Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Vierter Abschnitt. Die Verzahnung

VIERTER ABSCHNITT.

Die Verzahnung.

Einleitung zur Theorie der Verzahnung.

Verzeichnung von krummen Linien.

In der geometrischen Theorie der Bewegungsmechanismen spielen gewisse krumme Linien eine wichtige Rolle, es ist daher angemessen, in Kürze die Verzeichnung dieser Linien vorauszuschicken. Dabei handelt es sich vorzugsweise um solche Methoden, die mit einem Minimum von Hilfslinien zum Ziele führen, damit die Zeichnungsfläche nicht zu sehr leidet.

Verzeichnung einer Parabel.

Es sei der Scheitel A der Parabel, die Richtung A x ihrer Hauptaxe und ein Punkt M der Parabel gegeben. Fig. 6, Tafel XV.

Man fälle den Perpendikel M p, zeichne das Rechteck A p M b, theile sowohl A b als auch b M in gleich viele gleich grosse Theile, ziehe die Radien A 1, A 2, A 3 und durch 1_1, 2_1, 3_1 Parallellinien zu A x, so sind die Durchschnittspunkte III, II, I dieser Radien mit den Parallelen einzelne Punkte der Parabel.

Die Richtigkeit dieser Construktion ergibt sich auf folgende Weise: Setzen wir $A\,p_1 = x$, $\overline{I\,p_1} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes I, $A\,p = \alpha$, $M\,p = \beta$ die Coordinaten des Punktes M, so hat man:

$$x : y = \overline{b\,1} : \beta$$

Allein nach dem Theilungsgesetz der Linien A b und b M ist:

$$\overline{b\,1} : y = \alpha : \beta$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt durch Elimination von $\overline{b\,1}$:

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\,x$$

Das construktive Verfahren führt also in der That zu einer Parabel.

Verzeichnung einer Ellypse, deren Axen gegeben sind.

Der Methoden, Ellypsen zu zeichnen, gibt es eine grössere Anzahl; für den praktischen Zweck ist es genug, eine derselben zu kennen. Ich wähle folgende:

Es sei, Fig. 7, Tafel XV., O der Mittelpunkt der Ellypse, O a und O b ihre Halbaxen. Man verzeichne aus O als Mittelpunkt drei concentrische Kreise und zwar den ersten β b mit der kleinen Halbaxe, den zweiten a α mit der grossen Halbaxe, den dritten c γ mit der Summe beider Halbaxen. Zieht man nun einen beliebigen Radius O q p r und durch die Punkte q und p, in welchen die Kreise β b und a α geschnitten werden, parallele Linien zu O a und O b, so schneiden sich diese in einem Punkt m der Ellypse, und wenn man diesen Punkt mit r durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese der Richtung nach die zum Punkt m gehörige Normale. Die Richtigkeit dieser Construktion wird auf folgende Art bewiesen.

Nennt man $O\,a = a$, $O\,b = b$ die beiden Halbaxen, $O\,n = x$, $m\,n = y$ die Coordinaten des Punktes m, $\widehat{r\,O\,c} = \varphi$, so ist:

$$m\,n = y = \overline{O\,q}\,\sin\varphi = b\,\sin\varphi, \quad x = O\,n = \overline{O\,p}\,\cos\varphi = a\,\cos\varphi$$

demnach:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

Diese Gleichung gehört aber einer Ellypse an, deren Halbaxen a und b sind.

Nennt man Θ den Winkel, den die zum Punkt m gehörige Normale mit der Abscissenlinie bildet, so ist bekanntlich, oder wie man leicht findet:

$$\text{tang}\,\Theta = -\frac{d\,x}{d\,y} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Aber wegen Gleichung (1) ist auch $\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = o$ demnach $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$ demnach $\text{tang}\ \Theta = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$. Nennt man aber ferner σ den Winkel, den die Linie $r\,m\,s$ mit $O\,c$ bildet, so findet man leicht, dass $\text{tang}\ \sigma = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi}$, oder weil $\sin \varphi = \frac{y}{b}$, $\cos \varphi = \frac{x}{a}$ ist,

$$\text{tang}\ \sigma = \frac{a\,\frac{y}{b}}{b\,\frac{x}{a}} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$$

demnach ergibt sich $\text{tang}\ \Theta = \text{tang}\ \sigma$ oder $\Theta = \sigma$, d. h. die Richtung der Linie $r\,m\,s$ stimmt mit der Richtung der Normale überein, was zu beweisen war.

Annäherungs-Construktion einer Ellypse.

Es seien, Fig. 8, Tafel XV., $O\,a = a$, $O\,b = b$ die Halbaxen. Macht man $O\,d = O\,d_1 = 3\,\frac{a-b}{2}$ und $O\,e = O\,e_1 = 4\,\frac{a-b}{2}$, verbindet die Punkte $e\,d\,e_1\,d_1$ durch gerade Linien, beschreibt hierauf aus d und d_1 mit einem Halbmesser $d\,a = d_1\,a_1$ die Kreisbogen $n\,a\,m$ und $n_1\,a_1\,m_1$ und aus e und e_1 mit dem Halbmesser $e\,d\,n = e\,d_1\,n_1$ die Kreisbogen $m\,b\,m_1$, $n\,b_1\,n_1$, so bilden diese vier Kreisbogen zusammen eine Linie, die für ein minder geübtes Auge wie eine Ellypse aussieht. Dieser Schein ist aber nur dann täuschend, wenn die beiden Halbaxen nur wenig verschieden sind.

