Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Sechster Abschnitt. Messinstrumente

urn:nbn:de:bsz:31-270970

SECHSTER ABSCHNITT.

Messinstrumente.

Die Messinstrumente können eingetheilt werden in geometrische und in mechanistische.

Zu den ersteren gehören die Winkel-, Längen-, Flächen-, Körpermessinstrumente. Ihre Theorie gehört in das Gebiet der praktischen Geometrie. Zu den letzteren gehören die Instrumente zur Bestimmung

a) der Gewichte der Körper, Wagen;
b) der Kräfte, Dynamometer, Manometer;
c) der Zeit, Uhren.

Die Theorie dieser mechanistischen Instrumente gehört in das Gebiet der Mechanik, daher wir uns mit einigen derselben befassen wollen.

Theorie der Wagen.

Die Schnellwage, Römische Wage, Krämerwage.

Fig. 12, Tafel XXIV. ABC ist ein Hebel mit einem kurzen Arm AC und einem langen Arm CB. Er dreht sich bei C um eine Schneide, die in einem Gehänge aufliegt und ist bei A mit einer Wagschale versehen, in welche der Körper F gelegt wird, dessen Gewicht bestimmt werden soll. Auf CB ist eine Eintheilung angebracht. Das Abwägen des Körpers geschieht, indem ein Laufgewicht D längs der Eintheilung von CB hinausgeschoben wird, bis es an einen Ort kommt, wo es dem Gewicht des auf die Wagschale gelegten Körpers das Gleichgewicht hält. Diese Position des Laufgewichtes soll dann auf der Skala das Gewicht angeben.

Nennen wir:
Q das zu bestimmende Gewicht des Körpers F,
S das Gewicht der Wagschale,
P das Laufgewicht,
p das Gewicht des Wagebalkens ohne Schale,
a die Entfernung der Punkte A und C,
b die Entfernung des zwischen C und B liegenden Schwerpunktes des Wagebalkens vom Drehungspunkt C,
x die Entfernung des Laufgewichtes vom Drehungspunkt,
so hat man im Gleichgewichtszustand

$$a\,(Q + S) = p\,b + P\,x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung ist jedoch nur dann richtig, 1) wenn bei C kein Reibungswiderstand vorhanden ist, 2) wenn die Aufhängung der Schale bei A eine vollkommen freie, d. h. eine solche ist, dass die durch diesen Aufhängepunkt gehende Vertikallinie genau durch den Schwerpunkt geht, welcher der Schale und dem darauf liegenden Gewicht entspricht.

Nimmt Q um eine Einheit zu, so muss, um das Gleichgewicht wiederum herzustellen, das Laufgewicht um eine gewisse Länge Δx weiter hinaus geschoben werden, und man hat

$$a\,(Q + 1 + S) = p\,b + P\,(x + \Delta x) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Differenz von (2) und (1) gibt:

$$a = P\,\Delta x, \quad \Delta x = \frac{a}{P}$$

Da Δx constant ist, so fallen die Intervalle der Eintheilung auf BC gleich gross aus, und die Eintheilung kann praktisch bestimmt werden, indem man auf die Wagschale nach einander zwei bekannte Gewichte Q_1 und Q_2 legt, jedesmal die Gleichgewichtsposition des Laufgewichtes auf dem Wagebalken bemerkt und den Abstand dieser zwei Positionen in $Q_2 - Q_1$ gleiche Theile theilt und eine von Q_1 bis Q_2 fortgehende Numerirung der Theilstriche anbringt.

Diese Wage ist weder genau noch bequem und wird nur noch selten gebraucht.

Die gleicharmige Wage.

Es sei, Fig. 13, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Wagebalkens, A und D die Anhängepunkte der Wageschalen, E der Schwerpunkt des Wagebalkens. Ist $AB = BD$ und wird auf beide Schalen gleiches Gewicht gelegt, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die Zunge der Wage einspielt, also vertikal steht. Ist jedoch eines der beiden Gewichte, z. B. P_1, etwas grösser als P, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, wobei die Zunge mit der vertikalen Richtung einen gewissen Winkel φ oder sogenannten Ausschlagswinkel bildet. Eine Wage ist empfindlich, wenn bei einer kleinen Differenz von $P_1 - P$ ein merklicher Ausschlagswinkel eintritt.

Wir wollen nun die Grösse dieses Winkels φ berechnen, wollen jedoch der Untersuchung eine Wage mit ganz beliebigen Abmessungen zu Grunde legen, damit wir aus der Theorie erfahren, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um eine richtige Gewichtsbestimmung zu erhalten.

Es seien, Fig. 14, Tafel XXIV., A und A_1 die Aufhängepunkte der Schalen. Wir nehmen an, diese Aufhängung sei eine vollständig freie, d. h. eine solche, dass wenn man durch diese Punkte Vertikallinien zieht, sie durch die Schwerpunkte der angehängten Körper (Schale und Gewicht) gehen. Es sei ferner C der Drehungspunkt des Wagebalkens und E sein Schwerpunkt. Da wir uns so benehmen wollen, wie wenn wir erst durch die Theorie belehrt werden müssten, wie die Wage angeordnet sein soll, so nehmen wir an, dass die Richtung von CE gegen AA_1 irgend einen Winkel $CDA_1 = \beta$ bildet und dass die Längen AD und DA_1 nicht gleich gross, sondern dass die erstere a, die letztere a_1 sei. Die Zungenrichtung CG wird möglicher Weise gegen CE einen Winkel bilden. Wir setzen $\widehat{HCG} = \gamma$, ferner $CD = b$, $CE = c$. Das Gewicht der Schale mit den Anhängeketten oder Schnüren wird auch ungleich sein können, wir nennen dieselben S und S_1 und das Gewicht des Hebels p und fragen nun wie gross der Ausschlagwinkel ψ sein wird, wenn auf die eine Schale ein Körper gelegt wird, dessen wahres Gewicht P und auf die andere Schale ein Gewicht P_1 gelegt wird, das von P verschieden ist.

Wie Fig. 14, Tafel XXIV. zeigt, sind $\overline{CB}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{CL}$ die Längen der Perpendikel, welche vom Drehungspunkt aus auf die vertikalen Richtungen der Kräfte $S + P$, $S_1 + P_1$, p gefällt werden können, und es ist:

$$\overline{CB} = a \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

oder:

$$\overline{CB} = a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

Die Gleichgewichtsgleichung ist demnach:

$$(S_1 + P_1) [a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)] = (S + P) [a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)] + p c \sin(\psi - \gamma)$$

oder

$$(S_1 + P_1) [a_1 \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a_1 \cos(\psi - \gamma) \sin\beta - b \sin(\psi - \gamma)] = (S + P) [a \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a \cos(\psi - \gamma) \sin\beta + b \sin(\psi - \gamma)] + p c \sin(\psi - \gamma)$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\cos(\psi - \gamma)$ und sucht hierauf $\operatorname{tang}(\psi - \gamma)$, so findet man:

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \frac{(P_1 a_1 - P a) + (S_1 a_1 - S a)}{(S + S_1 + P + P_1) b + p c - \cos\beta (P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a)} \sin\beta \quad (1)$$

oder

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \sin\beta \frac{1}{\frac{(S + S_1 + P + P_1) b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta} \quad . \quad (2)$$

oder

$$\operatorname{cotg}(\psi - \gamma) = \frac{1}{\sin\beta} \left[\frac{(S + S_1 + P + P_1) b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta \right] \quad (3)$$

Der Winkel γ ist bei jeder Wage äusserst klein, denn er ist ja nur ein kleiner Fehler der Construktion oder Ausführung, und ψ ist der sehr kleine Ausschlagwinkel, wenn P_1 sehr wenig von P verschieden ist. Wir dürfen daher setzen:

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \psi - \gamma, \quad \operatorname{cotg}(\psi - \gamma) = \frac{1}{\psi - \gamma}$$

und erhalten demnach

$$\frac{1}{\psi - \gamma} = \frac{1}{\sin\beta} \left[\frac{(S + S_1 + P + P_1) b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta \right] \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Wagen werden immer so adjustirt, dass die Zunge einspielt, wenn die Schalen unbelastet sind.

Für eine in solcher Weise adjustirte Wage ist demnach für $P = P_1 = 0$, $\psi = 0$, daher:

$$\frac{1}{-\gamma} = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{(S + S_1)\,b + p\,c}{S_1\,a_1 - S\,a} - \cos\beta\right] \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

Durch Elimination von γ aus (4) und (5) folgt:

$$\psi = \sin\beta\left[\frac{P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)} - \frac{S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1) + p\,c - \cos\beta\,(S_1\,a_1 - S\,a)}\right]$$

oder wenn man die Brüche auf gleiche Nenner bringt:

$$\psi = \sin\beta\,\frac{(P_1\,a_1 - P\,a)\,[b\,(S + S_1) + p\,c] - (S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1)}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(P + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)] \\ \times\,[b\,(S + S_1) + p\,c - \cos\beta\,(S_1\,a_1 - S\,a)]\end{array}\right\}} \quad (6)$$

oder auch:

$$\psi = \sin\beta\,\frac{(P_1 - P)\,a + P_1\,(a_1 - a) - \dfrac{(S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1)}{b\,(S + S_1) + p\,c}}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)] \\ \times\left[1 - \cos\beta\,\dfrac{S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1) + p\,c}\right]\end{array}\right\}} \quad (7)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes lernen wir nun die Bedingungen der Empfindlichkeit einer gleicharmigen Wage kennen. Wir haben hierbei unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise nur auf das Glied $(P_1 - P)\,a$ des Zählers und auf die Glieder $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c$ des Nenners zu richten, denn die übrigen Glieder haben bei jeder wirklichen Wage verschwindend kleine Werthe. Es sind nämlich bei jeder nur einigermassen genauen Wage 1) die Arme a und a_1 beinahe gleich gross, 2) die Gewichte der Wagschalen gleich gross, 3) ist ferner der Winkel β beinahe $= 90^\circ$, also $\cos\beta$ beinahe $= 0$. Wenn wir nur allein die Glieder $(P_1 - P)\,a$ und $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c$ berücksichtigen, so ergeben sich aus (7) nachstehende Folgerungen: ψ fällt gross aus, d. h. die Wage wird empfindlich,

1) wenn a gross ist, d. h. wenn die Arme lang sind,
2) wenn b und c klein sind, d. h. wenn die Entfernung des Drehpunktes c von der Armlinie $A\,A_1$ klein ist und wenn ferner der

Schwerpunkt des Wagebalkens nur wenig unter seinem Drehungspunkt liegt,

3) wenn die Schalengewichte S und S_1 klein sind, also leichte Schalen genommen werden,

4) wenn das zu bestimmende Gewicht nicht zu gross ist,

5) wenn p klein ist, d. h. wenn der Wagebalken ein geringes Gewicht hat.

