Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Erläuterungen

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Es wird dann schließlich erhalten als Lösung der Aufgabe:

$$\text{c)} \qquad c^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \Big\{ a_{\varrho\sigma} p''_\varrho p''_\sigma + \sum_1^r{}_\tau \left(2 \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial p_\sigma} \right) p'_\varrho p'_\tau p''_\sigma + \sum_1^r{}_\lambda \sum_1^r{}_\mu a_{\varrho\sigma\lambda\mu} p'_\varrho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu \Big\} \;.$$

Hierin sind also die $a_{\varrho\sigma}$ die in **57** eingeführten Funktionen der p_ϱ; die $a_{\varrho\sigma\lambda\mu}$ sind als neu eingeführte Funktionen derselben Größen anzusehen. Die Zahl dieser neu eingeführten Funktionen beträgt $\frac{1}{4} r^2 (r+1)^2$.

Abschnitt 4. Mögliche und unmögliche Verrückungen. Materielle Systeme.

Erläuterungen.

109 **1.** Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntnis eines Teils der Komponenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in bezug auf die übrigen Komponenten möglich ist.

110 **2.** Wenn zwischen den Punkten eines Systems Zusammenhänge bestehen, so ist damit ein Teil der denkbaren Verrückungen des Systems von der Betrachtung ausgeschlossen, diejenigen Verrückungen des Systems nämlich, deren Stattfinden den vorausgesetzten Aussagen widersprechen würde. Umgekehrt bildet jede Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems ein Teil von der Betrachtung auszuschließen sei, einen Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems. Die Zusammenhänge der Punkte eines Systems sind vollständig gegeben, wenn für jede denkbare Verrückung des Systems bekannt gegeben ist, ob dieselbe zur Betrachtung zugelassen oder von derselben ausgeschlossen sei.

3. Die zur Betrachtung zugelassenen Verrückungen heißen mögliche Verrückungen, die übrigen unmögliche. Die möglichen Verrückungen werden auch virtuelle genannt. Mögliche Verrückungen heißen sie stets, wenn sie als engerer Begriff den denkbaren gegenübergestellt werden; virtuelle Verrückungen werden sie nur dann genannt, wenn sie als weiterer Begriff einem engeren, z. B. den wirklichen Verrückungen entgegengestellt werden. 111

4. Mögliche Bahnen heißen alle Bahnen, welche sich aus möglichen Verrückungen zusammensetzen. Mögliche Lagen sind alle Lagen, welche durch mögliche Bahnen erreicht werden können. 112

5. Es sind also alle Lagen möglicher Bahnen mögliche Lagen. Aber es geht aus dem Gesagten nicht hervor, und es soll auch nicht gesagt sein, daß jede denkbare Bahn durch mögliche Lagen auch eine mögliche Bahn sei. Vielmehr kann eine Verrückung auch zwischen unendlich benachbarten möglichen Lagen als eine unmögliche Verrückung bezeichnet sein. 113

6. Zwischen zwei möglichen Lagen gibt es immer eine mögliche Bahn. Denn führt von irgend einer wirklichen Lage zu beiden Lagen auch nur e i n e mögliche Bahn, so bilden diese beiden Bahnen zusammen schon eine mögliche Bahn zwischen den beiden Lagen; führte zu einer von beiden keine mögliche Bahn, so wäre diese Lage auch keine mögliche Lage. 114

Definition 1. Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein stetiger, wenn er den folgenden drei Voraussetzungen nicht widerspricht: 115

1. Daß die Angabe aller möglichen endlichen Verrückungen enthalten sei in der Angabe aller möglichen unendlich kleinen Verrückungen, (Stetigkeit im Endlichen);

2. daß jede mögliche unendlich kleine Verrückung in gerader, stetiger Bahn durchlaufen werden könne, (Stetigkeit im Unendlichkleinen);

3. daß jede unendlich kleine Verrückung, welche aus einer bestimmten Lage möglich ist, auch möglich ist aus jeder unendlich benachbarten Lage, abgesehen von Abweichungen

von der Ordnung der Entfernung der Lagen oder von höherer Ordnung, (stetige Veränderlichkeit der möglichen Verrückungen).