Verzeichnung der Cycloide.

Wenn ein Kreis k, Fig. 9, Tafel XV., auf einer geraden Linie $a\,x$ von a an fortrollt, findet man einen Punkt m der Cycloide, die dabei beschrieben wird, wenn man in $a\,x$ einen Punkt b annimmt, daselbst den Erzeugungskreis verzeichnet und auf demselben ein Bogenstück $m\,b$ abschneidet, das so lang ist als $\overline{a\,b}$. Verbindet man m mit b, so ist dies die Richtung der zum Punkt m gehörigen Normale. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man in $a\,x$ eine Reihenfolge von Punkten annimmt, so erhält man auch eine Reihe von Punkten der Cycloide, so wie der zugehörigen Normalen. Allein dabei wird das Papier durch die vielen Hilfslinien und Hilfskreise so sehr in Anspruch genommen, dass zuletzt eine reine Zeichnung nicht mehr möglich ist. Nachfolgendes Verfahren ist richtig und schont das Papier.

Man verzeichne, Fig. 1, Tafel XVI., die Hälfte des Erzeugungskreises und die berührende Gerade $0\,x$. Mache das Bogenstück $\widehat{0\,5}$ gleich der Weglänge $\overline{0\,5_1}$, auf welcher der Erzeugungskreis fortrollen soll, theile $\widehat{0\,5}$ und $\overline{0\,5_1}$ in gleich viele, gleich grosse Theile, ziehe die Sehnen $0\,1$, $0\,2$, $0\,3$, $0\,4$, $0\,5$ und dann durch 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, parallele Geraden zu diesen Sehnen, so schneiden sich je zwei von diesen auf einander folgenden Linien in gewissen Punkten 1_1, II, III, IV . . ., und es ist leicht zu erkennen, dass die durch die Punkte 1_1, 2_1, 3_1 zu den Sehnen $0\,1$, $0\,2$ . . . parallel gezogenen Geraden das Normalensystem der Cycloide und 1_1, II, III, IV . . . eine Reihenfolge von Krümmungsmittelpunkten dieser Linie darstellen.

Beschreibt man also aus 1_1 mit dem Halbmesser $1_1\,0$ den Bogen $0\,a$, sodann aus II mit dem Halbmesser II a den Bogen a b u. s. f., so erhält man mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit das ganze Bogenstück $0\,e$ der Cycloide.

Verzeichnung der Epicycloide.

Die Epicycloide ist diejenige Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, wenn derselbe auf einem anderen Kreis fortgerollt wird. Der bewegliche Kreis wird Erzeugungskreis, der ruhende dagegen Grundkreis genannt.

Es sei, Fig. 2, Tafel XVI., a der Anfangspunkt eines epicycloidischen Bogens, a b der unbewegliche Bogen, auf welchem der Erzeugungskreis fortgerollt ist, k die Position des Erzeugungskreises. Macht man $\widehat{bm} = \widehat{ba}$, so ist m ein Punkt der Epicycloide und ist m b der Richtung nach die Normale, welche dem Punkt m entspricht. Wiederholt man diese Construktion mehrere Male, indem man in K eine Reihenfolge von Punkten annimmt, jedesmal den Erzeugungskreis verzeichnet und auf demselben die geeigneten Bogenlängen abschneidet, so erhält man eine Reihenfolge von Punkten der Epicycloide, so wie die zugehörigen Normalen. Jede solche Normale wie m b schneidet, wenn sie verlängert wird, den Grundkreis noch ein zweites Mal bei e, und dieser Punkt kann leicht gefunden werden. Es ist $\widehat{b\,C\,e} = \widehat{m\,c\,b}$, demnach $\widehat{be} = \frac{R}{r}\,\widehat{ab}$, wobei R und r die Halbmesser der Kreise K und k bezeichnen. Setzt man $\frac{R}{r} = n$, so wird:

$$\widehat{be} = n\,\widehat{ab}$$

Man findet also den Punkt e, in welchem eine Normale den Grundkreis zum zweiten Mal schneidet, wenn man von dem Punkt b an, wo sie den Grundkreis zum ersten Mal schneidet, eine Bogenlänge $\widehat{be}$ abschneidet, die n-mal so gross ist, als die Bogenlänge $\widehat{ab}$. Hierdurch hat man ein sehr einfaches Verfahren zur Verzeichnung des Normalensystems einer Epicycloide und mithin auch ein Verfahren zur Verzeichnung der Linie selbst.

Es sei z. B. Fig. 3, Tafel XVI., K der Grundkreis und $n = 2$, d. h. der Halbmesser des Erzeugungskreises sei halb so gross als jener des Grundkreises. Macht man vom Anfangspunkt 0 an eine Eintheilung $01 = 12 = 23 = \ldots.$ und verbindet dann 1 mit 3, ferner 2 mit 6, 3 mit 9, 4 mit 12, so bilden diese Linien das Normalensystem der Epicycloide und die Punkte I, II, III, IV . . ., in welchen sich diese Linien schneiden, sind die Krümmungsmittelpunkte, aus welchen die Bogen $0\,1_1$, $1_1\,2_1$, $2_1\,3_1$ . . . . beschrieben werden können. Auch diese Construktion ist einfach und schont das Papier.