Durch die Gewichte $P + S$, $P_1 + S_1$ kann der Wagebalken, wenn er zu leicht gebaut wird, leicht etwas deformirt werden, was zur Folge hat, dass sich die Armlängen a und a_1 ändern und dass b wie c grösser wird, wodurch die Verlässlichkeit und Empfindlichkeit der Wage leidet. Es soll daher der Wagebalken nicht nur leicht, sondern gleichzeitig auch sehr fest gebaut werden.

Die empfindlichen Wagen der chemischen und physikalischen Laboratorien entsprechen den so eben aufgefundenen Bedingungen sehr wohl.

Vermittelst der Gleichung (6) können wir einen praktisch sehr wichtigen Satz nachweisen, dass mit einer Wage, welche den Bedingungen der Empfindlichkeit entspricht, eine genaue Gewichtsbestimmung auch dann möglich ist, wenn a nicht gleich a_1, S nicht gleich S_1, γ nicht Null und β nicht 90^0 ist. Diese richtige Bestimmung geschieht durch zweimaliges Abwiegen auf folgende Weise.

Man bringt den Körper, dessen Gewicht P bestimmt werden soll, auf die Schale A und legt auf die andere Schale A_1 Gewichte P_1 auf, bis die Wage einspielt, d. h. bis $\psi = 0$ ist. Hierauf legt man den Körper auf A_1 und auf die Schale A so viele Gewichte P_2, bis die Wage wiederum einspielt.

Die Bedingungen dieser zwei Gleichgewichtszustände erhalten wir aus (6), wenn wir den Zähler gleich Null setzen, hierauf P_1 mit P und P mit P_2 vertauschen und dann den Zähler nochmals $= 0$ setzen. Diese Bedingungen sind demnach:

$$(P_1\, a_1 - P\, a)\,[b\,(S + S_1) + p\, c] - (S_1\, a_1 - S\, a)\, b\,(P + P_1) = 0$$

$$(P\, a_1 - P_2\, a)\,[b\,(S + S_1) + p\, c] - (S_1\, a_1 - S\, a)\, b\,(P_2 + P) = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P_1\, a_1 - P\, a}{P\, a_1 - P_2\, a} = \frac{P + P_1}{P + P_2}$$

und dieser Ausdruck gibt:

$$P = \sqrt{P_1\, P_2}$$

Das wahre Gewicht ist also die Quadratwurzel aus dem Prodrukt der Gewichte, die durch das zweimalige Abwägen gefunden wurden und es ist in der That interessant, dass diese Regel auch dann zur Wahrheit führt, wenn die Wage gar nicht adjustirt ist, d. h. wenn $a \gtrless a_1$, $s \gtrless s_1$, $\gamma \lessgtr 0$, $\beta \gtrless \frac{\pi}{2}$.

Die nach den aufgefundenen Regeln angeordneten und sorgfältig ausgeführten gleicharmigen Wagen geben die genauesten Gewichtsbestimmungen. Auch sind diese Wagen bequem zu gebrauchen, wenn überhaupt nur leichte oder doch nicht schwere Körper abgewogen werden sollen. Zum Abwägen von schweren Körpern sind sie jedoch nicht bequem, theils wegen der vielen zum Abwägen erforderlichen Gewichte, theils auch, weil es umständlich und unbequem ist, die Gegenstände auf die an Ketten hängenden Wagschalen zu bringen. Für kaufmännische Zwecke wird deshalb die sogenannte Dezimalwage gebraucht.

Erste Dezimalwage.

Fig. 15, Tafel XXIV., stellt eine solche Dezimalwage vor, mit Hinweglassung der construktiven Details. Das Gestell der Wage besteht aus einem dreieckigen Rahmen, der bei M breit, bei L schmal ist und einem vertikalen Brette N L, welches oben das Lager für den Wagbalken trägt. F H ist ein dreieckiger Hebel, der bei H mit Schneiden versehen ist und damit auf Metallplatten aufliegt, bei F aber vermittelst einer Stange F D an den Wagbalken A D gehängt ist. E J ist ein zweites Hebelwerk, das bei G mit Schneiden auf dem ersten Hebelwerk F H aufliegt, es ist mit Bedielung J K versehen, auf welche die abzuwägenden Gegenstände gestellt werden, und vermittelst einer Stange E C an den Wagebalken A D gehängt. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustand einspielt, d. h. dass die Hebel A D, E J, F H horizontal schweben. Das Abwägen geschieht, indem man den Körper auf die Bedielung bringt und in die Schale Gewichte legt, bis die Wage wiederum einspielt.

Nennen wir Q das Gewicht des Körpers, P das Gewicht, das auf die Wagschale gelegt werden muss, um dem Gewicht des Körpers das Gleichgewicht zu halten, und setzen $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{GH} = a_1$, $\overline{HF} = b_1$, $\overline{AB} = c$, Q_1 die aus dem Gewicht Q entstehende Pressung der Schneide bei G, Q_2 den Zug bei E, so ist, welche Lage auch der Körper haben mag:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Für das Gleichgewicht zwischen Q und P ist aber auch

$$P c = Q_1 \frac{a_1}{b_1} b + Q_2 a$$

oder wegen (1)

$$P c = Q_1 \frac{a_1}{b_1} b + (Q - Q_1) a$$

oder auch

$$P c = Q_1 \left(\frac{a_1}{b_1} b - a\right) + Q a$$

Damit nun stets das gleiche Gewicht gefunden wird, wo man auch den Körper hinlegen mag, muss offenbar $\frac{a_1}{b_1} b - a = 0$ oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ sein, und dann wird:

$$P = Q \frac{a}{c}$$

Richtet man also die Hebelarme so ein, dass $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ und dass $\frac{a}{c} = \frac{1}{10}$ ist, so wird $P = \frac{Q}{10}$, d. h. das Gewicht des Körpers ist dann zehnmal so gross, als das auf die Wagschale gelegte Gewicht.

Die Bedingung $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ drückt nichts anderes aus, als dass die Ebene der Bedielung stets eine horizontale bleiben soll, wenn die Wagschale auf und nieder schwankt, d. h. der Mechanismus ist ein Parallelmechanismus.

Zweite Dezimalwage.

Auf dieser Grundeigenschaft beruht auch folgende Dezimalwage. Fig. 16, Tafel XXIV. ABC, $A_1 B_1 C_1$ sind zwei steife Winkelhebel, der erstere ist durch zwei Stängelchen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ mit dem letzteren zusammen gegliedert, so dass AB gegen DE parallel bleiben muss. FGH ist ein Wagebalken, der bei G seinen Drehungspunkt hat, bei H mit einer Wageschale verbunden ist und an welchen bei F der Winkelhebel ABC gehängt wird. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustande einspielt. Der abzuwägende Körper wird auf BC gelegt und das Abwägen geschieht, indem man ein Gewicht P auf die Wagschale legt, bis die Wage einspielt.

Setzt man $GH = c$, $GF = a$ und macht $\frac{c}{a} = 10$, so ist für das Gleichgewicht

$$P c = Q a, \quad \frac{P}{Q} = \frac{a}{c} = \frac{1}{10}$$

Brückenwagen für schwere Lasten.

Diese Wagen dienen vorzugsweise zur Gewichtsbestimmung von beladenen Lastwagen, und ist das Gewicht in der Schale in der Regel $= \frac{1}{100}$ von dem Gewicht der Last.

Die Zeigerwage und die Garnwage.

Die Zeigerwage ist in der Weise eingerichtet, dass sie durch die Stellung eines Zeigers das Gewicht eines Körpers angibt. Sie wird theils zur Abwägung der Briefgewichte, insbesondere aber in den Baumwollspinnereien zum Sortiren der Garne gebraucht. Wir wollen uns mit der Theorie dieser Garnwage beschäftigen. Aus dem gesponnenen Garne werden sogenannte Strehne gebildet, von denen jeder nach der französischen Garnnummerirung eine Fadenlänge von 1000 Meter enthält. Die Feinheit des Garns wird gemessen, indem man die Anzahl der Strehne angibt die zusammen $\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegen. Nennt man also allgemein n die Feinheits-Nummer eines Garnes, q das Gewicht eines Strehnes in Kilogrammen von 1000 Meter Fadenlänge, so ist

$$q = \frac{1}{2\,n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und es ist auch n die Anzahl der Strehne, die zusammen $\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegen.

Diese Garnwage besteht aus einem um eine horizontale Axe möglichst beweglichen Winkelhebel, dessen Schwerpunkt nicht in der Drehungsaxe liegt. Einer der Arme ist mit einem Zeiger versehen, der auf eine eingetheilte Bogenskala zeigt, das Ende des Armes ist mit einem leichten Häkchen versehen, an welches der Strehn gehängt wird, dessen Nummer bestimmt werden soll. Wird ein Strehn angehängt, so nimmt der Winkelhebel eine Stellung an, bei welcher das Gewicht des Strehnes mit dem Gewichte des Winkelhebels im Gleichgewicht ist, der Zeiger weist dann auf eine bestimmte Stelle der Bogentheilung, und wenn diese in angemessener Weise angeordnet ist, so wird durch die Stellung des Zeigers das Gewicht des Strehnes angegeben.

Es sei, Fig. 17, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Winkelhebels, B der Anhängepunkt des Strehnes, A der Schwerpunkt des Winkelhebels,

p das Gewicht des Winkelhebels in Kilogrammen,

$q = \frac{1}{2\,n}$ das Gewicht des Strehnes von Nummer n,

$\alpha = \widehat{A\,C\,B}$ der Winkel, den die Verbindungslinie des Drehungspunktes C mit dem Schwerpunkt A und mit dem Aufhängepunkt B zusammen bilden,

φ der Winkel, welchen der Zeigerarm $A\,C$ mit einer durch C gezogenen Horizontallinie bildet, wenn der Strehn mit dem Gewicht des Armes im Gleichgewicht ist,

$\left.\begin{array}{l} C\,A = a \\ C\,B = b \end{array}\right\}$ die Entfernungen der Punkte A und B von C,

so ist die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes:

$$p\;a\cos\varphi = q\;b\cos[\pi - (\alpha + \varphi)]$$

oder

$$p\;a\cos\varphi = -\,b\;q\cos(\alpha + \varphi) = b\;q\,(\sin\alpha\sin\varphi - \cos\alpha\cos\varphi)$$

hieraus folgt:

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{p\,a}{b\,q\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

oder wenn man q durch n ausdrückt:

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + 2\,\frac{p\,a}{b}\,\frac{n}{\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Diese Gleichung bestimmt die Gleichgewichtslage des Winkelhebels. Hängt man an die Wage statt des Strehnes von Nr. n einen leichteren Strehn von Nr. $n+1$, so tritt nun eine Gleichgewichtslage ein, in welcher der Zeiger $A\,C$ mit der horizontalen Richtung einen Winkel φ_1 bildet. Zur Bestimmung dieses Winkels erhält man aus (3), wenn man in derselben $n+1$ statt n, und φ_1 statt φ setzt, folgenden Ausdruck:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{2\,p\,a}{b\sin\alpha}\,(n+1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

Die Differenz der Gleichungen (4) und (3) gibt:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\,p\,a}{b\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Da für eine bestimmte Anordnung $\frac{2\,p\,a}{b\sin\alpha}$ eine constante Grösse ist, so folgt aus Gleichung (5), dass für jede Aenderung der Garnnummer um eine Einheit die Aenderung der trigonometrischen Tangente des Winkels φ constant ist.

