zunächst die Hohlkugel sehr dünn, sei  $d$  ihre Dicke. Es ist dann  $S$  sehr wenig verschieden von  $s$ , sei

Dünne  
Kugel-  
schalen.

$$S = s + \delta \quad , \quad \text{wo nun } \delta = \mu d \text{ ist} \quad .$$

Für  $\sigma$  können wir einen beliebigen Wert zwischen  $s$  und  $S$  setzen, sei  $\sigma = S$ .

Setzt man diesen Wert in obige Formel ein, wendet im Nenner die Substitution

$$q_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} q_n + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{4n(n+1)} q_{n+1}$$

an, und dividiert durch den Zähler, so erhält man:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1}$$

$$= 1 + \frac{\lambda^2 \mu^2}{2(n+1)(2n+1)} \frac{q_{n+1}(\lambda s) q_{n+1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s) q_{n+1}(\lambda S)}{q_{n+1}(\lambda s) q_n(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s) q_n(\lambda S)}$$

Setzt man nun entwickelnd:

$$q_{n+1}(\lambda S) = q_{n+1} \{ \lambda (s + \delta) \}$$

$$= q_{n+1}(\lambda s) + \lambda \delta q'_{n+1}(\lambda s)$$

$$= q_{n+1}(\lambda s) + \frac{\delta \lambda^2 s}{2(n+2)} q_{n+2}(\lambda s) \quad ,$$

$$q_{n+1}(-\lambda S) = q_{n+1}(-\lambda s) - \frac{\delta \lambda^2 s}{2(n+2)} q_{n+2}(-\lambda s) \quad ,$$

1) Es werde fortan für  $\lambda_1$  einfach  $\lambda$  geschrieben, und ist also

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})} \quad .$$



so kann man unter Zuhilfenahme von Formel a) (Seite 82) die  $q$  durch Division wegheben und erhält:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{1}{1 + \frac{s\delta\lambda^2}{2n+1}}$$

Nun ist aber

$$\frac{s\delta}{2n+1} = \frac{4\pi R i \omega}{(2n+1)h} = h$$

nach unserer früheren Bezeichnungsweise, also wird:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} &= \frac{1}{1 + h\sqrt{-1}} \\ &= \frac{1}{1 + h^2} - \frac{h}{1 + h^2} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

welches Resultat mit dem früher erhaltenen zusammenfällt.

Wir haben sonach einerseits unsere Formel an einem schon bekannten Resultate geprüft, andererseits den Beweis geführt, daß die früher gegebenen Formeln für alle  $h$  gelten, welcher Beweis noch ausstand.

Kleine  
Rotations-  
geschwindig-  
keiten.

2. Wir wenden zweitens unsere Formel auf den Fall an, daß wir in den  $f_1$  und  $f_2$  nur die erste Potenz der Drehungsgeschwindigkeit beizubehalten brauchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Vollkugel. Für eine solche hatten wir:

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n} \frac{p_n(\lambda\sigma)}{p_{n-1}(\lambda S)}$$

Entwickeln wir die  $p$  und behalten nur die ersten Potenzen bei, so folgt:

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2 + \frac{\sigma^2}{2n+3} \sqrt{-1}}{2 + \frac{S^2}{2n+1} \sqrt{-1}}$$

Eine nähere Betrachtung dieser Formel zeigt, daß die aus derselben für  $f_1$  und  $f_2$  folgenden Werte, in  $\psi$  eingesetzt, nichts anderes ergeben, als die Induktionen erster und zweiter

Ordnung, welche wir schon auf Seite 72 berechnet haben. Wir betrachten hier nur den Drehungswinkel. Mit ausschließlicher Berücksichtigung der ersten Potenzen hat man:

$$\arctg \frac{f_2}{f_1} = \delta = -\frac{2\pi\omega i}{\kappa} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} \right),$$

also den Drehungswinkel

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{2\pi\omega}{\kappa} \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\rho^2}{2n+3} \right).$$

Es erscheinen also alle Schichten gedreht, die Drehung ist am kleinsten an der Oberfläche der Kugel und nimmt von dort gegen das Innere stetig zu. Denkt man sich durch den Äquator der Kugel einen ebenen Schnitt gelegt, und verbindet korrespondierende Punkte der verschiedenen Schichten, so erhält man ein System kongruenter Kurven, welches sehr geeignet ist, den Zustand der Kugel zu veranschaulichen. Die Gleichung einer dieser Kurven ist offenbar:

$$y = x \operatorname{tg} \left( \frac{\delta}{i}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

oder sehr nahezu:

$$y = -\frac{2\pi\omega}{\kappa} x \left( \frac{R^2}{2n+1} - \frac{x^2}{2n+3} \right).$$

In Fig. 8 sind diese Kurven dargestellt für den Fall, dafs

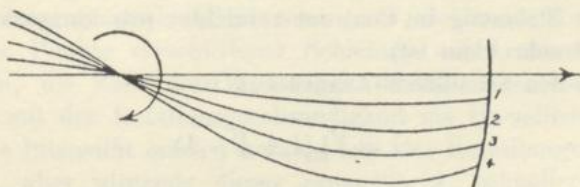


Fig. 8.

die Kugel von Kupfer,  $R = 50 \text{ mm}$ ,  $n = 1$  ist, und dafs die Kugel 1, 2, 3, 4 Umdrehungen in der Sekunde macht.

3. Es werde drittens angenommen, dafs  $\mu$  so grofs sei, dafs für die  $q(S\lambda)$  und  $q(s\lambda)$  ihre angenäherten Werte gesetzt werden können. Es werde ferner angenommen, dafs das Ver-

Große  
Rotations-  
geschwindig-  
keiten.

hhältnis  $r/R$  weder sehr nahe  $= 1$ , noch sehr nahe  $= 0$  sei. Ersterer Fall ist schon erledigt, letzterer muß besonders betrachtet werden. Durch Einsetzung der Näherungswerte in die exakte Formel wird erhalten:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda} \frac{S^n}{\sigma^{n+1}} \frac{e^{\lambda(\sigma-s)} + e^{-\lambda(\sigma-s)}}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}}.$$

Da  $S$  nicht sehr nahe gleich  $s$ , beide aber sehr groß sein sollen, so verschwindet im Nenner das zweite Glied gegen das erste, und es wird

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-r)} (e^{\lambda\mu(\varrho-r)} + e^{-\lambda\mu(\varrho-r)}).$$

Das zweite Glied der Parenthese verschwindet gegen das erste, außer wenn  $\varrho = r$  ist; verzichten wir daher auf eine genaue Kenntnis der Strömung an der inneren Grenze, so können wir setzen:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-\varrho)}.$$

Da  $s$  oder  $r$  aus dieser Gleichung verschwunden ist, so ist anzunehmen, daß sie auch für Vollkugeln Gültigkeit hat, in der That ergibt sie sich leicht aus den für Vollkugeln geltenden exakten Formeln, wenn man ähnliche Vernachlässigungen macht, wie die oben ausgeführten, und auf eine genaue Kenntnis der Strömung im Centrum verzichtet (wo übrigens die Intensität sehr klein ist).

In den erhaltenen Ausdrücken ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt{-1}) ;$$

ohne die Sonderung des Imaginären und Reellen auszuführen, finden wir leicht:

$$\arctg \frac{f_2}{f_1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R - \varrho)$$

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{2n+1}{\mu} \frac{R^n}{\varrho^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in  $\psi$  ein, so erhält man:

$$\psi = -\frac{2n+1}{2(n+1)} A \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)} \sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)\right),$$

welches also diejenige Strömungsfunktion ist, die bei sehr großen Drehungsgeschwindigkeiten von der äußeren Potentialfunktion

$$\chi_n = A \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega P_{ni}$$

hervorgerufen wird.

Die Bedeutung obiger Formel läßt sich leicht durchschauen; stellen wir ihr Ergebnis mit den früheren zusammen, so können wir die Erscheinung, welche eine mit beständig wachsender Geschwindigkeit unter dem Einflusse einer induzierenden Kugelfunktion rotierende Hohlkugel darbieten würde, in folgender Weise beschreiben:

Beginnt die Selbstinduktion merklich zu werden, so verändert sie die Form der Strömungskurven in den einzelnen Kugelschichten nicht, die letzteren aber beginnen sich scheinbar zu drehen im Sinne der Rotation; dabei gehen die inneren Schichten den äußeren voraus. Die Drehung der inneren Schichten ist an keine Grenze gebunden, sondern kann ins Unendliche wachsen, der Drehungswinkel der äußersten Schicht konvergiert gegen den Wert  $\pi/4i$ , nachdem er übrigens vorher bei Hohlkugeln diesen Wert überschritten haben kann. Ist die Drehungsgeschwindigkeit sehr groß, so liegen korrespondierende Punkte verschiedener Schichten auf Archimedischen Spiralen, die Zahl der Windungen derselben in der Kugel wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit ins Unendliche.

Die Intensität wächst anfangs mit der Rotationsgeschwindigkeit, aber nirgends dieser proportional, schneller in den äußeren, als in den inneren Schichten. In der äußersten Schicht wächst sie beständig, schließlic wie  $\sqrt{\omega}$ , in allen anderen erreicht sie bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit ein Maximum, um dann wieder abzunehmen. Bei großen  $\omega$  nimmt sie vom Rande gegen das Innere ab wie eine Exponentialfunktion, deren Exponent  $\sqrt{\omega}$  enthält.

Von Interesse ist noch die Abhängigkeit der Erscheinung

Zusammenfassung des Resultates.

von der Ordnungszahl  $i$  (deren Quadratwurzel auch in  $\mu$  enthalten ist); ich verweise deshalb auf die Formeln.

Ein scheinbarer Widerspruch zwischen der Theorie einer unendlich dünner Hohlkugel und der einer Hohlkugel von endlicher Dicke mag auffallen; derselbe löst sich leicht, wenn man beachtet, dass jede noch so dünne Hohlkugel nur bis zu einer gewissen Gröfse der Rotationsgeschwindigkeit als unendlich dünn betrachtet werden darf.

Fall, dass die  
Magnete im  
Inneren der  
Hohlkugel  
liegen.

Ich will noch kurz den Fall erledigen, dass die induzierenden Magnete im Innern der Hohlkugel liegen, dass also die auftretenden Kugelfunktionen negativer Ordnung sind.

Es sei

$$\chi_n = A \left( \frac{r}{\rho} \right)^{n+1} \cos i\omega P_{ni} ,$$

dann wird:

$$\psi_0 = \frac{\omega}{\alpha} A \rho \left( \frac{r}{\rho} \right)^{n+1} \frac{i}{n} \sin i\omega P_{ni} .$$

Setzen wir nun

$$\psi = \frac{\omega}{\alpha} A \rho \left( \frac{r}{\rho} \right)^{n+1} \frac{i}{n} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega) P_{ni} ,$$

so wird die von  $\psi$  induzierte Funktion  $\psi'$ :

$$\psi' = - \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 A \rho \left( \frac{r}{\rho} \right)^{n+1} \frac{i^2}{n} (F_1 \cos i\omega - F_2 \sin i\omega) P_{ni} .$$

Dabei ist aber der Zusammenhang zwischen  $f$  und  $F$  ein etwas anderer, als früher; es ist nämlich gesetzt:

$$F(\rho) = \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ \int_r^e a f a da + \int_e^R \frac{\rho^{2n+1}}{a^{2n}} f a da \right\} .$$

Die Bedingung

$$\psi = \psi_0 + \psi'$$

liefert wieder die Gleichungen:

$$f_1 = 1 + \frac{i\omega}{\alpha} F_2$$

$$f_2 = - \frac{i\omega}{\alpha} F_1 .$$

Unter Benutzung derselben Abkürzungen, wie früher, werden dieselben:

$$\varphi_1 \sigma = 1 + \frac{1}{2n+1} \left\{ \int_a^\sigma a \varphi_2(a) da + \int_\sigma^s \sigma^{2n+1} a^{-2n} \varphi_2 a da \right\}$$

$$\varphi_2 \sigma = - \frac{1}{2n+1} \left\{ \int_a^\sigma a \varphi_1 a da + \int_\sigma^s \sigma^{2n+1} a^{-2n} \varphi_1 a da \right\} .$$

Differentiiert geben diese:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \sigma^{2n+2} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{-2n-1} \varphi_1) \right) = - \sigma \varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \sigma^{2n+2} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{-2n-1} \varphi_2) \right) = \sigma \varphi_1 ,$$

oder:

$$\varphi_1'' - \frac{2n}{\sigma} \varphi_1' = - \varphi_2$$

$$\varphi_2'' - \frac{2n}{\sigma} \varphi_2' = \varphi_1 .$$

Setzt man  $\varphi = \sigma^{2n+1} \bar{\varphi}$ , so folgen für die  $\bar{\varphi}$  die Gleichungen:

$$\bar{\varphi}_1'' + \frac{2n+2}{\sigma} \bar{\varphi}_1' = - \bar{\varphi}_2$$

$$\bar{\varphi}_2'' + \frac{2n+2}{\sigma} \bar{\varphi}_2' = \bar{\varphi}_1 ,$$

also Gleichungen, welche wieder auf die  $p_n$  und  $q_n$  führen.