Verzeichnung einer Hypocycloide.

Die Hypocycloide ist diejenige Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, der in einem andern Kreis fortgerollt wird.

Es sei, Fig. 4, Tafel XVI., K der Grundkreis, in welchem der Erzeugungskreis k von a an bis b fortgerollt worden ist. Macht man $\widehat{bm} = \widehat{ab}$, so ist m ein Punkt der Hypocycloide und verbindet man m mit b, so ist diese Linie die Richtung der durch m gehenden Normale. Diese Normale schneidet den Kreis noch einmal im Punkte e und dieser kann leicht gefunden werden. Denn verbindet man die Mittelpunkte c und C der Kreise k und K mit m und e, so bilden sich die zwei ähnlichen Dreiecke cmb und eCb, es ist folglich $\widehat{eCb} = \widehat{mcb}$, demnach:

$$\widehat{eb} = \frac{R}{r}\,\widehat{mb} = \frac{R}{r}\,\widehat{ab} = n\,\widehat{ab}$$

wobei $\frac{R}{r} = n$ gesetzt wurde. Man findet also den Punkt e, in welchem eine durch b gehende Normale den Grundkreis zum zweiten Mal schneidet, wenn man den Bogen $\widehat{ab}$ von a an $(n - 1)$-mal nach entgegengesetzter Richtung aufträgt. Hieraus folgt ein einfaches Verfahren zur Verzeichnung der Hypocycloide.

Es sei z. B. Fig. 5, Tafel XVI. $n = \frac{R}{r} = 3$.

Trägt man von 0 aus eine Theilung $01 = 12 = 23 \ldots$ auf, macht

$$\widehat{01_1} = (3-1)\ \widehat{01} = 2 \times \widehat{01}$$

$$\widehat{02_1} = (3-1)\ \widehat{02} = 2 \times \widehat{02}$$

$$\widehat{03_1} = (3-1)\ \widehat{03} = 2 \times \widehat{03}$$

. . . .

verbindet die Punkte $1_1, 2_1, 3_1 \ldots$ mit 1, 2, 3, verlängert diese Linien bis sie sich in II, III, IV schneiden, so hat man das Normalensystem und die Krümmungsmittelpunkte der Hypocycloide. Diese kann also durch kleine Kreisbogenstücke 0 a, a b, b c . . . zusammengesetzt werden.

Nimmt man $n = 2$, so gibt dieses Verfahren parallele Normalen und als Hypocycloide den durch 0 gehenden Durchmesser, was auch ganz richtig ist.

Evolventen.

Nimmt man eine krummlinig begrenzte Scheibe, befestiget an ihrem Umfang einen vollkommen biegsamen, aber unausdehnsamen Faden, wickelt denselben um die Scheibe und zwar so, dass der Faden stets geradlinig gespannt bleibt, so beschreibt der Punkt, an welchem der Faden gefasst wurde, eine krumme Linie, welche die Evolvente der Scheibengrenzlinie ist, welche letztere auch Evolute genannt wird.

Es ist klar, dass der Faden in jeder seiner Positionen einerseits Tangente zu einem Punkt der Evolute und andererseits Normale zu einem Punkt der Evolvente ist. Man findet also das System der Normalen einer zu verzeichnenden Evolvente, wenn man zu der gegebenen Linie das Tangentensystem darstellt, was praktisch mit hinreichender Genauigkeit mit einem Lineal leicht geschehen kann.

Geometrische Theorie der Verzahnung.

Allgemeine Erklärungen. Versieht man zwei der Richtung nach parallel gelagerte Axen mit cylindrischen Scheiben, presst diese gegen einander und dreht hierauf eine der beiden Axen mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so entsteht dadurch auch in der zweiten Axe und ihrer Scheibe eine gleichförmige drehende Bewegung, vorausgesetzt, dass der Widerstand, welcher etwa der Bewegung der zweiten Axe entgegen wirkt, nicht zu gross ist.