116 **Folgerung.** Wenn in einem System nur stetige Zusammenhänge sich finden, so ist die Summe irgendwelcher möglichen unendlich kleinen Verrückungen aus derselben Lage wieder eine mögliche Verrückung aus der gleichen Lage. (Superposition unendlich kleiner Verrückungen.)

Denn nach **115**, 3 müssen sich die einzelnen Verrückungen hintereinander durchlaufen lassen, und nach **115**, 2 ist dann die direkte Verrückung aus der Anfangs- in die Endlage selbst auch eine mögliche Verrückung.

117 **Definition 2.** Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein innerer, wenn er nur die gegenseitige Lage der Punkte des Systems betrifft.

118 **Folgerung.** Wenn in einem System nur innere Zusammenhänge sich finden, so ist jede Verrückung des Systems, welche die Konfiguration nicht ändert, eine mögliche Verrückung, und umgekehrt.

119 **Definition 3.** Ein Zusammenhang eines Systems heißt ein gesetzmäßiger, wenn er unabhängig von der Zeit besteht.

Ein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht also in der Aussage, daß von den denkbaren Verrückungen des Systems zu jeder Zeit, oder unabhängig von der Zeit, gewisse Verrückungen möglich, andere unmöglich sind.

120 **Anmerkung.** Solange wir von der Geometrie der Systeme handeln, kommt der Unterschied zwischen gesetzmäßigem und ungesetzmäßigem Zusammenhange nicht in Betracht, da unsere Überlegungen die Zeit nicht enthalten. Sind die Zusammenhänge eines Systems zu zwei Zeiten verschieden, so haben wir es für unsere jetzige Betrachtung zu beiden Zeiten mit zwei verschiedenen Systemen zu tun. Es läuft praktisch auf dasselbe hinaus, wenn wir voraussetzen, daß in diesem ersten Buche die Zusammenhänge sämtlich gesetzmäßige seien.

121 **Definition 1.** Ein System materieller Punkte, welches keinen anderen als stetigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein materielles System.

Definition 2. Ein materielles System, welches keinen 122
anderen als inneren und gesetzmäßigen Zusammenhängen unterworfen ist, nennen wir ein freies System.

Definition 3. Ein materielles System, zwischen dessen 123
möglichen Lagen alle denkbaren stetigen Übergänge zugleich auch mögliche Übergänge sind, heißt ein holonomes System.

Der Name soll andeuten, daß ein solches System integralen (ὅλος) Gesetzen (νόμος) gehorcht, während die materiellen Systeme im allgemeinen nur Differentialgesetzen unterworfen sind. (Vergleiche **132** ff.)

Analytische Darstellung.

Bemerkung. Ein System materieller Punkte genügt den 124
Bedingungen eines materiellen Systems, wenn die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Bedingungen unterworfen sind als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind.

Denn die erste Art der Stetigkeit, welche die Definition (**115**) verlangt, muß vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Differentialen der Koordinaten des Systems gesprochen wird; den beiden andern Arten wird durch die Einschränkung der zugelassenen Differentiale genügt.

Umkehrung. Genügt ein System materieller Punkte den 125
Bedingungen eines materiellen Systems, so sind die Differentiale seiner rechtwinkligen Koordinaten keinen anderen Einschränkungen unterworfen, als einer Anzahl homogener linearer Gleichungen unter sich, deren Koeffizienten stetige Funktionen möglicher Werte der Koordinaten sind.

Zum Beweise fassen wir eine mögliche Lage des Systems ins Auge und die möglichen Verrückungen aus ihr. Für eine beliebig herausgegriffene dieser Verrückungen mögen sich die $3n$ Änderungen dx_ν verhalten wie:

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots\ldots : \varepsilon_{13n} \quad .$$