Die Bestimmung der Konstanten läßt sich dann ganz analog der früheren ausführen und es wird erhalten:

$$\begin{aligned} & \varphi_1 \sqrt{-1} - \varphi_2 \\ = & - 2(n+1)(2n+1) \frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}} . \end{aligned}$$

$$\frac{q_{n-1}(\lambda S) q_n(-\lambda \sigma) - q_{n-1}(-\lambda S) q_n(\lambda \sigma)}{q_{n-1}(\lambda S) q_{n+1}(-\lambda s) - q_{n-1}(-\lambda S) q_{n+1}(\lambda s)} .$$

Besonders einfach wird die Formel für den Fall, daß  $S\infty$  ist, es sich also um einen kugelförmigen Hohlraum in einer unbegrenzten Masse handelt.

Dann wird  $q_{n-1}(\lambda S) = 0$ , und also wird

$$q_1 \sqrt{-1} + q_2 = -2(n+1)(2n+1) \frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}} \cdot \frac{q_n(\sigma\lambda)}{q_{n+1}(s\lambda)} .$$

Kann man  $\mu\varrho = \sigma$  wegen des sehr kleinen Wertes von  $\omega$  gegen die Einheit vernachlässigen, so kann man für die  $q_n$  ihre Werte für kleine Argumente (Seite 82) setzen und erhält dann:

$$q_1 \sqrt{-1} + q_2 = \lambda^2 e^{-\lambda(\sigma-s)} ,$$

oder, da wir die Größen von der Ordnung  $\sigma$  schon zum Teil vernachlässigt haben:

$$q_1 \sqrt{-1} + q_2 = \lambda^2 = \sqrt{-1}$$

$$q_1 = 1 \quad , \quad q_2 = 0 \quad ,$$

wie es sein muß.

Verschwundet andererseits die Einheit gegen  $\mu\varrho$ , und ersetzt man demgemäß die  $q_n$  durch ihre Näherungswerte für große Argumente (Seite 82), so erhält man:

$$q_1 + q_2 \sqrt{-1} = (2n+1) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \frac{1}{s\lambda} e^{-\lambda(\sigma-s)} .$$

Daraus ergeben sich ähnliche Erscheinungen, wie an der Vollkugel, die Drehung beträgt  $45^\circ/i$  an der innersten Schicht und wächst mit wachsendem  $\varrho$  ins Unendliche.

Für  $\psi$  findet man

$$\psi = \frac{2n+1}{2n} A \sqrt{\frac{i\omega}{\pi}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho-r)} \sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho-r)\right) ,$$

welche Form der für die Vollkugel erhaltenen ganz analog ist.

Man erkennt übrigens, daß schon bei den kleinsten Drehungsgeschwindigkeiten im unbegrenzten Raume  $\varrho$  so gross gewählt werden kann, daß die gemachten Annäherungen zulässig sind, es wird daher auch schon bei den kleinsten  $\omega$  die In-

Zur Vernachlässigung der Selbstinduktion.

duktion alle möglichen Winkel durchlaufen, allerdings in Entfernungen, in welchen die Intensität sehr klein ist.

Ich erinnere hier an die Bemerkung, welche wir schon auf Seite 65 betreffs der Vernachlässigung der Selbstinduktion gemacht haben.

Es würde ein Leichtes sein, die für Hohlkugeln gewonnenen Resultate auf ebene Platten von endlicher Dicke auszudehnen; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, verzichte ich hierauf. Das Wesentliche der Erscheinung läßt sich übrigens ohne Rechnung aus dem Besprochenen abnehmen.

### § 5. Kräfte, welche die induzierten Strömungen ausüben.

Es sollen jetzt die von den induzierten Strömungen ausgeübten Kräfte und die von denselben erzeugte Wärme berechnet werden. Der letzteren ist die Arbeit gleich, welche geleistet werden muß, um die Rotation zu erhalten.

#### A. Das Potential der induzierten Strömungen.

1. Wir berechnen dasselbe zunächst für den äußeren Raum. Der Teil, welcher von der zwischen  $\varrho = a$  und  $\varrho = a + da$  liegenden Kugelschicht herrührt, ist

$$d\Omega_a = \frac{4\pi n}{2n+1} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} \psi_{ni}(a) da,$$

wenn wir das Glied  $\psi_{ni}$  der gesamten Strömungsfunktion  $\psi$  betrachten.

Nun ist

$$\psi(a) da = -A \frac{\omega}{\alpha} a \left(\frac{a}{R}\right)^n \frac{i}{n+1} (f_1 a \sin i\omega + f_2 a \cos i\omega) P_{ni} da.$$

Setzt man diesen Wert in  $d\Omega$  ein, und versucht die Integration nach den  $a$  auszuführen, so trifft man auf die Integrale:

$$\int_r^R a^{2n+2} f(a) da.$$

Man hat aber:

$$\int_r^R a^{2n+2} f_1 a da = \frac{(2n+1)R^{2n+1}}{4\pi} F_1(R)$$

Das Potential  
der induzierten  
Ströme.

Wert desselben  
im äußeren  
Raume.



nach der Definition für  $F$  (Seite 73);

$$= -\frac{(2n+1)\alpha}{4\pi i\omega} f_2(R)$$

nach den Gleichungen, welchen  $f_1 f_2 F_1 F_2$  genügen (Seite 74);  
und ebenso:

$$\int_r^R a^{2n+2} f_2 a da = \frac{(2n+1)R^{2n+1}}{4\pi} F_2(R)$$

$$= -\frac{(2n+1)\alpha}{4\pi i\omega} (1 - f_1(R)) .$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke findet man:

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1} A \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} (f_2 R \sin i\omega + (1 - f_1 R) \cos i\omega) P_{ni} .$$

Für sehr kleine Drehungsgeschwindigkeiten ist  $f_2 = 0$ ,  
 $f_1 = 1$ , also  $\Omega = 0$ ;

für sehr große ist  $f_1 = f_2 = 0$ , also an der Oberfläche der  
Hohlkugel:

$$\bar{\Omega} = \frac{n}{n+1} \bar{\chi}_n .$$

Wert im  
Hohlraum.

2. In ganz derselben Weise lassen sich die Rechnungen  
für den inneren Raum der Hohlkugel ausführen, man findet:

$$\Omega_i = -\left(\frac{\rho}{R}\right)^n A \{f_2 r \sin i\omega + (1 - f_1 r) \cos i\omega\} P_{ni} ,$$

also für das Gesamtpotential:

$$\Omega_i + \chi_n = A \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \{f_1 r \cos i\omega - f_2 r \sin i\omega\} P_{ni} .$$

Für verschwindende Drehungsgeschwindigkeiten wird dieser  
Ausdruck =  $\chi$ , für große = 0, genauer findet sich für große  $\mu$   
aus einer Formel, welche wir schon früher angewandt haben  
(Seite 86):

$$f_1 r + f_2 r \sqrt{-1} \Rightarrow \frac{2(2n+1)}{\lambda\mu} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{e^{\lambda(S-r)} - e^{-\lambda(S-r)}}$$

$$= 2(2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{\lambda\mu} e^{-\lambda\mu(R-r)} .$$

Daraus folgt dann:

$$\Omega_i + \chi_n \\ = A \frac{2(2n+1)}{\mu r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)} \cos\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)\right) P_{ni} .$$

Es nimmt also das Potential im Innern bei wachsender Geschwindigkeit außerordentlich schnell ab, gleichzeitig aber haben seine Niveaulächen die Eigentümlichkeit, um einen der Rotationsgeschwindigkeit proportionalen Winkel gedreht zu erscheinen; die durch das Potential bedingten Kräfte nehmen also bei allmählich wachsender Geschwindigkeit nach und nach alle Richtungen der Windrose an, und zwar bei beliebig wachsender Geschwindigkeit beliebig oft.

Eigentümliches Verhalten der magnetischen Kräfte im Hohlraume.

#### B. Erzeugte Wärme.

Es sei  $R$  der Radius einer sehr dünnen Kugelschale, es herrsche in derselben die Strömungsfunktion:

$$\psi = \sum \psi_n .$$

Der Widerstand der Schale sei  $k$ , es wird die in ihr erzeugte Wärme  $W$  gesucht.

Wir bestimmen die  $u, v, w$ , welche zu  $\psi$  gehören, speciell diejenigen, welche zu dem Gliede

$$\psi_{ni} = A \sin i\omega P_{ni}$$

gehören. Sind  $u, v, w$  gefunden, so folgt die erzeugte Wärme:

$$W = k \int (u^2 + v^2 + w^2) ds ,$$

das Integral über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt.

Führen wir die Bezeichnungen  $\Omega$  und  $\Theta$  ein für die Strömungen längs der Breiten- und Meridiankreise in Richtung der wachsenden  $\omega$  und  $\theta$ , so haben wir:

$$\Omega = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\Theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{d\psi}{d\omega}$$

Erzeugte Wärme.

Wärmeerzeugung in einer Kugelschale.

$$u = \Theta \cos \theta \cos \omega + \Omega \sin \omega$$

$$v = \Theta \cos \theta \sin \omega - \Omega \cos \omega$$

$$w = -\Theta \sin \theta \quad .$$

Setzt man hierin den angeführten Wert von  $\psi_{ni}$  ein, so erhält man:

$$u = \frac{A}{R} \{ -\cos i\omega \cos \omega (iP_{ni} \cotg \theta) + \sin i\omega \sin \omega P'_{ni} \}$$

$$v = \frac{A}{R} \{ -\cos i\omega \sin \omega (iP_{ni} \cotg \theta) - \sin i\omega \cos \omega P'_{ni} \}$$

$$w = \frac{A}{R} i \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Nun ist aber:

$$iP_{ni} \cotg \theta = \frac{1}{2} \{ P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1) P_{n,i-1} \}$$

$$P'_{ni} = \frac{1}{2} \{ -P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1) P_{n,i-1} \} \quad .$$

Durch Einsetzung dieser Werte in  $uvw$  folgt:

$$u = -\frac{A}{2R} \{ \cos(i+1)\omega P_{n,i+1} \\ + (n+i)(n-i+1) \cos(i-1)\omega P_{n,i-1} \}$$

$$v = -\frac{A}{2R} \{ \sin(i+1)\omega P_{n,i+1} \\ - (n+i)(n-i+1) \sin(i-1)\omega P_{n,i-1} \}$$

$$w = \frac{A}{R} i \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Hierdurch sind die  $uvw$  nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. In gleicher Form denken wir uns die  $uvw$  für alle Glieder bestimmt, und den Ausdruck

$$\int (u^2 + v^2 + w^2) ds$$

gebildet. Bei der Integration geben diejenigen Glieder, welche Produkte aus Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind, das

Resultat 0; wir können also für jedes  $\psi_n$  das entsprechende  $W_n$  besonders bestimmen und die Resultate addieren. Eine nähere Betrachtung zeigt dann, daß wir auch für jedes  $\psi_{ni}$  die Wärme besonders berechnen und die Resultate addieren können. Es werden allerdings nicht alle Integrale, welche Kombinationen aus verschiedenen  $\psi_i$  entsprechen, gleich Null werden; aber die Integrale in  $\int u^2 ds$ , für welche dies eintritt, werden sich gegen ihnen gleiche in  $\int v^2 ds$  aufheben.

Für das oben angegebene  $\psi_{ni}$  erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} W_{ni} &= k \int (u^2 + v^2 + w^2) ds \\ &= \frac{kA^2}{2R^2} \left\{ \int (\cos(i+1) \omega P_{ni})^2 ds \right. \\ &\quad + (n+i)^2 (n-i+1)^2 \int (\cos(i-1) \omega P_{n,i-1})^2 ds \\ &\quad \left. + 2i^2 \int (\cos i \omega P_{ni})^2 ds \right\} , \end{aligned}$$

was nach bekannten Formeln und einfachen Reduktionen ergibt:

$$\begin{aligned} W_{ni} &= kA^2 \cdot \frac{2\pi n(n+1)}{2n+1} (n-i+1)(n-i+2)\dots(n+i) \\ &= kA^2 (n, i) , \end{aligned}$$

wo jetzt  $(n, i)$  eine leicht verständliche Abkürzung ist. Da wir weiter haben:

$$W = \sum_n \sum_i W_{ni} ,$$

so ist unsere Aufgabe gelöst. Man erkennt leicht, daß dem Resultate die Formen gegeben werden können:

$$W = \frac{k}{R^2} \sum_n n(n+1) \sum_i \int \psi_{ni}^2 ds$$

oder:

$$W = \frac{k}{R^2} \sum_n n(n+1) \int \psi_n^2 ds .$$

Der vorliegende Satz hätte, vielleicht einfacher, mittels einer aus dem GREEN'schen Satze abgeleiteten Betrachtung

bewiesen werden können; in dem hier gegebenen Beweise sind implicite die Formeln enthalten:

Analytische Formeln.

$$\int \left\{ \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial \omega_x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial \omega_y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial \omega_z} \right)^2 \right\} ds = n(n+1) \int \psi_n^2 ds ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_x} (\sin i\omega P_{ni})$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(i+1)\omega P_{n,i+1} - \frac{1}{2}(n+i)(n-i+1) \cos(i-1)\omega P_{n,i-1} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_y} (\sin i\omega P_{ni})$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(i+1)\omega P_{n,i+1} + \frac{1}{2}(n+i)(n-i+1) \sin(i-1)\omega P_{n,i-1} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_z} (\sin i\omega P_{ni}) = i \cos i\omega P_{ni} ,$$

an welche sich leicht ähnliche anschließen lassen. Beziehen sich  $\omega$ ,  $\theta$  und  $\omega'$ ,  $\theta'$  auf Polarkoordinatensysteme mit verschiedenen Axen, so erlauben die zuletzt angeführten Gleichungen, Integrale von der Form

$$\int \cos i\omega P_{ni}(\theta) \cos j\omega' P_{nj}(\theta') ds' ,$$

(in welchen die  $\omega'$ ,  $\theta'$  als die Integrationsvariablen betrachtet sind) aus dem bekannten

$$\int P_{n0}(\theta) \cos j\omega' P_{nj}(\theta') ds' = \frac{4\pi}{2n+1} \cos j\omega' P_{nj}(\theta)$$

abzuleiten, allerdings im allgemeinen nur mittels weitläufiger Rechnungen.