Wenn die beiden Scheiben nur aufeinander rollen und nicht glitschen, sind ihre Umfangsgeschwindigkeiten gleich gross, müssen sich demnach die Winkelgeshwindigkeiten der beiden Scheiben umgekehrt wie ihre Halbmesser verhalten. Nennt man R und R_1 die Halbmesser der Scheiben, ω und ω_1 die Winkelgeschwindigkeiten n und n_1 die Anzahl der Umdrehungen, welche die beiden Scheiben in einer Minute machen, endlich $\varDelta$ die Axendistanz, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} R + R_1 = \varDelta \\[1ex] \dfrac{R}{R_1} = \dfrac{\omega_1}{\omega} = \dfrac{n_1}{n} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt, wenn man $\varDelta$, n und n_1 als gegebene Grössen betrachtet:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = \dfrac{\varDelta}{1 + \dfrac{n_1}{n}} \\[3ex] R = \dfrac{\varDelta}{1 + \dfrac{n}{n_1}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Bewegungsmittheilung durch zwei auf einander rollenden cylindrischen Scheiben ist eine vollkommen sanfte und ist in sofern den praktischen Zwecken ganz angemessen, allein sie hat zwei nachtheilige Eigenschaften; sie ist unsicher, indem sehr leicht ein Glitschen der Scheiben eintritt und kann auch nicht zur Uebertragung von grösseren Kräften gebraucht werden, weil in diesem Falle die Scheiben sehr stark gegeneinander gepresst werden müssten, was bedeutende Axenreibungen verursachen würde. Versieht man aber die Umfänge der beiden Scheiben mit regelmässig geformten, in einander greifenden Zähnen, so brauchen die Scheiben nicht gegeneinander gepresst zu werden und kann dennoch eine Bewegung hervorgebracht werden, die identisch ist mit der Bewegung der zwei aufeinander rollenden Scheiben. Die Theorie der Verzahnung hat die Aufgabe zu lösen, solche Zahnformen ausfindig zu machen, dass durch dieselben Bewegungen hervorgerufen werden, die mit zwei aufeinander rollenden Scheiben übereinstimmen, also solche Bewegungen, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen für jeden Zeitaugenblick der Bewegung einen und denselben constanten Werth hat. Wir werden in der Folge zeigen, dass die Aufgabe der Verzahnung eine unbestimmte ist und dass sie unendlich viele Auflösungen zulässt, werden auch die allgemeinen Methoden angeben, durch welche diese möglichen Lösungen gefunden werden können. Allein wir wollen gleich von vorn herein bemerken, dass nicht jede in geometrischer Hinsicht richtige Verzahnungsart auch in praktischer Hinsicht von gleichem Werth ist, sondern dass nur solche Verzahnungsarten zur Ausführung empfohlen werden können, die nicht zu starke Reibungen verursachen und bei welchen keine erheblichen Formänderungen der Zähne durch Abnützung entstehen. Die beste Verzahnung wäre diejenige, welche nicht nur den früher ausgesprochenen geometrischen Bedingungen entsprechen würde, sondern die noch überdies gar keine Reibung noch eine Formänderung der Zähne durch Abnützung verursachen würde.

Bei diesen einleitenden Erklärungen sind wir von der speziellen Annahme ausgegangen, dass die mit einander durch Räder zu verbindenden Axen parallel sind. Dies ist aber nicht immer der Fall, sondern sehr häufig bilden die Axenrichtungen einen Winkel, schneiden sich jedoch, und zuweilen bilden die Axenrichtungen einen Winkel, ohne sich zu schneiden. Wir haben also Verzahnungen anzugeben, 1) für parallele Axen, 2) für gegen einander geneigte, aber sich schneidende Axenrichtungen, 3) für gegen einander geneigte und sich nicht schneidende Axenrichtungen. Wir beginnen nun mit einigen speziellen Verzahnungsarten für parallele Axen, gehen sodann zu speziellen Anordnungen für geneigte Axen über und schliessen mit den allgemeinsten Verfahrungsarten zur Auffindung von richtigen Zahnformen für jede beliebige Gegeneinanderlagerung der Axen.

Erste Verzahnung mit Triebstöcken.

Es seien, Fig. 6, Tafel XVI., C und c die Mittelpunkte der Räder, K und k die Theilrisse derselben, d. h. zwei aus C und c beschriebene sich berührende Kreise, deren Halbmesser sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen verhalten. Die Halbmesser dieser Theilkreise können vermittelst der früher für die Scheiben aufgefundenen Gleichungen (2) berechnet werden. Versehen wir den Kreis k mit dünnen Stiften 1, 2, 3 . . . ., die in gleichen Abständen aufeinander folgen, den Kreis K dagegen mit Zahnformen $a\,b$, $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$ . . . ., die nach der Epicycloide geformt sind, welche ein Punkt des Kreises k beschreibt, wenn derselbe auf dem Kreis K fortgerollt wird, so haben wir eine geometrisch richtige Verzahnung. Denn denken wir uns, der Zahn $a\,b$ werde in die Position $a_1\,b_1$ gebracht, so wird der Stift 1 nach dem Punkt 2 fortgeschoben, in welchem die Epicycloide $a_1\,b_1$ den Kreis k durchschneidet. Ist nun die Zahnform richtig, so muss die Bogenlänge $\widehat{a\,a_1}$ gleich sein der

Bogenlänge $\widehat{12}$. Dies ist aber in der That der Fall, wenn der Zahn nach der Epicycloide geformt ist, die durch das Rollen des Kreises k auf K entsteht.

Damit aber die Bewegung continuirlich fortdauern kann, muss in dem Augenblick, in welchem der Stift mit dem äussersten Ende der Zahnkurve in Berührung tritt, wiederum ein nachfolgender Zahn mit einem nachfolgenden Stift in dem Punkt a zusammen treffen u. s. f. Die Continuität der Bewegung erfordert also 1) dass die Entfernung der Stifte gleich ist der Entfernung der Zähne, oder dass $\widehat{a a_1} = \widehat{a_1 a_2} \ldots = \widehat{12} = \widehat{23} = \ldots$ 2) dass die Zahnlinie $a\,b$ durch Wälzung des Kreisses k auf dem Kreis K auf eine Bogenlänge, die wenigstens gleich $\widehat{a a_1}$ ist, gebildet werde.