Hieraus ergibt sich für die Construktion der Bogeneintheilung folgendes Verfahren. Fig. 18, Tafel XXIV.

Man verfertige eine solche Zeigerwage, indem man eine bereits existirende aus einer Spinnerei als Muster nimmt. Stelle die Wage auf, lege an den Bogen ein Lineal an, so dass seine Kante vertikal steht. Hänge einen schweren Strehn an, dessen Gewicht und Nummer bereits durch eine andere empfindliche Wage bestimmt worden ist (n_1 sei die Nr. dieses Strehnes), beobachte die Gleichgewichtsstellung $c\,A_1$ des Zeigers, verlängere die Richtung $c\,A_1$ bis an die Linealkante und bemerke sich den Punkt a_1. Hierauf hänge man statt des schweren Strehnes einen bedeutend leichteren von Nr. n_2 an, bemerke die Gleichgewichtsposition $c\,A_2$ des Zeigers, verlängere $c\,A_2$ bis an die Kante des Lineals und bemerke den Punkt a_2. Hierauf theile man den Abstand $a_2\,a_1$ in $n_2 - n_1$ gleiche Theile, ziehe aus den Theilungspunkten Radien nach c und bemerke die Stellen, wo diese Radien den Kreisbogen schneiden durch Striche, so hat man eine richtige Bogeneintheilung, d. h. eine solche Eintheilung, bei welcher die Aenderungen der trigonometrischen Tangenten des Winkels φ für jede Aenderung der Garnnummer um eine Einheit gleich gross sind, wie es die entwickelte Theorie verlangt.

Aber gleichwohl wird eine auf diese Weise angefertigte Garnwage sehr ungenaue Gewichtsbestimmungen geben, wenn nicht der Winkelhebel gewissen Bedingungen entspricht. Angenommen, n_1 sei die niedrigste, n_2 die höchste Garnnummer, die durch die Wage bestimmt werden soll, dann können die Winkel β_1 und β_2, welche diesen Nummern entsprechen, entweder sehr klein oder sehr gross ausfallen, je nachdem der Winkelhebel beschaffen ist, und beides ist für die Genauigkeit der Gewichtsbestimmungen nachtheilig. Fallen beide Winkel klein aus, so erhält überhaupt die ganze Bogentheilung eine geringe Ausdehnung, fallen daher sämmtliche Intervalle der Eintheilung sehr klein aus, wird daher der geringste Grad von Schwerbeweglichkeit des Wagebalkens zur Folge haben, dass man sich um mehrere Nummern irrt. Fallen dagegen beide Winkel (β_1 und β_2) sehr gross aus, so würden zwar die Intervalle auf der Tangententheilung alle sehr gross ausfallen, würden aber gleichwohl die äussersten Intervalle der Bogentheilung sehr klein, so dass mit einer solchen Wage wohl die mittleren Garnnummern genau, die niedrigsten und höheren dagegen nur ungenau bestimmt werden können. Es ist hieraus zu ersehen, dass eine solche Garnwage dann die grösste Genauigkeit geben wird, wenn der Winkelhebel so angeordnet wird, dass das erste und das letzte Intervall der Bogeneintheilung möglichst gross ausfällt. Unter welchen Umständen dies der Fall ist, wollen wir nun ausfindig zu machen suchen.

Nennt man:

e das constante Intervall der Tangenteneintheilung,

μ diejenige Garnnummer, welche der Horizontalstellung des Zeigers entspricht,

n_2 die höchste, n_1 die niedrigste von den Garnnummern, die durch die Wage zu bestimmen sind,

β_2, β_1 die Winkel des Zeigers gegen den Horizont, welche den Nummern n_2 und n_1 entsprechen,

$\beta_2 - \Delta\beta_2$, $\beta_1 - \Delta\beta_1$ die Winkel des Zeigers gegen den Horizont, welche den Nummern $n_2 - 1$, $n_1 + 1$ entsprechen,

so ist zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\beta_2 &= e\,(n_2 - \mu) \\ \operatorname{tang}(\beta_2 - \Delta\beta_2) &= e\,(n_2 - \mu - 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta_2 - \Delta\beta_2)}{\operatorname{tang}\beta_2} = \frac{n_2 - \mu - 1}{n_2 - \mu} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{n_2 - \mu - 1}{n_2 - \mu} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta_2 - \Delta\beta_2)}{\operatorname{tang}\beta_2} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Nun entspricht $\Delta\beta_2$ dem untersten Intervall der Bogeneintheilung, welches Intervall nach der oben gegebenen Erklärung möglichst gross ausfallen soll; wir müssen demnach β_2 selbst so zu bestimmen suchen, dass $\Delta\beta_2$ ein Maximum wird. Diesen vortheilhaftesten Werth von β_2 finden wir, wenn wir die Gleichung (9) in Bezug auf β_2 und $\Delta\beta_2$ differenziren, jedoch $d(\Delta\beta_2) = 0$ setzen, dann findet man:

$$\frac{d\beta_2}{\cos^2(\beta_2 - \Delta\beta_2)} = \lambda\,\frac{d\beta_2}{\cos^2\beta_2}$$

oder

$$\cos^2\beta_2 = \lambda\cos^2(\beta_2 - \Delta\beta_2)$$

oder

$$1 + \text{tang}^2 (\beta_2 - \varDelta \beta_2) = \lambda (1 + \text{tang}^2 \beta_2)$$

oder endlich, wenn man vermittelst (9) $\text{tang} (\beta_2 - \varDelta \beta_2)$ durch $\text{tang} \beta_2$ ausdrückt:

$$1 + \lambda^2 \text{tang}^2 \beta_2 = \lambda + \lambda \text{tang}^2 \beta_2$$

Hieraus folgt:

$$\text{tang} \beta_2 = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda(1-\lambda)}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\frac{n_2 - \mu}{n_2 - \mu - 1}} \quad . \quad (10)$$

Nun ist in allen Fällen der Anwendung $n_2 - \mu$ gegen die Einheit sehr gross, daher $\frac{n_2 - \mu}{n_2 - \mu - 1}$ sehr nahe gleich der Einheit, demnach $\text{tang} \beta_2$ ebenfalls nahe gleich Eins, also β_2 nahe gleich 45°.

Ganz auf die gleiche Weise wie dieser vortheilhafteste Werth von β_2 gefunden wurde, kann man auch den vortheilhaftesten Werth von β_1 bestimmen, und findet für denselben selbstverständlich ebenfalls 45°.

Aus dieser Untersuchung geht also hervor, dass der Winkelhebel in solcher Weise angeordnet werden soll, dass der Zeiger, wenn ein Strehn von der niedrigsten Nummer angehängt wird um 45° aufwärts, und wenn ein Strehn von der höchsten Nummer angehängt wird, um 45° abwärts von der horizontalen Lage abweicht.

Wir werden sogleich erfahren, was zu thun ist, um dem Winkelhebel diese Eigenschaft zu ertheilen.

Für die vortheilhafteste Einrichtung ist

$$\text{für } n = n_1, \quad \varphi = -45^0$$

$$\text{,, } n = n_2, \quad \varphi = +45^0$$

Die Gleichung (3) gibt demnach für die vortheilhafteste Einrichtung folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= \text{cotg} \alpha + 2 \frac{p a}{b \sin \alpha} n_1 \\ +1 &= \text{cotg} \alpha + 2 \frac{p a}{b \sin \alpha} n_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wodurch zwei Grössen bestimmt werden.

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst durch Elimination von $\frac{2 p a}{b \sin \alpha}$:

$$\frac{1 - \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg} \alpha} = - \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang} \alpha} = + \frac{n_1}{n_2}$$

oder auch

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = + \frac{n_1}{n_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Die Differenz der Gleichungen (11) gibt ferner:

$$\frac{p\,a}{b} = \frac{\sin \alpha}{n_2 - n_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Gleichung (12) bestimmt den vortheilhaftesten Werth des Winkels $\alpha = \widehat{A\,C\,B}$, Fig. 17, Tafel XXIV., und die Gleichung (13) bestimmt ferner, wenn einmal α bekannt ist, den besten Werth des Quotienten $\frac{p\,a}{b}$.

Da $\frac{n_1}{n_2}$ positiv und kleiner als Eins ist, ferner $n_2 - n_1$ positiv ist, so liegt α nothwendig im dritten Quadranten, denn nur wenn dies der Fall ist, kann $\sin \alpha$ positiv ausfallen, wie die Gleichung (13) fordert, und demnach $\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ kleiner als Eins werden, wie es Gleichung (12) vorschreibt.

Wir wollen von dieser Theorie eine Anwendung machen, um deutlich zeigen zu können, wie man sich zu benehmen hat, um den Anforderungen der Rechnung zu entsprechen.

Es sei eine Garnwage herzustellen, vermittelst welcher Garne von Nummer $n_1 = 20$ bis zu Nummer $n_2 = 60$ gut sortirt werden können.

Dann erhalten wir vermöge (12):

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0{\cdot}333 = \operatorname{tang} (\pi + 18^\circ + 26')$$

demnach

$$45^\circ + \alpha = 180^\circ + 18^\circ + 26'$$

$$\alpha = 153^\circ + 26'$$

$$\sin \alpha = 0{\cdot}4472$$

Und nun folgt aus Gleichung (13):

$$p\,\frac{a}{b} = \frac{0{\cdot}4472}{40} = \frac{1}{89{\cdot}4}$$

Fig. 1, Tafel XXV. zeigt in einfachen Linien die Einrichtung der Garnwage. Tafel LXXIV. der „Bewegungsmechanismen" zeigt die construktive Durchführung.

Zeitmessung durch Uhren.