Wärme-  
erzeugung in  
der rotieren-  
den Kugel.

Ich bestimme jetzt die in der rotierenden Kugel durch das Glied  $\chi_{ni}$  der induzierenden Potentialfunktion erzeugte Wärme. Zu  $\chi_{ni}$  gehört:

$$\psi_{ni} = -\frac{\omega}{\alpha} A \rho \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \frac{i}{n+1} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega) P_{ni} ,$$

also die Wärme

$$W_{ni} = \frac{\omega^2}{\alpha} A^2 \frac{i^2 (n, i)}{(n+1)^2} \int \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2n} (f_1^2 + f_2^2) \rho^2 d\rho .$$

Das Integral kann ausgeführt werden für kleine und für große Drehungsgeschwindigkeiten. Für erstere ist  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 0$ , und es wird daher die erzeugte Wärme in diesem Falle:

$$W_{ni} = A^2 \frac{R^3 \omega^2}{\kappa} \frac{i^2(n, i)}{(n+1)^2(2n+3)} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+3} \right).$$

Bei kleinen  
Geschwin-  
digkeiten.

Für sehr große Drehungsgeschwindigkeiten hingegen war

$$f_1^2 + f_2^2 = \frac{(2n+1)^2 R^{2n}}{\mu^2 \rho^{2n}} e^{-\mu \sqrt{2}(R-\varrho)}.$$

Bei großen  
Geschwin-  
digkeiten.

Es wird daher das in  $W_{ni}$  vorkommende Integral, welches von  $r = 0$  an genommen werden kann, gleich

$$\int_0^R \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} e^{-\mu \sqrt{2}(R-\varrho)} d\varrho$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{\mu^3 \sqrt{2}},$$

da  $R\mu$  als sehr groß betrachtet wird. Wir erhalten sonach für sehr große  $\omega$ :

$$W_{ni} = A^2 \frac{(2n+1)^2 (n, i)}{8(n+1)^2} \sqrt{\frac{\kappa \omega i}{2\pi^3}}.$$

$W$  ist von  $R$  noch insofern abhängig, als dasselbe in  $A$  enthalten ist.

Die entwickelte Wärme wächst also ins Unendliche mit wachsendem  $\omega^1$ , und zwar wie  $\sqrt{\omega}$ . Das gleiche gilt von der zur Erhaltung der Rotation erfordernten Arbeit. Bilden die induzierenden Magnete ein fest verbundenes System, so wird demselben ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe erteilt, welches sich aus der erzeugten Wärme berechnen läßt. Denkt man sich nämlich die Kugel ruhend, die äußeren Magnete rotierend mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so leistet das Drehungsmoment  $D$ , welches die Bewegung erhält, in der

<sup>1)</sup> Wegen des scheinbaren Widerspruches mit dem für  $\infty$  dünne Kugelschalen erhaltenen Resultate gilt die Bemerkung auf Seite 88.

Zeiteinheit die Arbeit  $2\pi\omega D$ , diese Arbeit ist gleich der erzeugten Wärme, also

$$D = \frac{W}{2\pi\omega} .$$

Drehungs-  
moment, wel-  
ches auf die  
induzieren-  
den Magnete  
ausgeübt  
wird.

Es ist aber dies Drehungsmoment gleich demjenigen, welches umgekehrt die rotierende Kugel den ruhenden Magneten erteilt. Man erkennt leicht, daß für kleine  $\omega$   $D$  proportional mit  $\omega/x$  wächst, für große  $\omega$  nimmt es ab mit wachsendem  $\omega$ , und zwar ist es proportional mit  $\sqrt{x/\omega}$ , schliesslich wird es unendlich klein. (Das hindert nicht, daß es eine Arbeit von der Ordnung  $\sqrt{\omega}$  leistet.) Andererseits sahen wir schon, daß bei unendlichen  $\omega$  die auf die induzierenden Magnete ausgeübten Kräfte endlich sind, da dieselben nun ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe nicht hervorrufen, so müssen ihre Resultanten in einer durch die Axe gelegten Ebene wirken.

In der That verhält sich bei unendlichen  $\omega$  die Kugel zu den äußeren Magneten ähnlich, wie eine leitende Kugel zu elektrischen Massen; eine leitende Kugel kann aber induzierenden Massen keine Rotation um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe erteilen.

### § 6. Rotation magnetischer Kugeln.

Ich mache jetzt die Annahme, daß die Masse der Kugel fähig sei, magnetische Polarität anzunehmen. Von dem Vorhandensein einer Koerzitivkraft sehe ich ab.

Zunächst sind die für diesen Fall geltenden Formen der elektromotorischen Kräfte zu bilden. Nach Anleitung des § 1,6 haben wir, um die Wirkung der Magnetismen zu erhalten, in den allgemeinen Formeln für die elektromotorischen Kräfte zu ersetzen:

$$U \text{ durch } \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} ,$$

$$V \text{ durch } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} ,$$

$$W \text{ durch } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .$$

Danach ist weiter zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} & \text{ durch } \Delta N + \frac{\partial \chi}{\partial z} , \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} & \text{ durch } \Delta M + \frac{\partial \chi}{\partial y} , \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} & \text{ durch } \Delta L + \frac{\partial \chi}{\partial x} , \end{aligned} \quad 1)$$

da

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\chi \text{ ist.} \quad 2)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \Delta L &= -4\pi\lambda \\ \Delta M &= -4\pi\mu \\ \Delta N &= -4\pi\nu , \end{aligned} \quad 3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\theta} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \frac{\mu}{\theta} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ \frac{\nu}{\theta} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial z} . \end{aligned} \quad 4)$$

Indem man hiernach  $L, M, N$  aus den Ausdrücken 1) eliminiert, und die von den Strömen direkt ausgeübten Kräfte  $\partial V/\partial x - \partial U/\partial y$  etc. addiert, erhält man für die Ausdrücke, welche jetzt an Stelle der  $\partial V/\partial x - \partial U/\partial y$  etc. zu treten haben, die folgenden:

$$\begin{aligned} (1 + 4\pi\theta) \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \\ (1 + 4\pi\theta) \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ (1 + 4\pi\theta) \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) . \end{aligned} \quad 5)$$



In denselben bedeutet  $\chi$  das Gesamtpotential. Dasselbe besteht aber:

1. aus dem gegebenen äusseren Potential der induzierenden Magnete,

2. aus dem Eigenpotential  $\chi_0$  der magnetisierten Kugel.

Für das letztere gelten die Bedingungen:

Im Innern

$$6) \quad \Delta\chi_0 = 0 ,$$

wie aus Gleichung 2) und 4) folgt; an der Grenze:

$$7) \quad 4\pi\theta N_\rho = (1 + 4\pi\theta) \frac{\partial\chi_{0i}}{\partial\rho} - \frac{\partial\chi_{0a}}{\partial\rho} ,$$

wenn  $N_\rho$  die von den äusseren Magnetismen und den induzierten Strömungen in Richtung des Radius ausgeübte Kraft ist.

In Worten kann man die Wirkung der Polarisierbarkeit des Mediums so aussprechen:

Die Polarisierbarkeit verändert einmal die magnetisierenden Kräfte im Innern in der Weise, wie dies die allgemeine Theorie des Magnetismus angiebt; sie vergrößert zweitens die von den magnetisierenden Kräften verursachten Wirkungen im Verhältnis  $1 + 4\pi\theta$ . Beide Teile der Wirkung haben entgegengesetzte Tendenz; der Erfolg ist, daß die Wirkung auch für sehr große  $\theta$  nur in endlichem Verhältnis vergrößert erscheint.

Vernachlässigung der Selbstinduktion.

Es werde wieder zunächst von der Selbstinduktion abgesehen. Es muß aber bemerkt werden, daß dies nur dann erlaubt ist, wenn

$$R \sqrt{\frac{4\pi\omega(1+4\pi\theta)}{\kappa}}$$

sehr klein ist; bei großen  $\theta$  und  $R$  muß  $\omega$ , auch absolut betrachtet, sehr klein sein, um diese Bedingung zu erfüllen.

Ist das äussere Potential

$$\chi_n = Aq^n Y_n ,$$

so kann das Eigenpotential der Hohlkugel in der Form dargestellt werden:

$$\chi_0 = \left( C + \frac{Br^{2n+1}}{q^{2n+1}} \right) \chi_n$$

und also das Gesamtpotential in der Form:

$$\chi = \left( A + B \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2n+1} \right) \chi_n .$$

Nach dem Vorigen verhält sich nun die magnetische Hohlkugel genau so, wie eine nicht polarisierbare von gleichem Widerstande, welche unter dem Einflusse des Potenciales

$$(1 + 4\pi\theta) \left( A + B \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2n+1} \right) \chi_n$$

steht.

Da dies Potential aus zwei Kugelfunktionen besteht, so lassen sich die Strömungen nach dem Vorigen als bekannt ansehen.

Für die Strömungsfunktion erhalten wir:

$$\psi = - \frac{\omega}{x} (1 + 4\pi\theta) \left( \frac{A}{n+1} - \frac{B}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2n+1} \right) \rho \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} .$$

Wären alle Umstände dieselben, nur  $\theta = 0$ , so würden wir für die Strömungsfunktion  $\psi_0$  erhalten haben

$$\psi_0 = - \frac{\omega}{x} \frac{\rho}{n+1} \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} .$$

Durch Division folgt:

$$\psi = (1 + 4\pi\theta) \left( A - \frac{n+1}{n} B \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2n+1} \right) \psi_0 .$$

Die Form der Strömungen in den einzelnen Schichten ist also nicht geändert, nur ist die Intensität anders verteilt. Es wird bequem sein, die Erscheinungen durch Vergleichung von  $\psi$  mit  $\psi_0$  zu beschreiben. Die Größen  $A$  und  $B$  sind durch die Gleichungen 6) 7) gegeben, setzt man  $r/R = \epsilon$ , so werden sie gefunden:

$$A = \frac{(2n+1)\{2n+1\}(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n}{n(n+1)16\pi^2\theta^2(1-\epsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n(2n+1)}{n(n+1)16\pi^2\theta^2(1-\epsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}$$

Besondere Fälle: Da diese Ausdrücke eine leichte Übersicht nicht gestatten, so sollen dieselben auf vereinfachte Fälle angewandt werden.  
 $\theta$  sehr klein. 1. Es sei  $\theta$  sehr klein. Dann wird durch Entwicklung:

$$A = 1 - \frac{n}{2n+1} 4\pi\theta$$

$$B = \frac{n}{2n+1} 4\pi\theta ,$$

also

$$\psi = \psi_0 + \frac{n+1}{2n+1} 4\pi\theta \left( 1 - \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2n+1} \right) \psi_0 .$$

Die Intensität der Strömung erscheint also an der Innenfläche der Hohlkugel gar nicht verändert, in den übrigen Teilen der Kugel erscheint sie überall verstärkt, wenn  $\theta$  positiv ist. Die Verstärkung ist mit  $\theta$  proportional. In diamagnetischen Kugeln ist die Intensität überall schwächer als in unmagnetischen. Die Drehung magnetischer Kugeln erfordert mehr, die diamagnetischer weniger Arbeit, als die unmagnetischer.  
 $\theta$  sehr groß. 2. Es sei  $\theta$  sehr groß, und nicht gleichzeitig  $\varepsilon$  sehr nahe an 1. Dann wird

$$A = \frac{2n+1}{4\pi\theta n(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

$$B = \frac{2n+1}{4\pi\theta(n+1)(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

und also

$$\psi = \frac{2n+1}{n} \frac{1 - \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2n+1}}{1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+1}} \psi_0 .$$

Es ist also hier die Strömung in der innersten Schicht gleich Null, wächst dann aber rasch nach außen und wird in der Grenzfläche  $(2n+1)/n$  mal so stark, als in der nichtmagnetischen Kugel. Ist  $\theta$  überhaupt groß, so ist die Verstärkung der Strömung von seinem absoluten Werte nahezu unabhängig.

3. Es sei  $\varepsilon$  unendlich nahe gleich 1.

Dann wird

$$A = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)},$$

also wird

$$\psi = \frac{2n+1}{2n+1} \psi_0 = \psi_0.$$

In unendlich dünnen Hohlkugeln ist die Magnetisierbarkeit ohne Einfluß auf die induzierten Strömungen (obgleich die Polarisierungen nicht verschwinden, und die magnetisierenden Kräfte in der Schale Änderungen erleiden). Ich bemerke gleich, daß dies Resultat Gültigkeit behalten wird, auch dann, wenn auf die Selbstinduktion Rücksicht genommen wird.