Man nennt die Entfernung der Stifte oder die Entfernung der Anfangspunkte der Zähne die Theilung oder Schrift, und kann daher sagen, dass diese Stiftenverzahnung 1) gleiche Theilungen und 2) eine Zahnlänge verlangt, die wenigstens so lang ist, als der epicycloidische Bogen, der durch Wälzung auf einer Theilung beschrieben wird.

Mit dieser Anordnung kann aber keine Kraft übertragen werden, weil die Stifte durch den Druck der Zähne abbrechen müssten. Wenn man aber statt der unendlich dünnen Stifte runde cylindrische Stäbchen (Triebstöcke) anbringt und die Zähne des Rades K nach der äquidistanten Linie formt, die entsteht, wenn der Triebstockkreis so fortbewegt wird, dass sein Mittelpunkt stets der epicycloidischen Linie $\widehat{ab}$ folgt, so erhält man abermals eine geometrisch richtige und realisirbare Anordnung. Dieselbe ist in Fig. 7, Tafel XVI. dargestellt.

$a_1\, c_1\, b_1$ ist die der Stiftenverzahnung entsprechende Epicycloide, $\alpha_1\, \gamma_1\, \beta_1$ ist die mit dem Halbmesser des Triebstockes beschriebene Aequidistante der Epicycloide $a_1\, c_1\, b_1$. Der Zahn würde den Triebstock genau durch eine Theilung bewegen, wenn er nur bis γ_1 reichte, weil er aber noch weiter fortgesetzt ist, so bewegt er die Triebstöcke durch mehr als eine Theilung. Wenn der Zahn Z_2 mit dem Triebstock T_2 in Berührung tritt, hört demnach die Einwirkung von Z_1 auf T_1 noch nicht auf. Wollte man die Zähne so formen, dass ein Zahn einen Triebstock durch irgend einen beliebigen Bogen des Theilrisses zu bewegen vermöchte, so müsste die Epicycloide und die zugehörige Aequidistante gerade für diesen Bogen construirt werden. Die Zähne sind zu beiden Seiten symetrisch gebildet, was zur Folge hat, dass sowohl nach der einen wie nach der andern Drehungsrichtung richtige Bewegungen entstehen. Die

Lücken zwischen zwei Zähnen sind kreisbogenförmig, was übrigens nicht wesentlich ist, indem die Fläche der Aushöhlung mit dem Triebstock nicht in Berührung kommt. Die Lückenweite ist etwas grösser als der Durchmesser eines Triebstockes, damit nicht leicht eine Einklemmung eintritt. Bei mathematisch richtiger Form würde aber auch das Einklemmen nicht statt finden, wenn die Zahnlücke genau so weit wäre, als der Durchmesser eines Triebstockes.

Fragen wir nach dem praktischen Werth dieser Construktion, so können wir diesen nicht hoch anschlagen, weil der Triebstock nothwendig sehr bald seine runde Form verliert. Während ein Zahn aus der Position z_2 in die Position z_1 fortrückt, streicht der Triebstock auf der Zahnfläche hinaus, und zwar mit zunehmender relativer Geschwindigkeit. Dabei ist aber der Druck zwischen dem Zahn und dem Triebstock nicht constant, sondern fortwährend zunehmend. In der Position z_1 z. B. drückt der Zahn z_1 den Triebstock nach der Richtung $a\,\gamma,\,c_1$. Fällt man von C aus auf die Verlängerung von $c_1\,a$ den Perpendikel $C\,D$, so ist die Länge desselben $R \cos \varphi$, wobei R der Halbmesser des Kreises K und $\varphi = \widehat{a\,C\,D}$. Nennt man also M das constante Moment der Kraft, welche das Rad K treibt, so ist $\frac{M}{R \cos \varphi}$ der Druck des Zahnes gegen den Triebstock in der Position z_1. Da nun φ von 0 an fortwährend wächst, je mehr sich der Zahn von der Position z_2 entfernt, so erkennt man daraus, dass die Pressung zwischen dem Zahn und Triebstock ebenfalls fortwährend zunimmt. Dies hat nun zunächst zur Folge, dass der Zahn nach aussen zu mehr abgenützt wird und daher allmählig eine Form annimmt, bei der er gegen das Ende seiner Einwirkung hin zu wenig vorschiebt, dass also die Bewegung des Triebstockrades nicht eine gleichförmige, sondern eine verzögerte wird. Dann aber hat der Theil des Triebstockumfanges, mit welchem der Zahn während seiner Einwirkung in Berührung kommt, nur eine äusserst geringe Ausdehnung, der Triebstock wird also nur an einer Stelle abgenützt und flacht sich daselbst ab, ändert also den eigentlich wirksamen Theil seiner Form sehr beträchtlich. Hieraus geht also hervor, dass diese Verzahnung mit Triebstöcken sehr starken Abnützungen unterliegt, daher nur von geringem praktischem Werth ist.