Die Zeit kann durch gleichförmige und durch gleichförmig periodische Bewegungen gemessen werden. Ist eine stetig gleichförmige Bewegung vorhanden, so werden bei derselben in gleichen Zeiten gleich lange Wege zurückgelegt. Nimmt man als Zeiteinheit diejenige Zeit an, in der eine ganz bestimmte Weglänge s zurückgelegt wird, so findet man irgend eine andere Zeit T, in welcher ein Weg S zurückgelegt wird, indem man diesen Weg S durch den einer Zeiteinheit entsprechenden Weg s dividirt.

Bei einer solchen stetig gleichförmigen Bewegung kann möglicher Weise jede beliebige Zeit gleich genau bestimmt werden.

Durch periodische, z. B. durch schwingende Bewegungen, können mit Genauigkeit nur solche Zeiten gemessen werden, die ganze vielfache von der Zeit einer Schwingung sind. Zeittheilchen, die kleiner als eine Schwingungszeit sind, müssen in diesem Falle durch Schätzung bestimmt werden.

Uhren sind Messapparate, welche entweder eine stetig gleichförmige oder eine periodisch gleichförmige Bewegung darbieten. Eine natürliche Uhr der ersteren Art ist die Erde durch ihre gleichförmige Axendrehung. Eine künstliche Uhr mit stetig gleichförmiger Bewegung erhält man durch das sogenannte Centrifugal-Pendel.

Bei den meisten Uhren werden jedoch periodische Schwingungen zur Zeitmessung benutzt und zwar entweder Pendelschwingungen oder Schwungradschwingungen. Wir werden uns nun mit der Theorie dieser beiden Schwingungen beschäftigen.

Pendelschwingungen.

Eine genaue Theorie der Pendelschwingungen erfordert, dass alles berücksichtigt werde, was auf die Bewegung Einfluss haben kann. Es ist daher zu berücksichtigen:

1) Das Gewicht des Pendels und aller Theile, die mit demselben schwingen. 2) Die Widerstände, welche der Aufhängungsmechanismus verursachen kann. 3) Der Gewichtsverlust des Pendels in der Luft, welcher gleich ist dem Gewicht eines Luftvolumens, das so gross ist, als das Volumen des Pendels. 4) Der Luftwiderstand. 5) Die Temperatur der Luft, in welcher das Pendel schwingt. Von diesen Einflüssen kann jedoch nur der erste, von dem Gewichte herrührende mit voller Genauigkeit in Rechnung gebracht werden, alle

übrigen können nur annähernd durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen beachtet werden. Berücksichtigen wir zunächst nur allein das Gewicht, die Form und die Masse des Pendels, und vernachlässigen die unter 2 bis 5 angeführten Nebenumstände, dann erhalten wir folgende

Annäherungstheorie der Pendelschwingungen.

Es sei, Fig. 2, Tafel XXV., A der Drehungspunkt des Pendels. $A\,x$ eine durch A gehende Vertikallinie, in welcher der Schwerpunkt des Pendelkörpers liegen wird, wenn dasselbe ruht. Dreht man das Pendel aus seiner Ruhelage bis der Schwerpunkt nach B fällt, und überlässt es dann der Einwirkung der Schwere, so schwingt es gegen die Ruheposition hin und es gelangt der Schwerpunkt nach einiger Zeit nach C. Es sei $\widehat{x\,A\,B} = \alpha$, $\widehat{C\,A\,B} = \varphi$, $\overline{A\,B} = \overline{A\,C} = l$ die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehungspunkt, t die Zeit, welche verflossen ist, während das Pendel um den Winkel φ gedreht wurde. G das Gewicht des Pendelkörpers in Kilogrammen. M die auf den Schwerpunkt reduzirte Masse des Pendels, d. h. M ist eine ideale Masse, welche statt der wirklichen Masse des Pendels, in den Schwerpunkt concentrirt, ein eben so grosses Trägheitsmoment gibt als das wirkliche Pendel. Die drehende Bewegung des Pendels erfolgt genau so, wie wenn im Schwerpunkt eine Masse M concentrirt wäre, auf welche nach vertikaler Richtung eine Kraft gleich dem Gewicht G einwirkt.

Nun ist $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ die Winkelgeschwindigkeit, $l\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ die absolute Geschwindigkeit des Punktes C, $d\left(l\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right) = l\,\frac{d^2\,\varphi}{d\,t}$ die Aenderung dieser Geschwindigkeit im Zeitelemente $d\,t$, daher $\frac{l\,\frac{d^2\,\varphi}{d\,t}}{d\,t} = l\,\frac{d^2\,\varphi}{d\,t^2}$ die Beschleunigung von C, demnach [vermöge Gleichung (3), Prinzipien der Mechanik, Seite 53]:

$$l\,\frac{d^2\,\varphi}{d\,t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{G}{M}\,\sin\,(\alpha - \varphi)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Diese Gleichung lässt sich zwar einmal integriren, wodurch man $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ als Funktion von t erhält, allein die zweite Integration, wodurch φ als Funktion von t erhalten wird, führt auf ein elliptisches Integrale. Für Anwendungen der Pendeltheorie auf Uhren darf man sich erlauben α und folglich auch $\alpha - \varphi$ als einen so kleinen Winkel anzusehen, dass $\sin(\alpha - \varphi)$ gleich $(\alpha - \varphi)$ gesetzt werden darf. Dann aber folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = k\,(\alpha - \varphi) \text{ wobei } k = \frac{G}{2\,l\,M} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Versuchen wir dieser Gleichung zu genügen durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A} + \mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, λ constante Grössen sind.

Aus (3) folgt

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -\lambda^2 (\mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t)$$

Führt man diese Werthe von φ und $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ in (2) ein, so folgt:

$$-\lambda^2 (\mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t) = k\,\alpha - k\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t)$$

Dieser Gleichung wird identisch entsprochen, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = \alpha \\ \lambda = \sqrt{k} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Das Integrale von (2) ist demnach:

$$\varphi = \alpha + \mathfrak{M} \sin \sqrt{k}\; t + \mathfrak{N} \cos \sqrt{k}\; t \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Nun ist für $t = 0$, $\varphi = 0$, $\frac{d \varphi}{d t} = 0$, daher:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha + \mathfrak{N} \\ \left(\frac{d\varphi}{d t}\right)_{t=0} = 0 = \sqrt{k}\; \mathfrak{M} \end{array}\right\} \text{ demnach } \begin{array}{l} \mathfrak{N} = -\alpha \\ \mathfrak{M} = 0 \end{array}$$

folglich erhalten wir:

$$\varphi = \alpha\,(1 - \cos \sqrt{k}\; t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Für $t = 0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{k}},\ \frac{4\pi}{\sqrt{k}},\ \ldots\ldots$ wird $\varphi = 0$, kehrt also das Pendel in seine anfängliche Position zurück.

Für $t = \frac{\pi}{\sqrt{k}},\ \frac{3\pi}{\sqrt{k}},\ \frac{5\pi}{\sqrt{k}},\ \ldots\ldots$ wird $\varphi = 2\alpha$, erreicht also φ seinen grössten Werth, wobei das Pendel um eben so viel von seiner mittleren Position nach links abweicht, als in der anfänglichen Position nach rechts. Das Pendel schwingt in seiner mittleren Position hin und her und entfernt sich dabei um einen Winkel α von seiner mittleren Stellung. Nennt man T die Zeit eines Schwunges d. h. die Zeit, in welcher das Pendel den Winkel $\varphi = 2\alpha$ zurücklegt, so ist:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k}} = \pi \sqrt{\frac{2 l M}{G}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Diese Zeit ist von dem Ablenkungswinkel oder Schwingungswinkel α unabhängig; wir dürfen also den Satz aussprechen, dass die Schwingungszeit eines Pendels von dem Schwingungswinkel nicht abhängt, in so fern derselbe so klein ist, dass er als unendlich kleine Grösse angesehen werden kann, oder auch: so lange der Schwingungswinkel eine kleine Grösse ist, ist die Schwingungszeit von demselben unabhängig. Die Masse M kann auf folgende Weise ausgedrückt werden. Nennt man $\frac{G}{2g} h^2$ das Trägheitsmoment des Pendelkörpers in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht und deren Richtung jener der wirklichen Drehungsaxe parallel ist, so hat man (vermöge Prinzipien, Seite 118, Nr. 66):

$$M l^2 = \frac{G}{2g} h^2 + \frac{G}{2g} l^2$$

oder

$$M = \frac{G}{2g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Führt man diesen Werth in (7) ein, so findet man

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Genauere Berechnung der Pendelschwingungen mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse etc.

Suchen wir nun das Gesetz der Pendelschwingungen zu erforschen, indem wir 1) nicht nur das Gewicht des Pendels, sondern auch 2) seinen Gewichtsverlust in der Luft, 3) den Luftwiderstand, 4) den Widerstand der Aufhängung berücksichtigen.

Es sei:

$a\,G$ der constante Gewichtsverlust, welcher gleich ist dem Gewicht einer Luftmenge, deren Volumen gleich ist dem Volumen des Pendels,

$b \frac{d\varphi}{dt}$ der Betrag des Luftwiderstandes, welchen wir der Winkelgeschwindigkeit proportional annehmen dürfen, weil die Geschwindigkeit der Bewegung in allen Fällen der Anwendung klein ist,

c der constante Widerstand der Aufhängung,

dann haben wir folgende Gleichung:

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{G \sin(\alpha - \varphi) - a\,G - b \frac{d\varphi}{dt} - c}{M} \quad . \; . \; . \; (1)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{G}{2\,l\,M} \sin(\alpha - \varphi) - \frac{a\,G + c}{l\,M} - \frac{b}{2\,l\,M} \frac{d\varphi}{dt} \; . \; . \; . \; (2)$$

oder wenn wir auch hier wiederum annehmen, dass α so klein ist, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn $\sin(\alpha - \varphi) = \alpha - \varphi$ gesetzt wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n \frac{d\varphi}{dt} + m\,\varphi = m\,\alpha - p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{G}{2\,l\,M} \\ \frac{a\,G + c}{M\,l} &= p \\ n &= \frac{b}{2\,M\,l} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Versuchen wir der Gleichung (3) durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A}\,e^{kt} + \mathfrak{B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

zu genügen, wobei $\mathfrak{A}$, k, $\mathfrak{B}$ constante Grössen sind. Aus (5) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \mathfrak{A}\,k^2\,e^{kt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mathfrak{A}\,k\,e^{kt} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Die Werthe (5) und (6) in (3) eingeführt, findet man:

$$(\mathfrak{A}\,k^2 + n\,\mathfrak{A}\,k + m\,\mathfrak{A})\,e^{kt} + m\,\mathfrak{B} = m\,\alpha - p$$

Dieser Gleichung wird für jeden Werth von t entsprochen, wenn man nimmt:

$$k^2 + n\,k + m = 0$$

$$\mathfrak{B} = \alpha - \frac{p}{m}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} k = -\dfrac{n}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,\sqrt{-1} \\[2ex] \mathfrak{B} = \alpha - \dfrac{p}{m} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{n}{2} = \dfrac{b}{4\,M\,l} \\[2ex] \varepsilon = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\,G}{M\,l} - \left(\dfrac{b}{2\,M\,l}\right)^2} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

so wird:

$$k = -\lambda \pm \varepsilon\sqrt{-1}$$

$$\mathfrak{B} = \alpha - \frac{p}{m}$$

Da wir für k zwei Werthe gefunden haben, so liefert jeder derselben ein partikulares Integrale, und das allgemeine Integrale ist die Summe der beiden partikularen, wir erhalten demnach vermöge (5):

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{A}_1\, e^{\left(-\lambda + \varepsilon\sqrt{-1}\right)t} + \mathfrak{A}_2\, e^{\left(-\lambda - \varepsilon\sqrt{-1}\right)t}$$

oder

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + e^{-\lambda t}\left(\mathfrak{A}_1\, e^{\varepsilon\sqrt{-1}\,t} + \mathfrak{A}_2\, e^{-\varepsilon\sqrt{-1}\,t}\right)$$

oder endlich

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + e^{-\lambda t}\left(\mathfrak{M}\cos\varepsilon\,t + \mathfrak{N}\sin\varepsilon\,t\right) \quad \ldots \quad (9)$$

wobei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei neue Constanten bezeichnen, deren Werthe durch den Initial-Zustand bestimmt werden müssen.