4. Es sei  $\varepsilon = 0$ , das ist der Fall in der Vollkugel.

Das Glied mit negativem Exponenten von  $\rho$  fällt fort; es wird erhalten:

$$A = \frac{1}{1 + \frac{4\pi\theta n}{2n+1}},$$

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1 + \frac{n}{2n+1} 4\pi\theta} \psi_0.$$

Für große  $\theta$  folgt daraus:

$$\psi = \frac{2n+1}{n} \psi_0.$$

Die Größe  $(2n+1)/n$  liegt zwischen 2 und 3. In Eisenkugeln sind die Strömungen also 2 bis 3 mal stärker als in einem gleich gut leitenden, nicht magnetischen Metalle; die entwickelte Wärme, die gebrauchte Arbeit und bewirkte Dämpfung sind 4 bis 9 mal größer als in jenem.

5. Ebene Platten.

Eine sehr dünne ebene Platte kann als Teil einer sehr dünnen Hohlkugel angesehen werden, für eine solche ist daher

$$\psi = \psi_0.$$

Dünne Hohl-  
kugel.

Vollkugel.

Ebene Plat-  
ten.

Eine sehr dicke Platte kann als Teil einer unendlichen Vollkugel angesehen werden, für eine solche ist, da  $n$  sehr groß zu setzen ist:

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1+2\pi\theta} \psi_0 .$$

In beiden Grenzfällen bleibt auch die gesamte Strömungsform ungeändert; in dem zuletzt genannten ist bei großen  $\theta$  die Intensität durch die Magnetisierbarkeit verdoppelt.

Bei mittleren Dicken der Platten gelten mittlere Werte; die Rechnungen lassen sich leicht durchführen, geben aber keine sehr einfachen Resultate, weshalb sie hier weglassen mögen.

Berücksichtigung der Selbstinduktion.

Es werde jetzt die Selbstinduktion in Betracht gezogen, jedoch sollen die Rechnungen nur für Vollkugeln durchgeführt werden. Analytische Schwierigkeiten besonderer Natur bieten auch Hohlkugeln nicht, die Rechnungen werden aber äußerst kompliziert.

Beschränkung auf Vollkugeln.

Wir finden die Strömung durch folgende Überlegungen: Sei das induzierende Potential

$$\chi_{ni} = A \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \cos i\omega P_{ni} .$$

Sei  $\psi_0$  die von  $\chi_{ni}$  direkt induzierte Strömungsfunktion, dann ist:

$$\psi_0 = - \frac{1+4\pi\theta}{1 + \frac{n}{2n+1} 4\pi\theta} \cdot \frac{\omega}{\alpha} A_0 \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \frac{i}{n+1} \sin i\omega P_{ni} .$$

Sei

$$\psi = - \frac{\omega}{\alpha} A_0 \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \frac{i}{n+1} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega) P_{ni}$$

die thatsächlich stattfindende Strömungsfunktion. Es handelt sich darum, die von dieser induzierte Strömung zu finden. Hierzu ist zunächst die Kenntnis des von  $\psi$  in der magnetischen Masse induzierten Potentials  $\chi_0$  erforderlich.

Die von der Strömungsfunktion

$$\psi = \rho \left( \frac{\rho}{R} \right)^n f(\rho) Y_n$$

in Richtung des Radius ausgeübte magnetische Kraft ist

$$\begin{aligned} N_\rho &= \frac{x}{\rho} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{y}{\rho} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{z}{\rho} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ &= \frac{0}{\rho} \quad (\text{Seite 67}) \\ &= -\frac{n(n+1)}{\rho} F \left( \frac{\rho}{R} \right)^n Y_n, \quad (\text{Seite 69}) \end{aligned}$$

wenn  $F$  und  $f$  den auf Seite 73 angegebenen Zusammenhang haben.

Hieraus und aus den Bedingungsgleichungen für  $\chi_\theta$  (Gleichung 6) 7) Seite 100) ergibt sich im allgemeinen und in unserem speziellen Falle, und wir erhalten für letzteren:

$$\chi_\theta = \frac{4\pi\theta n(n+1)}{2n+1+4\pi\theta n}$$

$$\frac{\omega}{\alpha} A \frac{i}{n+1} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \{ F_1(R) \sin i\omega + F_2(R) \cos i\omega \} P_{ni}.$$

Verstehen wir nun unter  $\psi'$  diejenige Strömungsfunktion, welche  $\psi$  und  $\chi_\theta$  zusammen in der unmagnetischen Kugel erzeugen würden, so veranlassen sie in der magnetischen Masse die Funktion

$$\psi'_\theta = (1 + 4\pi\theta) \psi',$$

und die Bedingung des stationären Zustandes wird werden:

$$\psi = \psi_0 + \psi'_\theta.$$

$\psi'$  ist genau so zu bilden, wie früher, also ist auch  $\psi'_\theta$  bekannt. Setzt man die Werte von  $\psi$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi'_\theta$  in die letzte Gleichung ein und macht die Koeffizienten von  $\cos i\omega$  und  $\sin i\omega$  einzeln der Null gleich, so folgen für die  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $F_1$  und  $F_2$  die Gleichungen:

$$f_1(\rho) = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} - \frac{\omega i 4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{\alpha 2n+1+4\pi\theta n} F_2(R) + \frac{\omega i}{\alpha} (1+4\pi\theta) F_2(\rho)$$

$$f_2(\varrho) = \frac{\omega i}{x} \frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} F_1(R) - \frac{\omega i}{x} (1+4\pi\theta) F_1(\varrho) .$$

Setzt man hier

$$\frac{4\pi i \omega (1+4\pi\theta)}{x} = \mu^2$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1 \sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2 \sigma ,$$

so werden für die  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  hier genau dieselben Differentialgleichungen erhalten, wie früher (Seite 76). Da wir eine Vollkugel behandeln, brauchen wir nur diejenigen Lösungen beizubehalten, welche im Mittelpunkte endlich sind; wir können also setzen:

$$\varphi_1 = A p_n(\lambda_1 \sigma) + B p_n(\lambda_2 \sigma)$$

$$\varphi_2 = -\lambda_1^2 A p_n(\lambda_1 \sigma) - B \lambda_2^2 p_n(\lambda_2 \sigma)$$

$$\lambda = \lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1})} .$$

Die Bestimmung der Konstanten hat hier genau nach derselben Methode zu geschehen, wie oben. Die Integrale, welche zu bilden sind, sind nicht verschieden von den früheren, nur durch die Weitläufigkeit der Konstanten wird die Rechnung etwas verwickelter. Das Resultat aber ist ein relativ einfaches, es wird gefunden:

Die Lösung. 
$$f_1 \varrho + f_2 \varrho \sqrt{-1} = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta) p_n(\lambda\mu\varrho)}{2n p_{n-1}(\lambda\mu R) + 4\pi\theta n p_n(\lambda\mu R)} .$$

Vergleich  
mit früheren  
Resultaten.

Wir verifizieren zunächst dies Resultat. Für verschwindende  $\theta$  giebt es

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n} \frac{p_n(\lambda\mu\varrho)}{p_{n-1}(\lambda\mu R)} ,$$

Für verschwindende  $\omega$  ergibt es ferner, da

$$p_n(0) = \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \dots 2n+1},$$

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n},$$

was wir gleichfalls gefunden haben. (Seite 103).

Im allgemeinen ist ersichtlich, daß die Form der Strömung in der magnetischen Kugel dieselbe ist, wie diejenige, welche in einer unmagnetischen Kugel von gleichem Widerstande entsteht, wenn letztere  $(1+4\pi\theta)$  mal schneller rotiert als die magnetische Kugel. Beide Strömungen unterscheiden sich dann aber noch dadurch von einander, daß sie, als Ganzes gedacht, um einen gewissen Winkel gegen einander gedreht sind, sowie durch ihre verschiedene Intensität.

Ich wende die Formel auf zwei spezielle Fälle an.

1. Es sei  $4\pi\theta$  sehr groß,  $\omega$  aber hinreichend klein, daß  $\mu^2 R^2$  gegen die Einheit verschwindet. Es soll die Formel entwickelt werden und nur die erste Potenz dieser Größe beibehalten werden. Man hat:

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{n} \frac{p_n(\mu\varrho\lambda)}{p_n(\mu R\lambda)}$$

$$= \frac{2n+1}{n} \frac{2(2n+3) + \mu^2 \varrho^2 \sqrt{-1}}{2(2n+3) + \mu^2 R^2 \sqrt{-1}} \quad (\text{Seite 82}).$$

Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.

Für den Drehungswinkel erhalten wir unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\delta = \arctg \left( \frac{f_2}{f_1} \right) = - \frac{\mu^2}{2(2n+3)} (R^2 - \varrho^2)$$

$$\frac{\delta}{i} = - \frac{16\pi^2 \omega \theta}{2(2n+3)\kappa} (R^2 - \varrho^2).$$

Die Drehung ist also Null in der äußersten Schicht<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Eine Folge davon, daß in dieser Schicht für große  $\theta$ , nach den Gleichungen für  $\chi_\theta$

$$N_r - \frac{\partial \chi_\theta}{\partial r} = 0 \quad \text{ist.}$$



im allgemeinen ist sie bedeutend vergrößert gegen die unmagnetische Kugel, nahezu im Verhältnis  $4\pi\theta$ .

In Fig. 9 sind für eine Eisenkugel die Kurven dargestellt, welche den auf Seite 85 für eine Kupferkugel gegebenen entsprechen. Dabei ist der Widerstand des Eisens

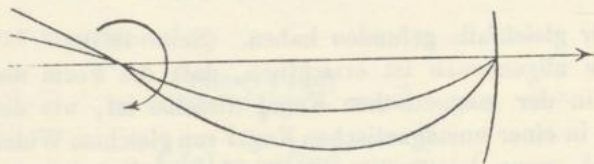


Fig. 9.

gleich dem 6fachen des Kupfers angenommen, und  $4\pi\theta = 200$  gesetzt. Die dargestellten Geschwindigkeiten sind äußerst geringe, nämlich eine Umdrehung in 10 Sekunden und eine Umdrehung in 5 Sekunden; schon hier macht sich also die Selbstinduktion recht bemerklich. Vgl. Fig. 15b, Seite 131.

Große Geschwindigkeiten.

2. Wird  $\omega$  sehr groß, während  $\theta$  einen endlichen, übrigens beliebigen Wert behält, so wird, wie man leicht aus den Formeln ableitet, die Erscheinung derjenigen in unmagnetischen Kugeln durchaus ähnlich werden. Auch hier ist schließlich der Drehungswinkel in der äußersten Schicht  $\pi/4i$ . Die Erscheinung ist identisch mit derjenigen, welche in der unmagnetischen Kugel bei einer  $(1 + 4\pi\theta)$ fachen Geschwindigkeit besteht. Die erzeugte Wärme ist dann  $\sqrt{1 + 4\pi\theta}$  mal größer als in der mit gleicher Geschwindigkeit bewegten unmagnetischen Kugel.

### § 7. Verwandte Probleme.

Es sollen in diesem Paragraphen einige Probleme besprochen werden, die mit den früher behandelten in engem Zusammenhange stehen.

#### I.

Beliebige Rotationskörper.

Sehen wir von der Selbstinduktion ab, so können wir die Kenntnis der Strömung in einer Kugel dazu benutzen, um die Strömung in einem beliebig gestalteten Rotationskörper zu bestimmen, oder doch deren Bestimmung auf eine einfachere Aufgabe zurückzuführen.

Es sei  $S$  der Rotationskörper,  $n$  seine nach innen gekehrte Normale. Wir beschreiben um ihn eine Kugel von beliebigem Radius. Seien  $u_1 v_1 w_1$  die Strömungen, welche in letzterer stattfinden würden, und

$$N = u_1 \cos a + v_1 \cos b + w_1 \cos c$$

die Strömung in Richtung der  $n$  an der Oberfläche von  $S$ . Bestimmen wir  $u_2 v_2 w_2$  so, daß

$$\kappa u_2 = - \frac{\partial q_2}{\partial x}$$

$$\kappa v_2 = - \frac{\partial q_2}{\partial y}$$

$$\kappa w_2 = - \frac{\partial q_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

$$u_2 \cos a + v_2 \cos b + w_2 \cos c = - N \quad ,$$

so sind offenbar

$$u_1 + u_2 \quad , \quad v_1 + v_2 \quad , \quad w_1 + w_2$$

die gesuchten Strömungen in  $S$ . Die Aufgabe ist also auf die einfachere zurückgeführt:

Eine Funktion  $q_2$  so zu bestimmen, daß im Inneren von  $S$   $\Delta q_2 = 0$  und an der Oberfläche  $\partial q_2 / \partial n = \kappa N$ , gleich einer gegebenen Funktion, ist.

1. Es sei beispielsweise eine geradlinig bewegte Platte Geradlinig begrenzte Platten. einseitig begrenzt durch die Gerade  $\xi = b$ . Es sei die äußere Potentialfunktion aufgelöst und ein Glied derselben

$$A e^{-\zeta n} \cos r \eta \cos s \xi \quad .$$

Dann fanden wir für die Strömung in der unendlichen Platte

$$\psi_1 = \frac{r}{n} \cdot \frac{a}{\kappa} \cdot \sin r \eta \cos s \xi \quad .$$

Also ist die Strömung senkrecht zur Grenze:

$$- \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = - \frac{r^2}{n} \cdot \frac{a}{\kappa} \cdot \cos r \eta \cos s b \quad .$$

Daraus folgen für  $\varphi_2$  die Bedingungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0 \quad ,$$

und für  $\xi = b$  :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = \frac{r^3}{n} \frac{\alpha}{x} \cos r\eta \cos sb \quad .$$

Also ist

$$\varphi_2 = \frac{r}{n} \alpha e^{r(\xi-b)} \cos r\eta \cos sb \quad .$$

Zu  $\varphi_2$  gehört die Strömungsfunktion

$$\psi_2 = -\frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-r(b-\xi)} \sin r\eta \cos sb \quad ,$$

und es wird daher die gesamte Strömungsfunktion

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-rb} \sin r\eta (e^{r\xi} \cos sb - e^{rb} \cos s\xi) \quad .$$

Durch Summation über alle Glieder folgt die vollständige Lösung. Ähnlich ist die Lösung für beiderseitig begrenzte Streifen.