Zweite Verzahnung. Epicycloiden und radiale Einschnitte.

Es seien, Fig. 8, Tafel XVI., K und k die Theilrisse der beiden Räder, a der gemeinschaftliche Berührungspunkt derselben, $a\,b$ ein in dem Rade k angebrachter geradliniger radialer Einschnitt.

Betrachtet man diesen als die Form des Zahnes vom Rade k, so erhält man die correspondirende Zahnform für das Rad K; wenn man eine Epicycloide a c verzeichnet, die entsteht, wenn ein Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ r auf dem Theilriss K fortgerollt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich auf folgende Weise.

Man denke sich, der Zahn werde aus der Position a c nach $a_1\,c_1$ gebracht und wirke dabei auf den geradlinigen Einschnitt a b ein, so wird dieser fort und fort die Epicycloide berühren. Wir werden also die Position des geradlinigen Einschnittes finden, wenn wir von o aus an die Epicycloide eine Tangente ziehen. Allein weil der Voraussetzung gemäss a c durch Rollen des Kreises $\frac{1}{2}$ r auf K entstanden ist, so geht die Tangente, welche man von o aus nach der Epicycloide ziehen kann, durch den Punkt c_1, in welchen die Epicycloide durch den Erzeugungskreis $\frac{1}{2}$ r geschnitten wird. Wenn nun die Zahnformen richtig sind, muss $\widehat{a\,d} = \widehat{a\,a_1}$ sein. Dies ist aber wirklich der Fall, denn aus den Voraussetzungen folgt: $\widehat{a\,c_1} = \widehat{a\,a_1}$, dann aber ist: $\widehat{a\,c_1} = \frac{1}{2}\,r \times \widehat{c_1\,o_1\,a}$, $\widehat{a\,d} = r \times \widehat{d\,o\,a}$ aber $\widehat{d\,o\,a} = \frac{1}{2}\,\widehat{c_1\,o_1\,a}$, demnach $\widehat{a\,c_1} = \widehat{a\,d}$ folglich auch $\widehat{a\,d} = \widehat{a\,a_1}$ was zu beweisen war.

Hierauf beruht nun die in Fig. 1, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung, welche mit solchen Verhältnissen verzeichnet ist, dass sich je zwei Zähne durch zwei Theilungen führen.

k und K sind die Theilkreise der beiden Räder, a ihr Berührungspunkt, $\frac{1}{2}$ k und $\frac{1}{2}$ K zwei in a sich berührende Hülfskreise, deren Halbmesser halb so gross sind, als die Halbmesser der Theilkreise, $\widehat{a\,c_1} = \widehat{a\,a_1} = \widehat{a\,e_2} = \widehat{a\,a_2} =$ einer Zahntheilung, $a_1\,c_1$ Epicycloide, die der Punkt c_1 beschreibt, wenn der Kreis $\frac{1}{2}$ k von a nach a_1 gerollt wird, $d_2\,e_2$ Epicycloide, die der Punkt e_2 beschreibt, wenn der Kreis $\frac{1}{2}$ K von a bis a_2 gerollt wird. a c, $a_2\,c_2$ identisch mit $a_1\,c_1$; a e, $d_1\,e_1$ identisch mit $d_2\,e_2$. Die Dicke jedes Zahnes, gemessen auf den Theilrissen, beträgt etwas weniger als die Hälfte einer Theilung. Dass diese Verzahnung richtig ist, ergibt sich aus der vorhergehenden Theorie.

Zunächst ist klar nach obiger Theorie, dass die Form a c auf a b einwirkend, eine richtige Bewegung gibt, dass also der Zahn Z den Zahn z von a bis d_1 richtig bewegt. Allein ganz auf die gleiche

Weise, wie früher bewiesen wurde, dass a c auf a b richtig von a bis d_1 einwirkt, kann man auch beweisen, dass die mit $\frac{1}{2}$ K beschriebene Epicycloide a e auf den geradlinigen Einschnitt a *f* richtig von a bis a_2 einwirkt, dass also umgekehrt auch f_2 a_2, auf e_2 d_2 einwirkend, die richtige Bewegung des Zahnes z_2 bis z hervorbringt. Die vollständige Einwirkung zweier Zähne geschieht nun wie folgt. Zwei Zähne z_2 Z_2 treten eine Theilung vor der Centrallinie o O in e_2 in Berührung. Von da an wirkt das geradlinige Stückchen e_2 a_2 auf e_2 d_2 ein bis die Zähne die Position z Z erreichen. Bei dieser Bewegung ist der Berührungspunkt auf den Zahn Z_2 von e_2 bis a_2 hinausgerückt, dagegen auf den Zahn z_2 von e_2 bis d_2 hineingerückt. Von Z z an bis Z_1 z_1 wirkt dann die Epicycloide a c auf den geraden Einschnitt a b ein, und dabei gleitet der Berührungspunkt von a nach c hinaus, dagegen von d_1 bis c_1 hinein.