Nun ist

$$\text{für } t = 0,\ \varphi = 0,\ \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

demnach wegen (9):

$$0 = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{M} \text{ oder } \mathfrak{M} = -\left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \quad \ldots \quad (10)$$

Ferner folgt aus (9)

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\lambda t} \varepsilon (-\mathfrak{M} \sin \varepsilon t + \mathfrak{N} \cos \varepsilon t) - \lambda e^{-\lambda t} (\mathfrak{M} \cos \varepsilon t + \mathfrak{N} \sin \varepsilon t)$$

folglich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = 0 = \varepsilon \mathfrak{N} - \lambda \mathfrak{M} \text{ oder } \mathfrak{N} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{M} \quad . \; . \; . \; (11)$$

Durch (10) und (11) sind nun die Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bestimmt, die Gleichung (9) gibt demnach

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} - e^{-\lambda t} \left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \left(\cos \varepsilon t + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin \varepsilon t\right)$$

oder

$$\varphi = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin \varepsilon t\right)\right] \quad . \; . \; (12)$$

Hiermit ist φ als Funktion von t berechnet. Aus (12) folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \left(\frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda t} \sin \varepsilon t$$

Nach jedem Schwung ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, daher ist die Zeit T einer Schwingung

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2G}{Ml} - \left(\frac{b}{2Ml}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

und diese ist nun abermals constant, obgleich wir auf die verschiedenen Nebenkräfte Rücksicht genommen haben. Luftwiderstand, Gewichtsverlust, Aufhängungswiderstand vermögen also die Dauer einer Schwingung nicht variabel zu machen. Dagegen werden die Ausschlagwinkel der aufeinanderfolgenden Schwingungen immer kleiner und kleiner.

Nennen wir $\varphi_1 \; \varphi_2 \; \varphi_3 \; \ldots .$ die Werthe von φ, welche der Position des Pendels am Ende der ersten, zweiten, dritten Schwingung entsprechen, so ergeben sich diese Werthe, wenn wir in (12) der Reihe nach t gleich $\frac{\pi}{\varepsilon}$, $2\frac{\pi}{\varepsilon}$, $3\frac{\pi}{\varepsilon}$ $\ldots .$ setzen; daher ist

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
\varphi_2 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 - e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
\varphi_3 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-3\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Nun sind aber

$$\varphi_1, \; \varphi_1 - \varphi_2, \; \varphi_3 - \varphi_2, \; \varphi_3 - \varphi_4, \; \varphi_5 - \varphi_4 \; \ldots\ldots$$

die numerischen Werthe der Winkel, welche der ersten, zweiten, dritten .... Schwingung entsprechen. Wegen (14) erhalten wir also

$$\left.\begin{aligned}
&\text{erster Schwung:} \\
&\varphi_1 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\text{zweiter Schwung:} \\
&\varphi_1 - \varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\text{dritter Schwung:} \\
&\varphi_3 - \varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-3\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\text{iter Schwung:} \\
&\varphi_i - \varphi_{i-1} = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-(i-1)\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

woraus man sieht, dass die Schwingungen immer kleiner und kleiner werden und zuletzt ganz aufhören.

Die Bewegung erlahmt in kurzer Zeit, wenn $\frac{p}{m}$ und $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ grosse Werthe haben, d. h. wenn gross ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{m} &= 2a + \frac{2c}{G} \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} &= \frac{\frac{b}{4Ml}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2G}{Ml} - \left(\frac{b}{2lM}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8GMl}{b^2} - 1}}\end{aligned}\right\} \cdot \quad (16)$$

d. h. wenn a, c, b beträchtliche Werthe haben, wenn also die Nebenhindernisse, Reibung, Luftwiderstand, Gewichtsverlust gross sind.

Wir können nun vermöge (13), (15), (16) folgende Sätze aussprechen:

1) Die Schwingungszeit eines Pendels bleibt constant trotz Reibung, Gewichtsverlust und Luftwiderstand.
2) Die Schwingungszeit wird durch den Gewichtsverlust und die Reibung der Aufhängung nicht verändert, sie wird dagegen durch den Luftwiderstand vergrössert, d. h. die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit nimmt ab.
3) Der Schwungwinkel wird theils wegen Reibung und Gewichtsverlust, insbesondere aber wegen des Luftwiderstandes immer kleiner und kleiner und verschwindet zuletzt.

Diese Sätze sind wir aber nur berechtigt auszusprechen, wenn überhaupt der Ausschlagwinkel klein ist, und wenn der Luftwiderstand der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit proportional gesetzt werden darf.

Pendelschwingung mit Reibung und Luftwiderstand.

Wir wollen noch die Schwingungen eines Pendels unter der Voraussetzung berechnen, dass der Luftwiderstand dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

Für diesen Fall ist die Differenzialgleichung der Bewegung, Fig. 3, Tafel XXV.:

$$l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{G\sin(\alpha - \varphi) - c - c_1\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{M} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Dabei ist:

G das Gewicht des Pendelkörpers. l Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt. c eine Constante, welche dem Widerstand der Aufhängung entspricht. c_1 eine Constante für den Luftwiderstand. M die auf den Schwerpunkt des Pendels reducirte Masse desselben.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{G}{2\,l\,M} = m, \quad \frac{c}{2\,l\,M} = q, \quad \frac{c_1}{2\,l\,M} = n \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird die Gleichung (1):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = m \sin(\alpha - \varphi) - q - n\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m \sin(\alpha - \varphi) - q \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Setzen wir ferner:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{dy}{d\varphi}$$

demnach wird aus Gleichung (4):

$$\frac{dy}{d\varphi} + 2\,n\,y = m \sin(\alpha - \varphi) - q \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$y = \mathfrak{A}\, e^{-2n\varphi} + \frac{m}{4n^2+1}\left[2\,n \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi)\right] - \frac{q}{2\,n} \quad (7)$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Constante der Integration bedeutet. Für $\varphi = 0$ ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und $y = 0$, demnach:

$$0 = \mathfrak{A} + \frac{m}{4n^2+1}(2\,n \sin\alpha + \cos\alpha) - \frac{q}{2\,n} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Aus (7) und (8) $\mathfrak{A}$ eliminirt und für y seinen Werth aus (5) gesetzt, erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{q}{2\,n}\left(e^{-2n\varphi} - 1\right) + \frac{m}{4n^2+1}\left\{\begin{array}{l} 2\,n \sin(\alpha - \quad) + \cos(\alpha - \varphi) \\ - e^{-2n\varphi}(2\,n \sin\alpha + \cos\alpha) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Betrachtet man α und $\alpha - \varphi$ als kleine Winkel, deren dritte und höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so findet man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{q}{2n}(1 - 2n\varphi + 2n^2\varphi^2 - 1)$$

$$+\frac{m}{4n^2+1}\left\{\begin{array}{l} 2n(\alpha-\varphi) + 1 - \frac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2 \\ -(1-2n\varphi+2n^2\varphi^2)\left(2n\alpha+1-\frac{\alpha^2}{2}\right) \end{array}\right\}$$

oder

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (m\alpha - q)\varphi - \left(\frac{1}{2}m - nq\right)\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Hieraus folgt

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2(m\alpha-q)\varphi - (m-2nq)\varphi^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{m-2nq}}\left[\frac{\pi}{2} - \text{Arc}\sin\left(1 - \frac{m-2nq}{m\alpha-q}\varphi\right)\right] \quad . \quad . \quad (12)$$

oder

$$\varphi = \frac{m\alpha-q}{m-2nq}\left(1-\cos\sqrt{m-2nq}\,t\right). \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nennt man T die Zeit eines einfachen Pendelschwunges, so ist diese vermöge (13):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{m-2nq}} = \pi\sqrt{\frac{2lm}{G}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{cc_1}{lMG}}}$$

oder annähernd, weil $\frac{cc_1}{lMG}$ eine sehr kleine Grösse ist:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2lM}{G}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{cc_1}{lMG}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dieser Ausdruck ist von dem anfänglichen Ausschlagwinkel α unabhängig. Wenn also dieser Winkel α so klein ist, dass man die dritten und höheren Potenzen desselben vernachlässigen darf, so ist die Schwingungszeit unabhängig von dem Ausschlagwinkel. Die Schwingungszeit fällt jedoch wegen des Aufhängewiderstandes c und wegen des Luftwiderstandes c_1 kleiner aus, als sie in dem Falle wäre, wenn diese Widerstände nicht vorhanden wären.

Aber obgleich die Schwingungszeit von α nicht abhängt, so werden dennoch die Schwingungswinkel allmählig kleiner und kleiner, wie sogleich bewiesen werden soll.

Nennen wir α_1 den Winkel A_1CB, um welchen die Pendelstange links von der Vertikalen BC abweicht, nachdem der erste Schwung geschehen ist, so wird für $t = T = \frac{\pi}{\sqrt{m - 2 n q}}$, $\varphi = \alpha + \alpha_1$ daher vermöge (13):

$$\alpha + \alpha_1 = 2 \frac{m \alpha - q}{m - 2 n q}$$

Hieraus folgt:

$$\alpha_1 = \alpha \frac{m + 2 n q}{m - 2 n q} - \frac{2 q}{m - 2 n q}$$

oder weil $2 n q$ eine gegen m sehr kleine Grösse ist

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{4 n q}{m} \alpha - \frac{2 q}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

n, q, α sind sehr kleine Grössen, $\frac{4 n q}{m} \alpha$ ist deshalb bedeutend kleiner als $\frac{2 q}{m}$, α_1 ist daher kleiner als α. Das Pendel ist daher am Ende des ersten Schwunges nicht so weit von der Vertikalen entfernt als am Anfang dieses Schwunges.