Begrenzte  
Scheibe.

2. Um die Strömung in einer begrenzten rotierenden Scheibe zu bestimmen, sei ein Glied der äußeren Potentialfunktion

$$A e^{-n\xi} \cos i\omega J^i(n\rho) \quad .$$

Dann war

$$\psi_1 = \frac{\omega}{x} \frac{i}{n} \sin i\omega J^i(n\rho) \quad ,$$

also die Strömung in Richtung des Radius nach innen für die Grenze, für  $\rho = R$  :

$$\frac{\partial \psi_1}{R \partial \omega} = \frac{\omega}{x} \frac{i^2}{n} \cos i\omega \frac{J^i(nR)}{R} \quad .$$

Daraus folgt, wie oben:

$$\varphi_2 = -\omega \frac{i}{n} J^i(nR) \left(\frac{\rho}{R}\right)^i \cos i\omega \quad .$$

Nach Bestimmung der diesem  $\varphi_2$  entsprechenden Strömung  $\psi_2$  folgt die gesamte Strömung:

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\omega}{\kappa} \frac{i}{n} \frac{\sin i\omega}{R^i} \{R^i J^i(n\rho) - \rho^i J^i(nR)\} .$$

Durch Summation sind wieder die vollständigen Integrale zu erhalten. In gleicher Weise läßt sich die Strömung für Ringe bestimmen, die von konzentrischen Kreisen begrenzt sind.

Im allgemeinen wird weder die Auflösung nach einzelnen Gliedern, noch die Bestimmung des Potentials  $\varphi_2$  zur Lösung der Aufgabe erforderlich sein, es wird genügen,  $\psi_2$  so zu bestimmen, daß es in der Platte der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0$$

genügt und an der Grenze derselben  $= -\psi_1$  wird. Einige einfache Beispiele werden in § 9 gegeben.

## II.

In Leitern bringen die elektromotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprunges dieselben Wirkungen hervor, wie die ihnen numerisch gleichen Kräfte elektrostatischen Ursprunges. Findet das Gleiche in dielektrischen Mitteln statt, so müssen Kugeln aus dielektrischem Material, welche im magnetischen Felde rotieren, eine Polarisation annehmen. Seien

Di-  
elektrische  
Kugeln.

$$\xi, \eta, \delta \frac{\text{mm}^{\frac{1}{2}} \text{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}^2} \text{ )}$$

die Komponenten derselben,

$$\varepsilon \quad (\text{Zahl})^1)$$

die Dielektricitätskonstante.

<sup>1)</sup> Die Einheiten sind wieder derart, daß die Lichtgeschwindigkeit  $1/A$  nicht auftritt, die entsprechenden Größen in magnetischem Maße sind gleich  $A^2\xi, A^2\eta, A^2\delta, A^2\varepsilon$ .

Dann gelten für  $\xi \eta \zeta$  die Gleichungen:

$$\xi = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \mathcal{X}$$

$$\eta = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon \mathcal{Y}$$

$$\zeta = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varepsilon \mathcal{Z} ,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \varphi ;$$

für  $\varrho = R$ :

$$\xi x + \eta y + \zeta z = \frac{\varrho}{4\pi} \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \varrho} \right] .$$

Daraus folgt für  $\varphi$ :

$$\Delta \varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon} \left( \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z} \right)$$

und für  $\varrho = R$ :

$$(1+4\pi\varepsilon) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{\varrho} (x\mathcal{X} + y\mathcal{Y} + z\mathcal{Z}) .$$

Im äußeren Raume muß sein  $\Delta \varphi = 0$ .

Ist wieder  $\chi_n$  das  $n$ te Glied des äußeren Potentials, so ist, wie oben (Seite 45):

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z} = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$x\mathcal{X} + y\mathcal{Y} + z\mathcal{Z} = \omega \left( \varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) .$$

Um die Bedingungsgleichungen zu erfüllen, setzen wir:

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi' ,$$

$$\varphi^0 = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon} \frac{\omega}{n+1} \left( \varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) ,$$

$$\varphi_a^0 = \frac{4\pi\epsilon}{1+4\pi\epsilon} \frac{\omega}{n+1} \left[ \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+2} \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho^2}{2n+1} \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \chi_n \right) + \left( \frac{R}{\rho} \right)^n \frac{R^2}{2n+1} \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right].$$

$\varphi_i^0$  genügt der partiellen Differentialgleichung, welcher  $\varphi$  genügen soll.  $\varphi_a^0$  ist so gebildet, daß es 1. der Gleichung

$$A\varphi_a^0 = 0$$

genügt, 2. an der Oberfläche der Kugel mit  $\varphi_i^0$  zusammenfällt. Daß erstere Bedingung erfüllt ist, erkennt man daraus, daß die überstrichenen Ausdrücke Kugelflächenfunktionen  $(n+1)$ ten und  $(n-1)$ ten Grades sind, wie man leicht nachweist. Durch Einsetzung von  $\varphi^0 + \varphi'$  in die Bedingungen für  $\varphi$  erhält man für  $\varphi'$  die Gleichungen:

$$A\varphi' \text{ überall} = 0, \quad \varphi' \text{ stetig,}$$

für  $\rho = R$ :

$$(1 + 4\pi\epsilon) \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi'_a}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi_a^0}{\partial \rho},$$

deren Erfüllung keine Schwierigkeit hat, da wir  $\varphi_a^0$  schon als Summe von Kugelfunktionen dargestellt haben.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß ein kugelförmiger Magnet in einem, ihn umgebenden ruhenden Dielektrikum rotiert, da die Erde ein rotierender Magnet und der Weltraum nach der Annahme vieler Physiker ein Dielektrikum ist. Um in diesem Falle das elektrische Potential zu bestimmen, haben wir zu beachten, daß die Erde ein Leiter ist, es wird daher auch in ihr eine Verteilung eintreten, die auf das Dielektrikum zurückwirkt, und zur Folge hat, daß an der Oberfläche der Erde das Potential konstant wird.

Erde im dielektrischen Raume.

Ist  $\chi = \sum \chi_n$  das Potential der Erde, so ist die Aufgabe diese:

$\varphi$  so zu bestimmen, daß im äußeren Raum

$$A\varphi = \frac{4\pi\epsilon}{1+4\pi\epsilon} \cdot 2\omega \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

und an der Oberfläche  $\varphi = \text{const}$  ist.

Man findet leicht:

$$\varphi = \frac{4\pi\epsilon}{1+4\pi\epsilon} \omega \sum \frac{R^2 - \rho^2}{2n+1} \frac{\partial \chi_n}{\partial z}.$$

Für die Steigung des Potentials an der Erdoberfläche folgt daraus:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{4\pi\epsilon}{1+4\pi\epsilon} 2R\omega \sum \frac{1}{2n+1} \frac{\partial \bar{\chi}_n}{\partial z}.$$

Bei weitem der größte Teil der erdmagnetischen Kraft rührt von den Gliedern her, für welche  $n = -2$ , oder doch klein ist. Annähernd können wir daher setzen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{4\pi\epsilon}{1+4\pi\epsilon} \frac{2}{3} R\omega \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial z}.$$

$\bar{\chi}/\partial z$  ist die gegen den Nordpol des Himmels gewandte Komponente der erdmagnetischen Kraft.

Nimmt man an, dafs für den Weltraum  $4\pi\epsilon/(1+4\pi\epsilon)$  sehr nahe an 1 sei, so erhält man für die elektrischen Steigungen Werte, die von der Ordnung von 1 Daniell auf 50 m, also auferordentlich klein sind. Zu dem obigen Werte von  $\varphi$  kann übrigens noch ein Glied von der Form  $\text{const}/\rho$  hinzutreten. Der Wert desselben hängt ab von der Menge der freien Elektrizität, welche die Erde mit sich führt, und ist nicht Null, wenn diese Menge Null ist; die Ordnung der berechneten Kräfte wird aber durch dieses Glied nicht geändert.

### III.

Kugel-  
förmiger  
Magnet in  
einer Flüssig-  
keit.

Rotiert eine beliebig magnetisierte Kugel in einer Flüssigkeit, die selber leitet und die Oberfläche der Kugel leitend berührt, so wird die Kugel in der Flüssigkeit Ströme verursachen, die im allgemeinen nicht mehr in konzentrischen Kugelschalen erfolgen, sondern den Magneten durchsetzen.

Die Bestimmung dieser Ströme hat, von der Selbstinduktion abgesehen, keine Schwierigkeit mehr, ich will auf die Rechnungen nicht eingehen. Fig. 10 soll den einfachsten Fall

veranschaulichen: Eine homogen magnetisierte Kugel rotiert um ihre magnetische Axe. Die gezeichnete Figur stellt die Strömungslinien in einem Meridianschnitt dar. Die Form

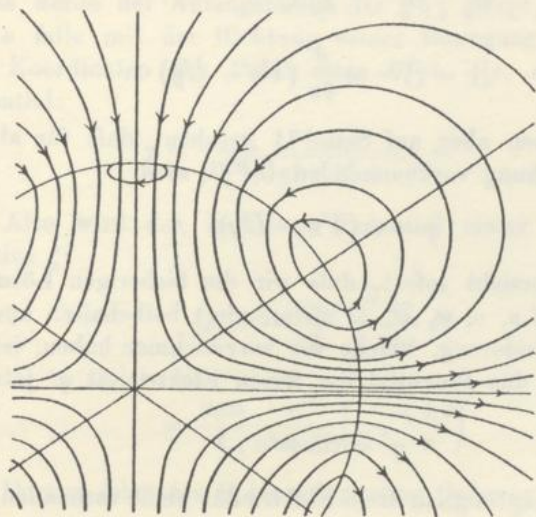


Fig. 10.

derselben ist hier unabhängig von den Widerständen der Flüssigkeit und des Magneten. Die Intensität aber wird Null, wenn einer derselben unendlich wird.

#### § 8. Lösung für die Formeln des Potentialgesetzes.

Ich habe bisher für die induzierten elektromotorischen Kräfte diejenigen Formen angenommen, welche Herr JOCHMANN für dieselben aus dem WEBER'schen Grundgesetze abgeleitet hat. Ich will jetzt untersuchen, welche Änderungen die Resultate erleiden durch Anwendung der aus dem Potentialgesetze folgenden Formeln, welche im 78. Bande des BORCHARDT'schen Journales gegeben sind <sup>1)</sup>.

Bezeichnen  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  die bisher angenommenen elektromotorischen Kräfte,  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{Y}'$ ,  $\mathfrak{Z}'$  die aus dem Potentialgesetze folgenden, so ist

<sup>1)</sup> [HELMHOLTZ, Wiss. Abh. Bd. I. S. 702.]



$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} - \omega \frac{\partial}{\partial x} (Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} - \omega \frac{\partial}{\partial y} (Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} - \omega \frac{\partial}{\partial z} (Vx - Uy) .$$

Wir haben aber auf Seite 71 gesehen, dafs für alle in der Untersuchung vorkommenden  $UVW$  wird:

$$\varphi = \omega (Vx - Uy) .$$

Man übersieht sofort, dafs wir die bisherigen Lösungen in Bezug auf  $u, v, w, \psi, \Omega$  unverändert beibehalten können. Die einzige Änderung, welche wir vorzunehmen haben, ist die, dafs wir für das Potential der freien Elektrizität  $\varphi'$  jetzt zu setzen haben

$$\varphi' = \text{const.} ,$$

und, wenn ursprünglich freie Elektrizität nicht vorhanden war:

$$\varphi' = 0 .$$

Auf einer unendlichen Kugel oder ebenen Platte mufs immer sein:

$$\varphi' = 0 .$$

Zu dem gleichen Resultate ist Herr MAXWELL gelangt, indem er von den Gleichungen des Potentialgesetzes für ruhende Leiter ausging. Verwirft man die Glieder  $\alpha U + \beta V + \gamma W$  in den Formeln der elektromotorischen Kräfte für bewegte Leiter, so sind auch die Gleichungen für ruhende Leiter abzüandern, und die Gleichung

$$\varphi = 0$$

gilt dann nicht mehr.

### § 9. Spezielle Fälle und Anwendungen.

Zum Schlusse sollen die gefundenen Formeln auf einige spezielle Fälle angewandt werden.

1. Ein einzelner Magnetpol von der Intensität 1 bewege sich geradlinig parallel einer unendlich dünnen ebenen Platte. In den Fußpunkt des von ihm auf die Platte gefällten Perpendikels werde der Anfangspunkt der  $\xi \eta \zeta$  gelegt, die negative  $\eta$  Axe falle mit der Richtung seiner Bewegung zusammen.<sup>1)</sup> Die Koordinaten des Poles seien 0, 0,  $-c$ , dann ist sein Potential:

Magnetpol  
über einer  
ebenen  
Platte.