Wollte man die Verzahnung so construiren, dass sich die beiden Zähne durch einen beliebigen Bogen α vor und durch einen beliebigen Bogen β nach der Centrallinie richtig zu bewegen vermöchten, so hätte man weiter nichts zu thun, als die Construktion, Fig. 1, Tafel XVII., dahin abzuändern, dass man a c_1 und a e_2 nicht gleich einer Theilung macht, sondern $\widehat{ac_1} = \alpha$ und $\widehat{ae_2} = \beta$. Damit überhaupt eine continuirliche Bewegung stattfinden kann, ist eigentlich in geometrischer Hinsicht nur nothwendig, dass $\alpha + \beta$ wenigstens gleich einer ganzen Zahntheilung ist, denn die Dauer der Einwirkung zweier Zähne wird durch $\alpha + \beta$ bestimmt, und diese Dauer muss wenigstens gleich sein einer Theilung.

Um den praktischen Werth dieser Verzahnung richtig zu beurtheilen, müssen wir wiederum die Abnützung betrachten.

Auch hier ist, wie bei der Triebstockverzahnung, der Druck der Zähne gegen einander nicht constant, sondern um so grösser, je entfernter sie von der mittleren Position z Z sind. Daraus geht hervor, dass sich die Zähne in der Nähe der Theilrisse nur wenig abnützen werden, demnach allmälig die Form annehmen, welche Fig. 2, Tafel XVII. zeigt, in welcher *f* a c die ursprünglich richtige Form, *f* g a h die durch Abnütung entstehende Form darstellt. Allein diese Deformirung der Zahnformen beträgt bei dieser Verzahnung bei weitem nicht so viel, als bei der Verzahnung mit Triebstöcken, indem bei ersterer eine ebene Fläche mit einer schwach gekrümmten Form in Berührung kommt, was zur Folge hat, dass die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung zwischen zwei Zähnen kleiner ausfällt, als bei Triebstockverzahnungen.

Die zweite Verzahnung mit Epicycloide und geradlinigem Einschnitte ist also für die Ausführung zu empfehlen, und wird auch thatsächlich vorherrschend angewendet.

Dritte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden.

Es seien, Fig. 3, Tafel XVII., $K\,k$ die Theilkreise der Räder, $K_1\,k_1$ zwei andere Kreise von ganz beliebigen Halbmessern. Alle vier Kreise berühren sich in a, ihre Mittelpunkte liegen daher in der Verbindungslinie $C\,c$. Machen wir $\widehat{ac_1} = \widehat{ae_2} =$ einer Zahntheilung, und rollen den Kreis k_1 auf K und in k, ferner den Kreis k_1 auf k und in K, so beschreibt der Punkt c_1 (beim Rollen auf K) die Epicycloide $c_1\,a_1$ und (beim Rollen in k) die Hipocycloide $c_1\,d_1$ und dann beschreibt ferner der Punkt e_2 (beim Rollen auf k) die Epicycloide $e_2\,d_2$ und (beim Rollen in K) die Hypocycloide $e_2\,a_2$.

Offenbar ist $\widehat{ac_1} = \widehat{ad_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{aa_2} = \widehat{ad_2}$, berühren sich die Bogen $c_1\,d_1$ $c_1\,a_1$ in e_1 und die Bogen $a_2\,c_2$ $e_2\,d_2$ in e_2, denn die Sehne $\overline{c_1 a}$ ist sowohl die Normale zu dem Punkte c_1 der Hypo- wie der Epicycloide und die Sehne $a\,e_2$ ist die Normale zu dem Punkte e_2 der Hypo- wie Epicycloide. Vervollständigt man die Zeichnung durch Wiederholung der Formen, so entsteht die in Fig. 3, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass dieselbe die richtigen geometrischen Eigenschaften besitzt. Denn nicht nur für die in der Zeichnung dargestellte Position der Zähne, sondern auch für jede andere ist es wahr, dass $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{ad_2}$.

Die ganze Wirkung zweier Zähne während der Dauer ihres Eingriffs ist nun folgende. Von Z_2 bis Z wirkt die Hypocycloide $\overline{a_2\,e_2}$ auf die Epicycloide $e_2\,d_2$ ein; von z bis z_1 hingegen wirkt die Epicycloide $a\,c$ auf die Hypocycloide $a\,b$.

In Betreff der Abnützung ist diese Verzahnung ungefähr so gut wie die vorhergehende.

Will man die Construktion so anordnen, dass sich die Zähne nicht durch zwei Theilungen, sondern durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie bewegen können, so hat man nur die Construktion in der Weise durchzuführen, dass man $a\,c_1 = \beta$ $\widehat{ae_2} = \alpha$ macht und im Uebrigen verfährt, wie früher angegeben wurde.

Vierte Verzahnung mit Kreisevolventen.

Man erhält auch eine richtige Verzahnung, wenn man die Zähne nach den Evolventen zweier Kreise abrundet, deren Halbmesser sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder verhalten.