Bezeichnet man nun mit α_2, α_3 .... die Winkel, welche das Pendel nach dem zweiten, dritten .... Schwung mit der Vertikalen bildet, so hat man wegen (15):

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{4 n q}{m} \alpha_1 - \frac{2 q}{m}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{4 n q}{m} \alpha_2 - \frac{2 q}{m}$$

Diese Winkel nehmen also fort und fort ab, bis zuletzt ein Stillstand eintritt.

Schwungrad-Schwingungen.

Bei Taschenuhren, Reiseuhren und überhaupt bei solchen Uhren, die eine feste Aufstellung nicht haben können, wird als schwingender Körper ein Schwungrad gebraucht. Um dasselbe schwingen zu machen, nimmt man eine schraubenförmig oder spiralförmig zusammengewundene Stahlfeder, befestigt das eine der beiden Enden mit der Axe des Schwungrades, das andere Ende hingegen mit irgend einem unbeweglichen Körper, bringt hierauf das Rad aus der Gleichgewichtslage, wobei die Feder entweder mehr auf- oder mehr zusammengewunden wird und überlässt sodann das Schwungrad der Einwirkung der Feder.

Wir haben in der Theorie der Spiralfedern, Seite 116, und in der Theorie der schraubenförmigen Federn, Seite 120, gezeigt, dass das statische Moment der Kraft, mit welcher eine solche Feder in ihre natürliche Form zurückzukehren strebt, wenn sie um einen gewissen Winkel aus dieser natürlichen Lage verwunden wurde, nur dann dem Verwindungswinkel proportional ist, wenn die Feder eine solche Einrichtung hat, dass ihr Schwerpunkt stets in der Drehungsaxe bleibt, während sie ihre Form ändert. Wir setzen in der folgenden Theorie voraus, dass die Feder diese Eigenschaft besitze.

Es sei, Fig. 4, Tafel XXV., A B die Gleichgewichtsposition. $\widehat{BAD} = \alpha$ der Winkel, um welchen anfänglich das Schwungrad aus seiner Gleichgewichtsposition abgelenkt und dann der Einwirkung der Feder überlassen wurde. $\widehat{DAC} = \varphi$ der Winkel, um welchen das Schwungrad während einer gewissen Zeit t zurückgeschwungen ist, so können wir nach obigem Erfahrungssatz annehmen, dass das statische Moment der Federkraft in der Stellung A C durch $\lambda(\alpha - \varphi)$ ausgedrückt wird, wobei λ eine Constante ist, die von der Starrheit der Feder abhängt.

Nennen wir M das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Schwungrades, so erhalten wir als Differenzialgleichung der Bewegung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda(\alpha-\varphi) - b\,\frac{d\varphi}{dt} - c}{M} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wobei angenommen ist, 1) dass der Luftwiderstand der Winkelgeschwindigkeit proportional ist und durch $b\,\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt werden kann; 2) dass die Axenreibung constant ist und durch c bezeichnet wird; 3) dass der Schwerpunkt des Schwungrades in seine Drehungsaxe fällt; 4) dass die Masse der Feder, so wie auch die etwa während der Bewegung eintretenden Aenderungen der Lage ihres Schwerpunktes vernachlässigt werden dürfen.

Unter diesen Voraussetzungen stimmt (der Form nach) die Gleichung (1) ganz mit jener überein, die wir für ein Pendel mit sehr kleinem Schwingungswinkel gefunden haben.

Setzen wir abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\lambda}{2M} \\ n &= \frac{b}{2M} \\ p &= \frac{c}{2M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so wird die Gleichung (1)

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + n \frac{d \varphi}{d t} + m \varphi = m \alpha - p \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Versuchen wir dieser Gleichung durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A}\, e^{k t} + \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zu genügen. Aus (4) folgt

$$\frac{d \varphi}{d t} = k\, \mathfrak{A}\, e^{k t}, \quad \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = k^2\, \mathfrak{A}\, e^{k t}$$

Führt man diese Werthe von φ, $\frac{d \varphi}{d t}$, $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ in (3) ein, so findet man:

$$(k^2 \mathfrak{A} + n k \mathfrak{A} + m \mathfrak{A})\, e^{k t} + m \mathfrak{B} = m \alpha - p$$

Damit diese Gleichung eine identische wird, muss sein:

$$k^2 + n k + m = 0$$

$$m \mathfrak{B} = m \alpha - p$$

und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, \sqrt{-1} \\ \mathfrak{B} &= \alpha - \frac{p}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Da wir für k zwei Werthe finden, so gibt jeder derselben ein partikulares Integrale, und ist das allgemeine Integrale die Summe der beiden partikularen Integrale. Wir erhalten demnach:

$$\varphi = \mathfrak{C}\, e^{\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\right) t} + \mathfrak{C}\, e^{\left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\right) t} + \alpha - \frac{p}{m}$$

Es ist aber

$$e^{\frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\, t} = \cos \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t$$

$$e^{-\frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\, t} = \cos \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t - \sqrt{-1} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t$$

daher findet man

$$\varphi = e^{-\frac{n}{2}t}\,\mathfrak{G}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t + \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\right)$$

$$+ e^{-\frac{n}{2}t}\,\mathfrak{E}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t - \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\right)$$

$$+ \alpha - \frac{p}{m}$$

oder wenn man $\mathfrak{G} + \mathfrak{E} = \mathfrak{M}$, $(\mathfrak{G} - \mathfrak{E})\sqrt{-1} = \mathfrak{N}$ setzt

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m}$$

$$+ e^{-\frac{n}{2}t}\left(\mathfrak{M}\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t + \mathfrak{N}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\right) \quad (6)$$

Durch Differenziation dieses Ausdruckes folgt, wenn man $\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2} = \mu$ setzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\frac{n}{2}t}\left\{\begin{aligned}&\left(\mathfrak{N}\,\mu - \mathfrak{M}\,\frac{n}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\\ &-\left(\mathfrak{M}\,\mu + \mathfrak{N}\,\frac{n}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (7)$$

Die Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ werden bestimmt, indem für $t = 0$ sowohl φ als auch $\frac{d\varphi}{dt}$ verschwindet; daher hat man wegen (6) und (7)

$$0 = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{M}$$

$$0 = \mathfrak{N}\,\mu - \mathfrak{M}\,\frac{n}{2}$$

oder

$$\mathfrak{M} = -\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{n}{2\,\mu}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right) = -\frac{n}{\sqrt{4\,m - n^2}}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)$$

Wir haben demnach schliesslich

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left[1 - e^{-\frac{n}{2}t}\left(\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t \\ +\frac{n}{\sqrt{4m-n^2}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\end{array}\right)\right] \\
\frac{d\varphi}{dt} &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\frac{2m}{\sqrt{4m-n^2}}\, e^{-\frac{n}{2}t} \sin\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t
\end{aligned}\right\} (8)$$

Nach jedem Schwung ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, d. h. immer nach Verlauf einer Zeit $\frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}}$

Die Zeit T einer jeden Schwingung ist demnach:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{4m-n^2}} = \pi\frac{\sqrt{\frac{2M}{\lambda}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{8\lambda M}}} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Nebenhindernisse vermögen also nicht zu bewirken, dass die Schwingungszeiten veränderlich werden, dagegen aber verursachen sie auch hier, dass der Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner wird, so dass zuletzt Stillstand eintritt. Setzen wir $0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die Werthe von φ, welche den aufeinanderfolgenden Schwingungen entsprechen, so erhalten wir dieselben, wenn wir in (8) für φ setzen:

$$\varphi = 0,\ \frac{\pi}{\mu},\ 2\frac{\pi}{\mu},\ 3\frac{\pi}{\mu}\ \ldots\ldots\ldots$$

Es ist demnach:

$$\varphi_1 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 - e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\varphi_3 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-3\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun sind aber $\varphi_1 - 0,\ \varphi_1 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_4,\ \varphi_5 - \varphi_4 \ldots\ldots$ die Winkel der aufeinanderfolgenden Schwingungen. Die Werthe dieser Winkel sind demnach:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\[2ex] \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}} + e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\[2ex] \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-3\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}} + e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

woraus zu ersehen ist, dass die Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner werden.

Aus (9) sieht man, 1) dass die Zeit einer Schwingung klein ausfällt, wenn λ gross ist, d. h. wenn die Feder starr ist; 2) dass die Schwingungszeit durch den Luftwiderstand vergrössert wird oder dass die Zahl der Schwingungen, die in einer gewissen Zeit geschehen, vermindert wird; 3) dass bei hoher Temperatur die Schwingungszeit grösser ist, als bei niedriger, indem die Wärme das Schwungrad ausdehnt, daher das Trägheitsmoment M desselben vergrössert; 4) dass die Axenreibung auf die Dauer einer Schwingung keinen Einfluss ausübt, wohl aber auf die Grösse der einzelnen Schwingungswinkel (wegen 10).

Einrichtung einer Uhr im Allgemeinen.

Die im Vorhergehenden entwickelte Schwingungstheorie hat uns gelehrt, dass die Schwingungszeit sowohl eines Pendels als auch eines Schwungrades selbst unter der Einwirkung des Luftwiderstandes und anderer Nebenhindernisse constant bleibt, dass jedoch die Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner werden.

Ein Pendel oder ein Schwungrad kann daher ohne sonstige Hilfseinrichtungen als Uhr gebraucht werden, wenn es sich nur um die Messung von kürzeren Zeitabschnitten handelt. Allein in den meisten Fällen der Anwendung verlangen wir von einer Uhr, dass sie längere Zeit, z. B. einen Tag, eine Woche, einen Monat lang einen continuirlich regelmässigen Gang habe, um auch grössere Zeitabschnitte messen zu können, und dies leistet ein Pendel oder ein Schwungrad ohne Hilfseinrichtungen nicht, sondern wir müssen dafür sorgen, dass die Schwingungen nicht erlahmen, nicht fort und fort kleiner werden, sondern im Gegentheil lange Zeit hindurch in unveränderlicher Weise fortdauern, was nur möglich wird, wenn wir auf den schwingenden Körper einen Motor in solcher Weise einwirken lassen, dass derselbe dem Pendel oder dem Schwungrad bei jedem Schwung genau so viel an Kraft ersetzt, als durch die Nebenhindernisse der Bewegung verloren geht.