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta + c)^2}} = \frac{1}{r} .$$

Also wird das induzierte Potential erster Ordnung für positive  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{2\pi\alpha}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} d\zeta \\ &= \frac{2\pi\alpha}{k} \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \left(1 - \frac{\zeta + c}{r}\right) . \end{aligned}$$

Daraus folgt das Potential zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= -\frac{2\pi\alpha}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \eta} d\zeta \\ &= \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(c + \zeta - r)\eta}{\eta^2 + \xi^2} \right\} \\ &= \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} (c + \zeta - r) - \frac{\eta^2}{r} \right\} . \end{aligned}$$

In derselben Weise kann weiter gerechnet werden.

Für die Strömungsfunktionen erster und zweiter Ordnung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\alpha}{k} \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \left(1 - \frac{c}{r}\right) \\ &= \frac{\alpha}{k} \frac{\eta}{r(r+c)} , \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Dann wird  $\alpha$  positiv.

<sup>2)</sup> Dies Resultat stimmt vollständig mit dem von Herrn JOCHMANN erhaltenen überein.

$$\psi_2 = -2\pi \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 \frac{r\xi^2 + c\eta^2}{(r^2 - c^2)(r+c)r},$$

worin jetzt  $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + c^2$  ist.

In der  $\eta$  Axe ist: ( $\xi = 0$ )

$$\psi_2 = -2\pi \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 \frac{c}{(r+c)r},$$

also

$$\psi' = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\alpha}{k} \frac{1}{(r+c)r} \left( \eta - \frac{2\pi\alpha c}{k} \right).$$

Verschiebung der Induktionserscheinung.

Als den Mittelpunkt der Erscheinung können wir den Punkt  $\xi = 0$ ,  $\psi = 0$  bezeichnen, derselbe erscheint also infolge der Selbstinduktion verschoben um die Strecke  $2\pi\alpha c/k$  und zwar bleibt er um die genannte Länge hinter dem bewegten Pole zurück. Das gleiche gilt von der gesamten Erscheinung in der Nähe des Pols.

Für unendliche Geschwindigkeiten wird

$$\Omega_+ = -\chi = -\frac{1}{r},$$

$$\psi' = -\frac{1}{2\pi r};$$

für sehr große Werte von  $2\pi\alpha/k$ :

$$\begin{aligned} \Omega &= -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha} \int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi} d\eta \\ &= -\frac{1}{r} + \frac{k}{2\pi\alpha} \frac{\eta(\xi+c)}{r(r^2-\eta^2)} \\ \psi' &= -\frac{1}{2\pi r} \left( 1 - \frac{k}{2\pi\alpha} \frac{\eta c}{\xi^2+c^2} \right). \end{aligned}$$

Auch hier ist die Abscisse des Punktes  $\xi = 0$ ,  $\psi = 0$ :

$$\eta = \frac{2\pi\alpha c}{k},$$

da aber dieser Wert sehr groß ist, und unsere Formel nur für endliche  $\eta$  gilt, so ist er nicht als exakt zu betrachten.

Das Potential der freien Elektrizität in der Platte ist:

$$\varphi = \alpha \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} (\chi + \Omega) d\xi ,$$

also für kleine Geschwindigkeiten:

$$\varphi = \alpha \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\xi = -\alpha \frac{\xi}{r(r+c)} .$$

Die Niveaulinien haben also in diesem Falle dieselbe Form wie die Stromlinien. Für sehr große Geschwindigkeiten ist:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\eta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\eta = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{\eta \xi}{r(r^2 - \eta^2)} ,$$

welche Formel im Unendlichen ihre Gültigkeit verliert.

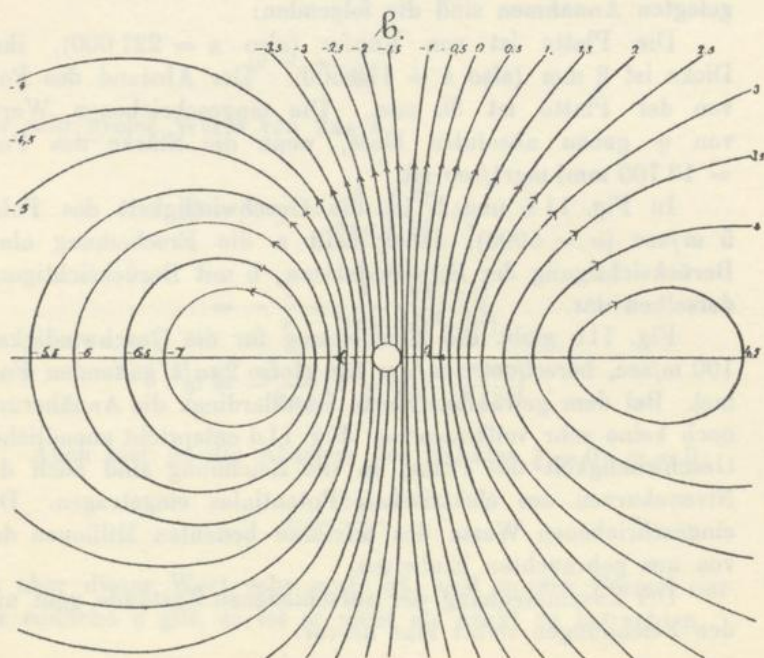
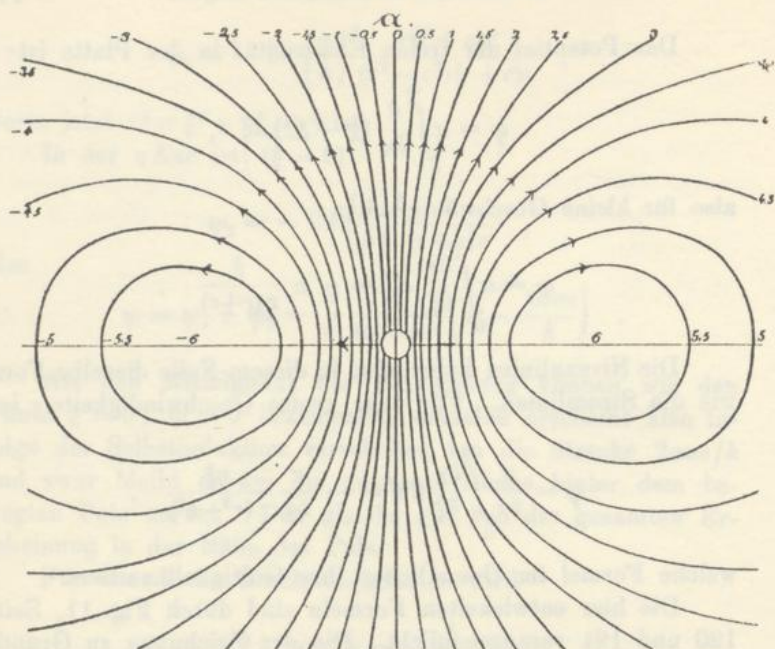
Die hier entwickelten Formeln sind durch Fig. 11, Seite 120 und 121 veranschaulicht. Die der Zeichnung zu Grunde gelegten Annahmen sind die folgenden:

Die Platte ist von Kupfer (also  $\alpha = 227\,000$ ), ihre Dicke ist 2 mm (also  $k = 113\,500$ ). Der Abstand des Pols von der Platte ist 30 mm. Die eingeschriebenen Werte von  $\eta$  geben absolutes Maß, wenn die Stärke des Pols = 13 700 mm<sup>2</sup> mgr<sup>1/2</sup>/sec ist.

In Fig. 11 a und b ist die Geschwindigkeit des Poles 5 m/sec ( $\alpha = 5000$ ), dabei stellt a die Erscheinung ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion, b mit Berücksichtigung derselben dar.

Fig. 11 c giebt die Erscheinung für die Geschwindigkeit 100 m/sec, berechnet aus der für große  $2\pi\alpha/k$  geltenden Formel. Bei dem gewählten Werte ist allerdings die Annäherung noch keine sehr vollkommene. Fig. 11 d entspricht unendlicher Geschwindigkeit des Poles, in die Zeichnung sind auch die Niveaueurven des elektrischen Potentials eingetragen. Die eingeschriebenen Werte des letzteren bedeuten Millionen der von uns gebrauchten Einheiten.

Der Zusammenhang der verschiedenen Zustände geht aus den Zeichnungen selbst klar hervor.

Fig. 11a und b. Geradlinig bewegter Pol.  $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

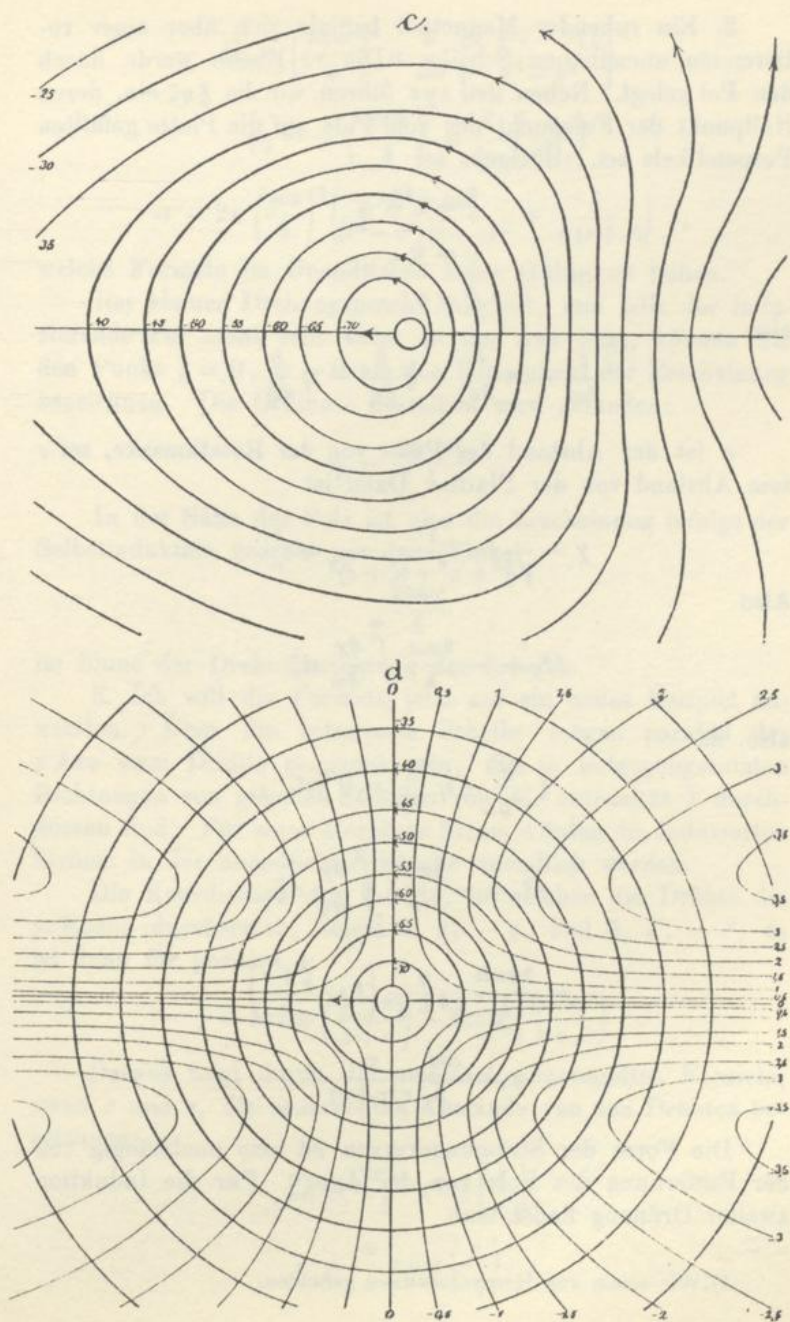


Fig. 11 e und d. Geradlinig bewegter Pol.  $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

Magnetpol  
über einer  
Scheibe.

2. Ein ruhender Magnetpol befindet sich über einer rotierenden unendlichen Scheibe. Die  $xz$  Ebene werde durch den Pol gelegt. Neben den  $xyz$  führen wir die  $\xi\eta\zeta$  ein, deren Nullpunkt der Fußpunkt des vom Pole auf die Platte gefällten Perpendikels sei. Übrigens sei

$$\xi = x - a$$

$$\eta = y$$

$$\zeta = z \quad ,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = a \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \quad .$$

$a$  ist der Abstand des Poles von der Rotationsaxe, sei  $c$  sein Abstand von der Platte. Dann ist

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta + c)^2}} = \frac{1}{r} \quad .$$

Also

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\omega}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial \omega} d\zeta \quad ,$$

also, da

$$\xi \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{ist} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{2\pi\omega a}{k} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} d\zeta \\ &= \frac{2\pi\omega a}{k} \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \left(1 - \frac{\zeta + c}{r}\right) \\ \psi_1 &= \frac{\omega a}{k} \frac{\eta}{r(r+c)} \quad . \end{aligned}$$

Die Form der Strömungskurven ist also unabhängig von der Entfernung des Pols von der Axe.<sup>1)</sup> Für die Induktion zweiter Ordnung findet man

1) Wie schon von Herrn JOCHMANN gefunden.

$$\Omega_2 = \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 a \frac{\partial}{\partial\omega} \left\{ \frac{(\zeta + c - r)\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right\}$$

$$\psi_2 = - \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 a \frac{\partial}{\partial\omega} \left( \frac{\eta}{r+c} \right)$$

$$= - 2\pi \left(\frac{\omega a}{k}\right)^2 \left( \frac{r\xi^2 + c\eta^2}{(r^2 - c^2)(r+c)r} + \frac{\xi}{a(r+c)} \right),$$

welche Formeln im Unendlichen keine Gültigkeit haben.

Bei kleiner Drehungsgeschwindigkeit, und falls der induzierende Pol nicht sehr nahe an der Axe liegt, können wir den Punkt  $\xi = 0$ ,  $\psi = 0$  als den Mittelpunkt der Erscheinung bezeichnen. Die Ordinate desselben wird gefunden:

$$\eta_0 = \frac{2\pi\omega a c}{k}.$$

In der Nähe des Pols ist also die Erscheinung infolge der Selbstinduktion gedreht um den Winkel

$$\frac{2\pi\omega c}{k}$$

im Sinne der Drehungsrichtung der Scheibe.

3. Ich will die Formeln jetzt auf ein neues Beispiel anwenden. Über die rotierende Scheibe mögen parallel der  $x$  Axe zwei Drähte gespannt sein, die in entgegengesetzten Richtungen von gleichen Strömen von der Intensität 1 durchflossen sind. Für einen einzelnen Strom würden die induzierten Ströme in der unendlichen Scheibe unendlich werden.

Die Koordinaten der Punkte, in welchen die Drähte die  $yz$  Ebene durchsetzen, seien  $0, a, -c$ , und  $0, a', -c'$ , es ist dann für positive  $z$ :

$$\chi = \operatorname{arctg} \left( \frac{y-a}{z+c} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{y-a'}{z+c'} \right).$$

Daraus folgt durch die mehrfach angewandten Formeln, wenn  $r$  und  $r_1$  die senkrechten Abstände von den Drähten bezeichnen:

$$\Omega = \frac{2\pi\omega}{k} x \log \left( \frac{r}{r_1} \right)$$

$$\psi = \frac{\omega}{k} x \log \left( \frac{r}{r_1} \right).$$

Drehung der Induktionserscheinung.

Geradlinige Ströme und unbegrenzte Scheibe.



Für das Potential der freien Elektrizität in der Platte findet man

$$\varphi = \omega y \log \left( \frac{r}{r_1} \right) ,$$

die Linien gleichen Potentials sind also Gerade, welche den  
zu Fig. 12a. Drähten parallel laufen. In Fig. 12a sind die Stromlinien für den Fall gezeichnet, daß

$$c = c' = 10 \text{ mm} , \quad a = -a' = 20 \text{ mm} \text{ ist.}$$

Da übrigens im Unendlichen die Strömungen unendlich werden, so wird man sich  $2\pi\omega/k$  außerordentlich klein denken

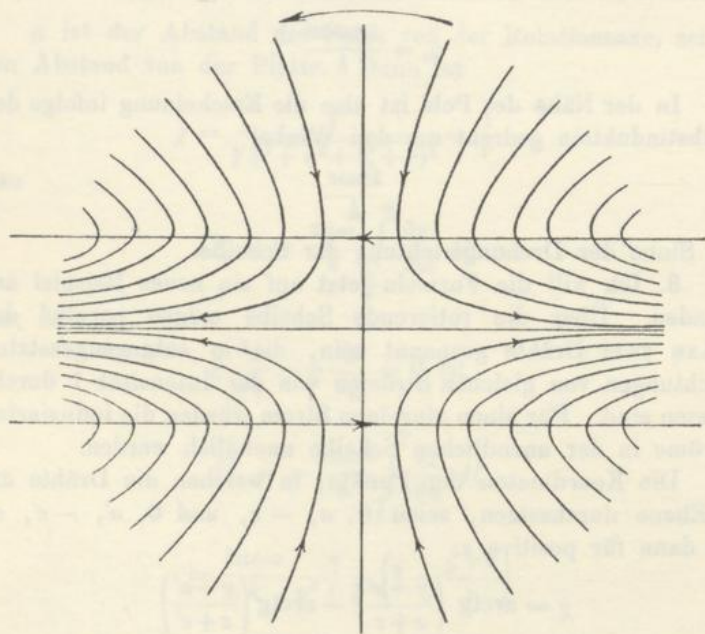


Fig. 12a. Rotierende Scheibe und geradlinige Ströme.  $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

müssen, um noch in einem endlichen Gebiete eine gute Annäherung zu erhalten.

Da ferner alle Ströme im Unendlichen geschlossen sind, läßt sich nicht ohne weiteres von der unendlichen auf die begrenzte Scheibe schließen.

Ich will deshalb nach der § 7 entwickelten Methode die Strömung unter übrigens gleichen Umständen in einer endlichen Scheibe berechnen. Der Radius der letzteren sei  $R$ .

Geradlinige  
Ströme und  
begrenzte  
Scheibe.

Die exakte Lösung des Problems erfordert die Entwicklung ziemlich komplizierter Funktionen in sinus- und cosinus-Reihen; ich mache deshalb die vereinfachende Annahme, daß der senkrechte Abstand der stromtragenden Drähte vom Mittelpunkte der Scheibe groß gegen die Dimensionen der letzteren sei.

Sei zunächst wieder

$$c = c' \quad , \quad a = -a' \quad .$$

Entwickelt man

$$\psi_1 = \frac{\omega}{k} x \log \left( \frac{r}{r_1} \right)$$

nach Potenzen der Koordinaten und vernachlässigt die höheren Potenzen des Ausdrucks

$$\frac{y^2}{c^2 + a^2} \quad ,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{2axy}{c^2 + a^2} + \frac{2ay^3x(3c^2 - a^2)}{3(c^2 + a^2)^3} + \dots \\ &= -\frac{a\varrho^2 \sin 2\omega}{c^2 + a^2} + \frac{(3c^2 - a^2)a}{6(c^2 + a^2)^3} \varrho^4 \left( \sin 2\omega - \frac{\sin 4\omega}{2} \right) . \end{aligned}$$

Das entsprechende  $\psi_2$  (§ 7, I, Schlufs) ist:

$$\psi_2 = \frac{a\varrho^2 \sin 2\omega}{c^2 + a^2} - \frac{(3c^2 - a^2)a}{6(c^2 + a^2)^3} \varrho^2 \left( R^2 \sin 2\omega - \frac{\varrho^2 \sin 4\omega}{2} \right) .$$

Also wird:

$$\psi = -\frac{a(3c^2 - a^2)}{6(c^2 + a^2)^3} \varrho^2 \sin 2\omega (R^2 - \varrho^2) .$$

Die Form der Strömung ist also unabhängig von dem Verhältnis  $a:c$ , ihre Intensität ist aber wesentlich von demselben bedingt. Ist  $a=0$  oder  $a=\sqrt{3} \cdot c$ , so wird sie gleich Null. Ist  $a < c\sqrt{3}$ , so ist die Richtung der Ströme dieselbe wie in

der unendlichen Scheibe; ist  $a > c\sqrt{3}$ , so wird sie die entgegengesetzte. Bei genauer Betrachtung der Verteilung der wirkenden Kräfte läßt sich dies zunächst auffällige Resultat wohl verstehen. Die Form der Erscheinung ist in Fig. 12b dargestellt.

Zu Fig. 12b.

Ebenso läßt sich die Aufgabe für eine beliebige Lage der Drähte lösen. Rückt der eine derselben ins Unendliche, so

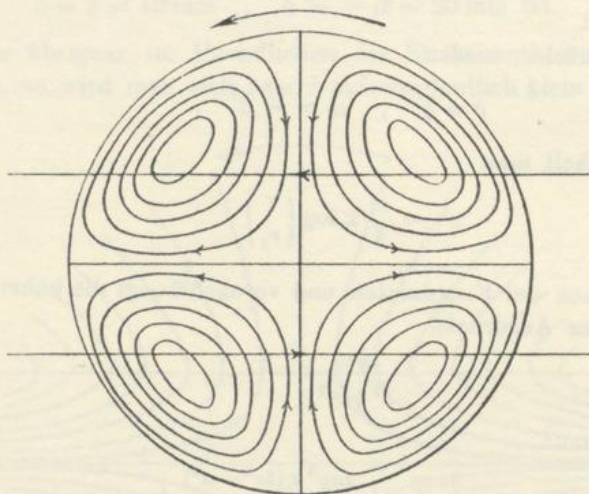


Fig. 12b. Rotierende Scheibe und geradlinige Ströme.  $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

bleiben in der endlichen Scheibe die Ströme endlich, und wir erhalten, unter Bewahrung der ersten beiden Potenzen der Dimensionen der Scheibe:

$$\psi' = \frac{c^2 - a^2}{8(c^2 + a^2)^2} \rho \cos \omega (R^2 - \rho^2) - \frac{a(3c^2 - a^2)}{12(c^2 + a^2)^3} \rho^3 \sin 2\omega (R^2 - \rho^2).$$

Der Zusammenhang mit dem vorigen Resultate ist leicht ersichtlich.

Zu Fig. 13.

In Fig. 13 sind zwei besondere Fälle dargestellt. In a geht der geradlinige Draht durch die Rotationsaxe in hinreichender Entfernung von der Scheibe, es verschwindet in diesem Falle das zweite der oben beibehaltenen Glieder. In b liegt der Draht in der Ebene der Scheibe und zwar in derjenigen

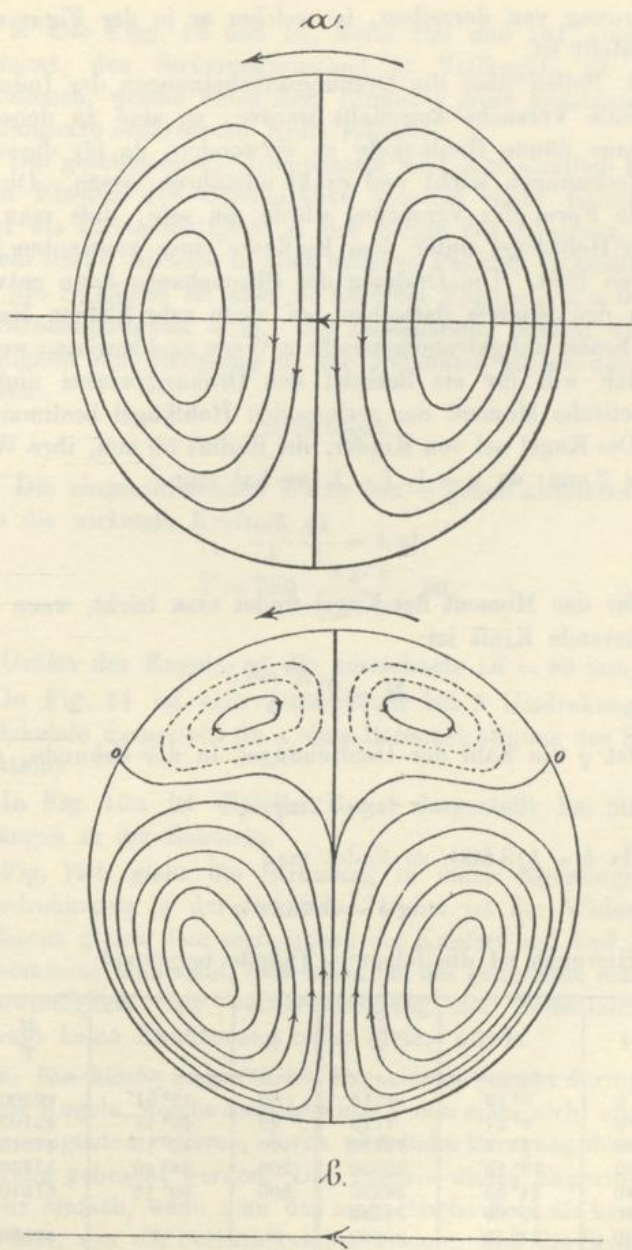


Fig. 13a und b. Rotierende Scheibe und geradliniger Strom.  $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

Entfernung von derselben, in welcher er in der Figur selbst dargestellt ist.

Rotierende  
Hohlkugeln.

Ausführung  
von Ver-  
suchen.

4. Sollen über die Drehungserscheinungen der Induktion messende Versuche angestellt werden, so sind zu denselben durchaus dünne Hohlkugeln zu verwenden, da für diese sich die Rechnungen leicht und exakt ausführen lassen. Die einfachste Form des Versuches würde die sein, daß man eine solche Hohlkugel unter dem Einflusse einer konstanten Kraft rotieren läßt. Die Drehung der Stromebenen kann entweder durch den Einfluß derselben auf einen sehr kleinen Magnet, oder besser auf galvanometrischem Wege nachgewiesen werden.

Ich will für ein Beispiel den Drehungswinkel und das magnetische Moment der rotierenden Hohlkugel bestimmen.

Die Kugel sei von Kupfer, ihr Radius 50 mm, ihre Wandstärke 2 mm; da  $n = 1$ ,  $i = 1$ , so hat man:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi}{3} \frac{R\omega}{k} ,$$

und für das Moment der Kugel findet man leicht, wenn  $T$  die induzierende Kraft ist:

$$M = T \frac{R^3 \sin \delta}{2} .$$

Ist  $q$  die Zahl der Umdrehungen in der Sekunde, so ist

$$\omega = 2\pi q ,$$

und da  $k = 113\,500$ , so findet man

$$\operatorname{tg} \delta = 0.0116 q .$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$q$	$\delta$	$\frac{M}{T}$	$q$	$\delta$	$\frac{M}{T}$
5	3° 19'	3614	80	42° 51'	42500
10	6° 27'	7178	90	46° 13'	45100
20	13° 3'	14110	100	49° 13'	47310
30	19° 10'	20520	200	66° 40'	57360
40	24° 53'	26290	500	80° 15'	61570
50	30° 60'	31340			
60	34° 49'	35680	$\infty$	90°	62500
70	39° 4'	39380			

5. Die Figg. 14 und 15, Seite 130 und 131, sind dazu bestimmt, den Strömungszustand in Vollkugeln zu veranschaulichen, welche unter dem Einflusse einer konstanten zur Drehungsaxe senkrechten Kraft rotieren.