Wir brauchen also zu einer Uhr nebst 1) Pendel oder Schwungrad, 2) einen Motor, der die Wirkungen der Nebenhindernisse aufhebt, 3) einen Hilfsmechanismus, welcher es möglich macht, dass der Motor bei jedem Schwung mit mathematischer Genauigkeit das an Kraft ersetzt, was durch die Nebenhindernisse verloren geht, 4) ein Zählwerk, welches die Anzahl der Schwingungen des Pendels wie des Schwungrades zählt. Als Motoren werden Gewichte oder zusammengewundene Stahlfedern gebraucht. Der unter 3) bezeichnete Hilfsmechanismus wird Hemmung genannt; das Zählwerk besteht gewöhnlich aus Zahnrädern, Zeiger und Zifferblatt. Werden diese Bestandtheile der Uhr sorgfältig und angemessen ausgeführt und zusammengesetzt, so entsteht in der Uhr unter der Einwirkung des Motors ein Beharrungszustand, in welchem dem Pendel oder Schwungrad bei jedem Schwung genau an Kraft ersetzt wird, was bei einem Schwung durch die Nebenhindernisse verloren geht. Dieser Beharrungszustand tritt von selbst ein, weil (wie wir in der Folge sehen werden) der Kraftverlust durch die Nebenhindernisse mit der Grösse des Schwingungswinkels wächst, der Kraftersatz durch den Motor und die Hemmung dagegen mit der Grösse des Schwingungswinkels abnimmt.

Setzt man z. B. eine Pendeluhr so in Bewegung, dass der erste Schwingungswinkel sehr klein ist, so wird während dieses ersten Schwunges nur sehr wenig Kraft verloren, wird dagagen durch den Motor weit mehr Kraft ersetzt, das Pendel gewinnt daher beim ersten Schwung an lebendiger Kraft, was zur Folge hat, dass der zweite Schwung grösser ausfällt als der erste. Dadurch aber wird der Kraftverlust beim zweiten Schwung grösser, der Kraftersatz dagegen kleiner, so dass das Pendel beim zweiten Schwung an lebendiger Kraft weniger gewinnt als beim ersten. Der dritte Schwung wird nun wiederum grösser sein als der zweite, allein dadurch kann es nun kommen, dass der Kraftverlust dem Kraftersatz gleich wird, so dass nun während des dritten Schwunges die lebendige Kraft weder vermindert noch erhöht wird, und dann ist der Beharrungszustand eingetreten, in welchem die Zeit jeder Schwingung den gleichen Werth hat und (so lange der Schwingungswinkel klein ist) unabhängig ist von der Intensität, mit welcher der Motor einwirkt. Ist diese Intensität gross, so tritt ein Beharrungszustand mit grossem Schwingungswinkel ein, ist diese Intensität klein, so tritt ein Beharrungszustand mit kleinem Schwingungswinkel ein. War die Intensität des Motors veränderlich (und z. B. abnehmend, wie bei einer Stahlfeder), so tritt ein Bewegungszustand mit veränderlichen Schwingungswinkeln ein, aber dennoch bleibt die Schwingungszeit unveränderlich.

Da die Unveränderlichkeit der Schwingungszeit doch nicht mathematisch genau ist, so kann eine Uhr nur dann einen möglichst unveränderlichen Gang annehmen, wenn die Construktion der Uhr einerseits und die treibenden wie hindernden Kräfte eine merkliche Veränderung nicht erleiden; daher eine äusserst genaue Ausführung aller Bestandtheile und sorgfältige Zusammensetzung derselben unerlässlich, denn nur bei einer so vollkommenen Ausführung werden die verschiedenen Bewegungshindernisse so klein sein, dass eine äusserst schwache Einwirkung des Motors genügt, werden also die wechselseitigen Pressungen der Bestandtheile so klein sein, dass eine Abnützung und Deformirung kaum eintritt, wird sich also der ursprüngliche Zustand der Construktion beinahe vollkommen conserviren und ein sich gleich bleibender Gang der Uhr erhalten. Diese sorgfältige Einrichtung und Ausführung der Uhr ist die Aufgabe des Mechanikers, aber das, was einen solchen Mechanismus zu einer Uhr macht, ist doch der sich von selbst einstellende Beharrungszustand. Wenn sich ein solcher Zustand nicht von selbst einstellte, würde kein Mechaniker im Stande sein, eine Uhr mit länger dauerndem gleichförmigem Gang herzustellen. Der Mechaniker hat nichts zu machen, dass ein Beharrungszustand eintritt, sondern er hat nur dafür zu sorgen, dass der von selbst eintretende Beharrungszustand von der Art ist, dass sich in demselben das ganze Werk möglichst unveränderlich erhält. Es verhält sich also bei einer Uhr wie bei jeder Maschine, auch da tritt von selbst ein Beharrungszustand ein und der Mechaniker hat nur dafür zu sorgen, dass dieser Beharrungszustand von gewisser Art sei.

Berechnung des Beharrungszustandes.

Was im Vorhergehenden mit Worten erklärt wurde, kann auch auf folgende Weise durch Rechnung nachgewiesen werden.

Es sei:

F_1 die auf den Umfang des Hemmrades reduzirte Kraft des Motors (Feder oder Gewicht), d. h. die Kraft, mit welcher der Umfang des Hemmrades durch den Motor getrieben wird oder auch der Druck des Radzahnes gegen den Hemmungsbestandtheil, wenn das Hemmrad ruht,

M_1 die auf den Umfang des Hemmrades reduzirte Masse aller Uhrbestandtheile von der Treibaxe ab bis inklusive Hemmungsrad,

s die Weglänge, durch welche der Zahn des Hemmrades vorrückt, während der Kraftersatz stattfindet,

v die Geschwindigkeit am Umfang des Rades in dem Moment, wenn der Weg s durchlaufen ist, also am Ende der Zeit, während welcher der Kraftersatz stattfindet,

α der Schwungwinkel des Pendels oder des Schwungrades im Beharrungszustande des Uhrganges,

u die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher ein Schwung erfolgt.

Dies vorausgesetzt, schliessen wir nun wie folgt:

Der Motor entwickelt bei einem Schwung eine Wirkungsgrösse $F\,s$ und die Masse M_1 besitzt am Ende der Einwirkung des Motors eine lebendige Kraft $M_1\,v^2$. Bei einem Schwung wird also dem Pendel durch den Motor nur eine Wirkung $F\,s - M_1\,v^2$ mitgetheilt, und diese muss im Beharrungszustand gleich sein der totalen Wirkung aller Widerstände während eines Schwunges. Der mittlere Werth des Widerstandes kann ausgedrückt werden durch

$$a + a_1\,u + a_2\,u^2$$

wobei a, a_1, a_2 für eine bestimmte Uhr constante Grössen sind. Aber der Weg, durch welchen dieser Widerstand überwunden wird, ist offenbar dem Winkel α proportional. Die Wirkung, welche der Ueberwindung sämmtlicher Widerstände während eines Schwunges entspricht, ist daher ein Ausdruck von der Form

$$\alpha\,(a + a_1\,u + a_2\,u^2)$$

Daher hat man die Gleichheit

$$\alpha\,(a + a_1\,u + a_2\,u^2) = F\,s - M_1\,v^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Allein für eine bestimmte Uhr sind die Geschwindigkeiten u und v dem Winkel α proportional, kann man also setzen $u = b\,\alpha$, $v = b_1\,\alpha$, setzt man diese Werthe in (1), so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\alpha\,(c + c_1\,\alpha + c_2\,\alpha^2) = F\,s - c_3\,\alpha^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wobei $c\ c_1\ c_2\ c_3$ für eine bestimmte Uhr constante Grössen sind. Hieraus folgt

$$F = \frac{c\,\alpha + c_1\,\alpha^2 + c_2\,\alpha^3 + c_3\,\alpha^4}{s} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

oder wenn man aus (2) α sucht, so findet man

$$\alpha = \text{Funct}\,(F\,s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gleichung (3) bestimmt die Elastizitätskraft, welche die Feder besitzen muss, damit im Beharrungszustand der Bewegung ein Schwingungswinkel von einer gewissen Grösse α eintritt. Die Gleichung (4) dagegen bestimmt die Grösse dieses Schwingungswinkels, wenn die Elastizitätskraft der Feder bekannt ist.

Aus (3) sieht man, dass ein grosser Schwingungswinkel eine starke, ein kleiner Schwingungswinkel eine schwache Triebfeder erfordert. Zur Ausführung einer Uhr muss die passende Feder durch Versuche bestimmt werden.

Damit aber ein Beharrungszustand eintreten kann, sei es nun dass die Feder stark oder schwach wirkt, ist noch wesentlich der Anforderung zu entsprechen, dass der Kraftersatz nicht am Anfang, sondern am besten in der Mitte des Schwunges stattfindet. Denn wenn der Kraftersatz am Anfang des Schwunges stattfände, würde derselbe mit der Grösse des Schwungwinkels nicht variabel sein, was durchaus nothwendig ist, damit ein Beharrungszustand eintreten kann.

Beschreibung mehrerer Uhrwerke.

Pendeluhr mit Ankerhemmung.

Fig. 5 und 6, Tafel XXV. a a das Gestell. b c d das Pendel. d die Aufhängung desselben vermittelst einer Stahlfeder. b die Pendelstange. c der linsenförmige Pedelkörper. e eine Axe. *f* der daran befestigte Anker. g ein Mitnehmer, derselbe ist mit e verbunden und geht durch eine in der Pendelstange angebrachte Oeffnung. h das Hemmungsrad. k ein kleines Getriebe. h und k sind mit der Axe i verbunden. l ein Zahnrad. m das Gehäuse der als Motor wirkenden Spiralfeder. Wird diese Feder zusammengewunden, so sucht sie zunächst vermittelst der Räder l und k das Hemmungsrad nach der Richtung des Pfeiles zu treiben. Allein wenn das Pendel ruht, entsteht hierdurch noch keine Bewegung, weil der Anker in die Zähne des Hemmungsrades eingreift und dessen Bewegung hemmt. Wird aber auch das Pendel in Bewegung versetzt, so bewegt es vermittelst des Mitnehmers g den Anker hin und her, so dass derselbe bald an der einen, bald an der andern Seite in das Hemmungsrad eingreift, und dadurch dem Hemmungsrad gestattet, bei jedem Pendelschwung um eine halbe Zahntheilung fortzurücken.

Der Vorgang während einer Hin- und Herschwingung des Pendels wird durch folgende Zeichnungen und Beschreibungen deutlich gemacht.