Rotierende  
Vollkugeln  
und kon-  
stante Kraft.

Die geschlossenen Strombahnen sind hier sämtlich Kreise, deren Ebenen der Drehungsaxe parallel sind. Kennt man daher die Stromdichtigkeit in der Ebene des Äquators, so ist es sehr leicht, dieselbe in allen anderen Punkten zu bestimmen. Für die  $xy$  Ebene ist aber in unserem Falle  $u = v = 0$ , also die Stromdichtigkeit  $= w$ . Die Zeichnungen stellen nun die Dichtigkeit der Strömung in der genannten Ebene durch die Kurven:

Zu Figg. 14  
und 15.

$$w = \text{const.}$$

dar. Die eingeschriebenen Werte von  $w$  geben absolutes Mafs, wenn die wirkende Kraft

$$T = 289 \frac{\text{mgr} \frac{1}{2}}{\text{mm} \frac{1}{2} \text{sec}} \text{ ist.}$$

Die Gröfse der Kugeln ist die gezeichnete ( $R = 50$  mm).

In Fig. 14 ist eine Kupferkugel bei 5 Umdrehungen in der Sekunde dargestellt (in a ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion).

In Fig. 15a ist dieselbe Kugel dargestellt bei 50 Umdrehungen in der Sekunde.

Fig. 15b giebt die Strömung in einer Eisenkugel bei 5 Umdrehungen in der Sekunde. Dabei ist der Widerstand des Eisens gleich dem sechsfachen des Kupfers und  $4\pi\theta = 200$  angenommen. Man sieht, dafs schon bei der genannten mäfsigen Geschwindigkeit eine Vernachlässigung der Selbstinduktion durchaus keine Annäherung mehr bieten würde.

6. Ein häufig ausgeführtes Experiment besteht darin, dafs leitende Kugeln, welche zwischen den Polen eines nicht erregten Elektromagneten rotieren, durch plötzliche Erregung desselben zur Ruhe gebracht werden. Die Theorie dieses Experimentes ist sehr einfach, wenn man das magnetische Feld als homogen betrachtet, von der Selbstinduktion absieht, und die Strömung in jedem Augenblicke wie eine stationäre behandelt. Ist  $T$  die

Anhaltung  
rotierender  
Kugeln  
durch einen  
Elektro-  
magneten

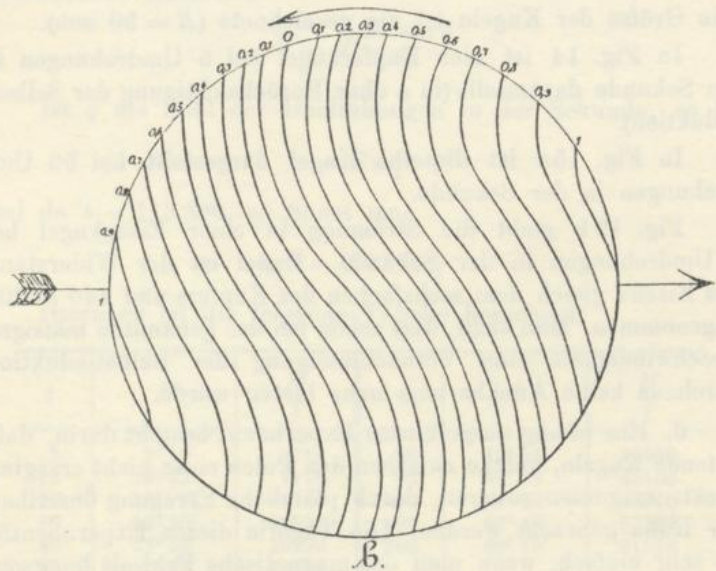
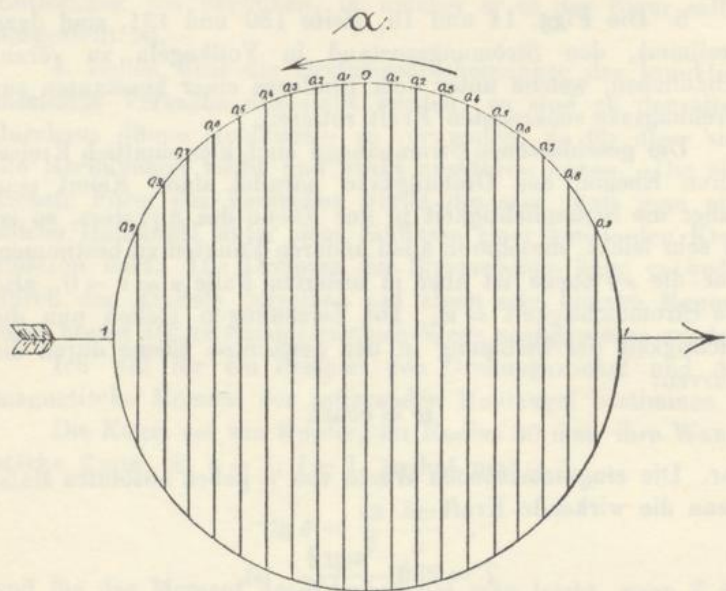


Fig. 14a und b. Rotierende Kupferkugel. 5 Umdrehungen in der Sekunde.  
 $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

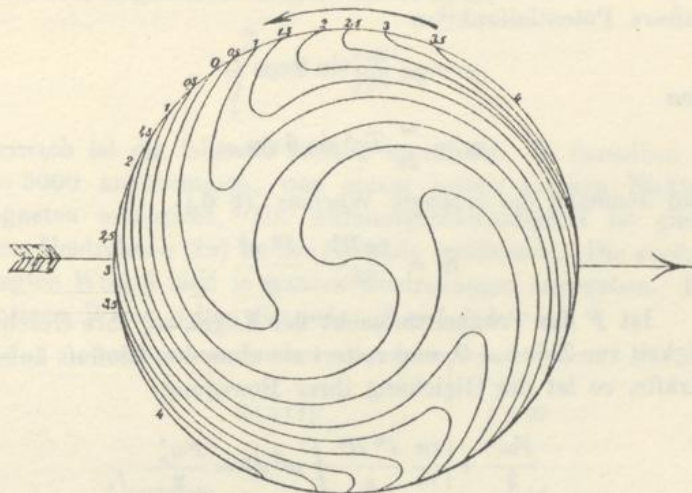


Fig. 15a. Rotierende Kupferkugel. 50 Umdrehungen in der Sekunde.  
 $\frac{2}{3}$  nat. Gr.

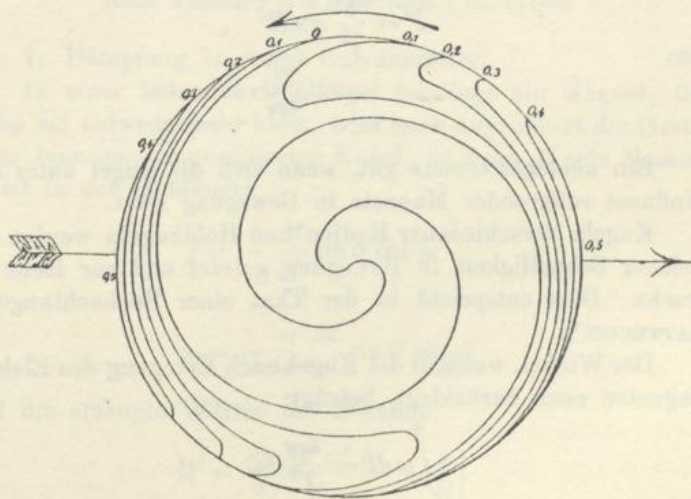


Fig. 15b. Rotierende Eisenkugel. 5 Umdrehungen in der Sekunde  
 $\frac{2}{3}$  nat. Gr.



magnetische Kraft, welche in Richtung der  $x$  wirkt, so ist die äußere Potentialfunktion

$$\chi = - TQ \sin \theta \cos \omega \quad ,$$

also

$$\psi = \frac{\omega}{2x} TQ^2 \sin \theta \sin \omega \quad ,$$

und demnach die erzeugte Wärme: (§ 6.)

$$W = \frac{2\pi R^5}{15} \cdot \frac{T^2 \omega^2}{x} \quad .$$

Ist  $F$  das Trägheitsmoment der Kugel,  $\omega_0$  ihre Geschwindigkeit zur Zeit  $t = 0$ , und rotiert sie ohne den Einfluss äußerer Kräfte, so ist die Gleichung ihrer Bewegung:

$$\frac{F\omega^2}{2} + \frac{2\pi}{15} \frac{T^2 R^5}{x} \int_0^t \omega^2 dt = \frac{F\omega_0^2}{2} \quad ,$$

oder

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{2\pi}{15} \frac{T^2 R^5}{Fx} t} \quad .$$

Ist  $q$  die Masse eines Kubikmillimeters der Substanz, so ist

$$F = \frac{8}{15} q \pi R^5 \quad ,$$

also

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{T^2}{4qx} t} \quad .$$

Ein analoges Gesetz gilt, wenn sich die Kugel unter dem Einflusse rotierender Magnete in Bewegung setzt.

Kugeln verschiedener Radien und Hohlkugeln werden mit gleicher Schnelligkeit in Bewegung gesetzt und zur Ruhe gebracht. Dies entspricht in der That einer Beobachtung von MATTEUCCI<sup>1)</sup>.

Beobachtung  
MATTEUCCI'S.

Der Winkel, welchen die Kugel nach Erregung des Elektromagneten noch zurücklegt, beträgt:

$$\int_0^{\infty} \omega dt = \frac{4qx}{T^2} \omega_0 \quad .$$

<sup>1)</sup> WIEDEMANN, Galvanismus, § 878. [Lehre von der Elektrizität, 1885: Bd. IV. § 386, S. 322.]

Für stark magnetische Kugeln findet man:

$$\int_0^{\infty} \omega dt = \frac{4q\kappa}{9T^2} \omega_0 .$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet. In derselben ist  $T = 5000$  angenommen, was einem mälsig starken Elektromagneten entspricht. Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich einer Umdrehung ( $2\pi$ ) in der Sekunde genommen. Die zurückgelegten Winkel sind in ganzen Umdrehungen angegeben. Die relativen Werte gelten für jedes  $T$  und jedes  $\omega_0$ .

Stoff:	$\int_0^{\infty} \omega dt$
Aluminium . . . . .	0,14
Eisen . . . . .	0,16
Silber . . . . .	0,27
Kupfer . . . . .	0,31
Neusilber . . . . .	3,90
Graphit . . . . .	27,2
Konz. Lösung von Kupfervitriol	ca. 544000

### 7. Dämpfung in einem Galvanometer.

In einer leitenden Hohlkugel schwinde ein Magnet; derselbe sei entweder sehr klein, oder habe angenähert die Gestalt einer homogen magnetisierten Kugel; ist dann  $M$  sein Moment, so ist in der Hohlkugel

Dämpfung  
im Galvano-  
meter.

$$\chi = -\frac{M}{\rho^2} \sin \theta \cos \omega ,$$

also

$$\psi = -\frac{\omega}{\kappa} \frac{M}{\rho} \sin \theta \sin \omega$$

und die erzeugte Wärme per Sekunde:

$$W = \frac{8\pi}{3} \frac{M^2 \omega^3}{\kappa} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ,$$

wenn, wie immer,  $r$  den inneren,  $R$  den äußeren Radius der Hohlkugel bezeichnet.

Es sei jetzt  $\varphi$  der Ausschlag der Nadel aus der Ruhelage,  $F$  das Trägheitsmoment derselben, dann sind ihre Schwingungen bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MT}{F} \varphi + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} = 0 .$$

Schreiben wir dieselbe

$$d \left( \frac{F \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{2} \right) + d \left( \frac{MT\varphi^2}{2} \right) + 2\varepsilon F \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt = 0 ,$$

so sehen wir, dafs

$$2\varepsilon F \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt$$

die während  $dt$  erzeugte Wärme ist, und dafs wir also haben:

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3} \frac{M^2}{\kappa F} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) .$$

Ist  $\varepsilon$  klein, so erhält man daraus für das logarithmische Dekrement der Nadel:

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{3\kappa} \cdot \frac{R-r}{Rr} \sqrt{\frac{M^3}{TF}} .$$

Aperiodi-  
scher Zu-  
stand.

Damit der aperiodische Zustand eintrete, muß sein:

$$\varepsilon^2 > \frac{MT}{F} ,$$

oder

$$\frac{R-r}{Rr} > \frac{3\kappa}{4\pi} \sqrt{\frac{TF}{M^3}} ,$$

aus welcher Gleichung sich, bei gegebenen  $T$ ,  $F$ ,  $M$ ,  $\kappa$ , leicht die zur Erreichung des aperiodischen Zustandes nötige Dicke eines Dämpfers berechnen läßt.