Fig. 7, Tafel XXV. zeigt die Stellung des Ankers und Rades, wenn das Pendel seinen Schwung von rechts nach links beginnt. Der Zahn a des Rades liegt an der Krümmung des Hakens g und wird gehemmt. Der Haken h steht ausser dem Bereich des Rades.

Fig, 8, Tafel XXV. Das Pendel ist um so viel nach links geschwungen, dass die Zahnspitze von a an der Abschnittsfläche von g steht. Der Haken h ist in das Bereich des Rades l eingetreten.

Fig. 9, Tafel XXV. Das Pendel ist noch weiter links. Der Zahn a ist unten an der Spitze des Abschnittes und verlässt diese Spitze. Der Haken h steht im Bereich des Rades l.

Fig. 10, Tafel XXV. Das Hemmungsrad ist vorgerückt, wird aber durch h am Zahn f gehemmt. g steht ausserhalb des Rades.

Fig. 11, Tafel XXV. Der Pendelschwung ist zu Ende. Der Haken h greift tief in das Rad l ein, der Haken g steht weit ausser dem Rade.

Aehnlich wie bei diesem Schwung nach links, sind auch die Erscheinungen bei dem folgenden Schwung nach rechts. Man wird leicht erkennen, dass bei jedem Schwung Kraftverlust stattfindet in der Zeit, wenn die äussere Hakenfläche von h an f, oder die innere Hakenfläche von g an a hinschleift, und dass dieser Verlust um so grösser ist, je grösser der Schwingungswinkel, weil sich darnach die Länge der Bogen richtet, längs welchen Schleifungen stattfinden. Anderseits wird man aber auch erkennen, dass dem Pendel Kraft ersetzt wird, jedesmal, wenn eine Zahnspitze an der Abschrägung eines Hakens hingleitet und weil der Druck des Zahnes gegen diese Abschrägung gross oder klein ausfällt, je nachdem die Bewegung langsam oder schnell erfolgt, so ist der Kraftersatz gross, wenn der Schwingungswinkel klein, und ist der Kraftersatz klein, wenn der Schwingungswinkel gross ist. Kraftersatz und Kraftverlust müssen also nothwendig bei einem gewissen Schwingungswinkel gleich ausfallen und wenn dies eingetreten ist, ist der Beharrungszustand vorhanden.

Cylinder-Hemmung mit Schwungrad.

Fig. 12, Tafel XXV. a a das Gestell. b das Schwungrad. c die Schwungradfeder. d der Cylinder. e das Hemmungsrad. *f*, g Räderübersetzung. h das Gehäuse der Triebfeder. Der sogenannte Cylinder d ist, wie die folgenden Figuren zeigen, ein hohler halbcylindrischer Körper, der mit dem Schwungrad drehende Schwingungen macht. Das Hemmungsrad ist mit keilförmigen Zähnen versehen. Die Flächen $i\,i_{,}$, $k\,k_{,}$ der Zähne bilden mit den Radien $i\,o$, $k\,o$ Winkel, die kleiner als 90° sind. Das Spiel dieser Hemmung wird durch die nachfolgenden Figuren erklärt.

Fig. 13, Tafel XXV. zeigt die Stellung, wenn das Schwungrad seinen Linksschwung vollendet hat und den nächsten Rechtsschwung beginnt. Das Hemmungsrad wird durch die Triebfeder nach rechts getrieben, seine Spitze $i_{,}$ berührt (mit Pressung) den äusseren Umfang des Cylinders.

Fig. 14, Tafel XXV. Das Schwungrad befindet sich im Rechtsschwung. Die schiefe Ebene $i\,i_{,}$ wirkt (weil $\widehat{o\,i\,i_{,}} < 90^{\circ}$ ist) treibend auf den Cylinder ein, es findet also nun Kraftersatz statt.

Fig. 15, Tafel XXV. Das Schwungrad ist im Rechtsschwung begriffen. Der Zahn $i\,i_{,}$ steht in der Höhlung des Cylinders und drückt mit seiner Spitze $i_{,}$ gegen die innere Fläche der Höhlung. Es findet Reibung, daher Kraftverlust statt.

Fig. 16, Tafel XXV. Ende des Rechtsschwunges oder Anfang des Linksschwunges. Das Hemmungsrad ruht. Die Spitze $i_{,}$ drückt gegen die innere Höhlung, aber die Richtung des Druckes geht durch die Drehungsaxe des Cylinders, daher wird derselbe nicht getrieben.

Fig. 17, Tafel XXV. Das Schwungrad befindet sich im Linksschwung. Die schiefe Ebene $i\,i_{,}$ wirkt rechts auf den Cylinder und schnellt das Schwungrad weiter fort. Es findet also jetzt abermals Kraftersatz statt.

Hat der Punkt i den Cylinder verlassen, so wird das Hemmungsrad frei, es fällt vor und die Spitze des nächstfolgenden Zahnes schlägt links an die äussere Fläche des Cylinders an. Bei einem ganzen Hin- und Herschwung findet, wie man sieht, zweimal Kraftverlust und zweimal Kraftersatz statt. Kraftverlust, wenn die Zahnspitze gegen die innere und gegen die äussere Fläche des Cylinders drückt. Der Kraftersatz findet dagegen statt, wenn die schiefe Fläche eines Zahnes gegen die Cylinderenden wirkt. Ist der Schwingungswinkel gross, so sind es auch die Weglängen an der äussern und innern Fläche des Cylinders, längs welchen die Reibung überwunden werden muss; ist demnach der Kraftverlust gross. Dagegen fällt in diesem Falle der Kraftersatz klein aus, weil während der Einwirkung der schiefen Ebene eines Zahnes der Cylinder schnell ausweicht, was eine Verminderung des Druckes zwischen Zahn und Cylinder zur Folge hat. Ist dagegen der Schwingungswinkel klein, so tritt in Bezug auf Kraftverlust und Kraftersatz das Entgegengesetzte ein. Hieraus erkennt man, dass auch hier ein Beharrungszustand eintreten muss, in welchem Kraftersatz und Kraftverlust gleich sind. Treibt die Feder stark, so sind die Schwingungswinkel gross, treibt sie schwach, so sind die Schwingungswinkel klein, die Schwingungszeit ändert sich jedoch nicht.

Ruhende Stiftenhemmung.

Fig. 18 und 19, Tafel XXV. a ist das Hemmrad. Es wird durch den Motor nach der Richtung des Pfeiles getrieben und ist mit zwölf Stiften versehen, die die Form von Kreissegmenten haben. Die Hemmung besteht aus zwei Haken b und c, die um die halbe Theilung von einander abstehen, und deren Enden schief abgeschnitten sind. Die Arme b_1 c_1 dieser Haken und der Stiel e bilden ein Stück, das sich um d dreht. Das untere Ende f des Stieles ist gabelförmig. g ist ein Schwungrad, das, wenn es in Bewegung versetzt wird, unter der Einwirkung einer Feder Hin- und Herschwingungen macht. Die Axe des Schwungrades ist mit einer Kurbel h versehen, deren Zapfen beim Hin- und Herschwingen des Rades an die Gabel f schlägt und dieselbe bald nach links, bald nach rechts wirft, wodurch die Haken b und c abwechselnd in das Bereich des Kreises gerathen, in welchem sich die Stiftenmittel des Hemmrades a bewegen. So lange der Kurbelzapfen von h mit f nicht in Contakt ist, schwingt das Rad g ganz frei unter der Einwirkung der Feder, und ruhen alle übrigen Theile des Werkes. Wie aber dieser Contakt eintritt, wird zuerst das Hebelsystem b b_1 c c_1 getrieben, bis ein Stift an der schiefen Fläche eines der Haken hinzugleiten beginnt, und dabei findet durch Reibung Kraftverlust statt. Allein so wie ein Stift an der schiefen Ebene eines Hakens hingleitet, wird das Hebelsystem durch die obere Triebfeder getrieben, und dadurch wirkt der Stiel e vermittelst der Gabel f auf den Zapfen der Kurbel h ein, was zur Folge hat, dass dem Schwungrad Kraft ersetzt wird.

Freie Hemmung.

Fig. 1, Tafel XXVI. stellt die wesentlichen Bestandtheile einer freien Hemmung vor. Das mit einfachen Zähnen versehene Hemmungsrad l wird durch die Triebfeder fortwährend nach der Richtung des Pfeiles, also nach links getrieben. Ueber dem Hemmungsrad befindet sich eine Axe, mit welcher folgende Bestandtheile verbunden sind: 1) ein in der Zeichnung nicht dargestelltes Schwungrad das durch eine Schwungfeder in schwingenden Bewegungen erhalten wird; 2) eine runde mit einem Ausschnitt (bei b) versehene Scheibe a; 3) eine kleinere, mit einer Nase c versehene Scheibe, die vor der Scheibe e angebracht ist. d e *f* ist ein dreiarmiger Hebel. Am Ende des Armes e ist ein Ansatz k angebracht, welcher die Bewegung des Rades l hemmt, wenn derselbe im Bereich der Radzähne steht. Gegen den Arm d ist oben ein zartes Federchen g befestigt, dessen Ende über das Ende des Armes d etwas hinausragt und in die Peripherie des Kreises hineinreicht, der von der Spitze der Nase c beschrieben wird, wenn das Schwungrad schwingt. Der Arm *f* wird durch ein Federchen i gegen einen Stift h gedrückt. Schwingt das Schwungrad nach links, so begegnet die Nase c dem Ende des leichten Federchens g, biegt dasselbe in die Höhe und lässt es hierauf wieder niederfallen. Hierbei bleibt jedoch der dreiarmige Hebel stehen, und ist das Rad l durch den Ansatz bei k gehemmt. Schwingt hierauf das Rad nach rechts zurück, so kommt die Spitze der Nase c neuerdings mit dem Ende des Federchens g in Contakt, weil sich aber dieses nun an den Arm d anlegt, so muss nun das Winkelhebelsystem d e *f* um seine Axe gedreht werden, was zur Folge hat, 1) dass der Ansatz k aus dem Bereich des Rades l hinausrückt, wodurch dieses selbst frei wird; 2) dass die Spitze des Zahnes m mit der Spitze b des Einschnitts der Scheibe a zusammentrifft und diese Scheibe nach links hinausschnellt, wodurch der Zahn vorrückt. Allein so wie die Spitze von c das Ende des Federchens g verlässt, wird der dreiarmige Winkelhebel durch das Federchen i rechts drehend geschnellt, bis *f* an dem Stift h anliegt und das Ende k abermals in das Bereich des Rades l hereintritt und der auf n folgende Zahn das Rades l an k anstösst, wodurch dieses abermals gehemmt wird. Die Kraftverluste sind bei dieser Hemmung sehr klein und reduziren sich auf die Wirkungen, welche die Deformirungen der zarten Federchen g und i erfordern.