Hiervon überzeugt man sich vermittelst Fig. 4, Tafel XVII., auf folgende Weise. In dieser Figur sind K k zwei Kreise, deren Halbmesser sich verkehrt verhalten wie die Winkelgeschwindigkeiten, c C die Verbindungslinie der Mittelpunkte, T t die den beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente. Werden die beiden Kreise mit Zahnformen versehen, die mit den Kreisevolventen übereinstimmen, welche sich ergeben, wenn man die beiden Kreise K und k nach entgegengesetzter Richtung abwickelt, und werden hierauf die Zähne in Berührung gebracht, so fällt der Berührungspunkt stets in die gemeinschaftliche Tangente T t. Denn zieht man durch den Berührungspunkt der Evolventen die Normallinien, so müssen diese in eine gerade Linie fallen und jede derselben muss einen der beiden Kreise berühren; dies ist aber nur dann möglich, wenn der Berührungspunkt in einen Punkt der Geraden T t fällt.

Sind also e b, e_1 b_1 zwei auf einander folgende Positionen eines Zahnes von k, *f* g, f_1 g_1 die correspondirenden Positionen des Zahnes von K, so sind d und d_1 die Berührungspunkte der Zähne. Nun sind b b_1 und *f* f_1 die Wege, um welche die Zähne gleichzeitig vorrücken und diese sind gleich gross, denn es ist sowohl b b_1 als auch *f* f_1 gleich d d_1.

Die Bewegung der Kreise erfolgt also durch die Einwirkung der Zähne so, dass ein Punkt in der Peripherie von K einen eben so grossen Weg zurücklegt, als ein Punkt in der Peripherie von k oder die Peripheriegeschwindigkeiten der Kreise K und k sind gleich gross, und daher entsteht in der That eine Bewegung, bei der sich die Winkelgeschwindigkeiten verkehrt wie die Halbmesser K k verhalten. Oder die Bewegung erfolgt so, wie wenn die Kreise K k sich berührten und auf einander rollten.

Fig. 5, Tafel XVII. stellt eine Evolventenverzahnung vor, bei welcher sich je zwei Zähne durch zwei Theilungen bewegen.

Es ist t a = a b = einer Theilung; die Evolventenbögen der Zähne z z_1 z_2 .. entsprechen also der Abwicklung eines Bogens von k gleich der Länge von zwei Theilungen. Die Evolventenbögen der Zähne Z Z_1 Z_2 dagegen entsprechen der Abwicklung einer Bogenlänge des Kreises K gleich der Länge T t. Erfolgt die Bewegung nach den Richtungen der Pfeile, so treten zwei Zähne in Berührung, wenn sie die Positionen Z und z erreicht haben, und verlassen sich wiederum, wenn sie nach Z_2 und z_2 gekommen sind. Die Zwischenposition Z_1 z_1 ist diejenige, wobei der Berührungspunkt in den Durchschnittspunkt a der Linie C c und T t fällt. Dieser Punkt a theilt die Linie C c im Verhältniss der Halbmesser der Kreise K und k.

Damit die Einwirkung zweier Zähne genau durch zwei Theilungen stattfindet, müssen die Halbmesser der Kreise k und K ganz bestimmte Längen haben, die auf folgende Weise gefunden werden können.

Man verzeichnet einen Theilungswinkel x c y der Verzahnung des Kreises k, beschreibt mit einem willkürlichen Halbmesser c u = c v einen Bogen, zieht an u die Tangente u s und schneidet auf derselben von u an ein gerades Stück u w ab so lange als der Bogen u v. Nun zieht man c w, verlängert diese Linie, trägt von c aus die Entfernung c C der Axen auf, theilt diese Linie in dem Punkt a im umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen, fällt von a aus auf c y den Perpendikel a t, verlängert denselben nach rückwärts, und fällt endlich von C aus den Perpendikel C T, dann sind c t = k und C T = K die Halbmesser der Kreise, von welchen die Evolventen gebildet werden müssen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erkennt man durch Vergleichung der Figuren 5 und 6, Tafel XVII., denn es ist Figur 5 die fertige, Figur 6 dagegen die im Entstehen befindliche Construktion.

Da der Winkel x c a jederzeit sehr klein ist und gegen a c t vernachlässigt werden kann, so findet man auch die Halbmesser k und K mit hinreichender Genauigkeit durch folgende einfache Construktion. Man ziehe die Centrumlinie C c, Fig. 7, theile dieselbe bei a im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten der Räder, zeichne den Winkel $C\,c\,y_1$ gleich einem Theilungswinkel einer Zahntheilung von k, fälle von a auf $c\,y_1$ den Perpendikel $a\,t_1$, verlängere denselben nach rückwärts und fälle von C aus den Perpendikel $C\,T_1$, so ist annähernd $C\,T_1 = K$, $c\,t_1 = k$; setzt man mit diesen etwas unrichtigen Halbmessern die Construktion fort, so erhält man schliesslich eine geometrisch vollkommen richtige Verzahnung, bei welcher aber die Einwirkung zweier Zähne nicht genau durch zwei Theilungen erfolgt, sondern nur annähernd, was durchaus keine praktischen Nachtheile hat.

Wollte man die Construktion so einrichten, dass sich zwei Zähne durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie zu bewegen im Stande wären, so müsste man die Construktion, welche für die Einwirkung durch zwei Theilungen beschrieben wurde, wiederholen, dabei aber $a\,t = \alpha$ und $\widehat{x\,c\,t}$ gleich dem Winkel machen, der dem Bogen α entspricht, dann aber muss ferner die Zahnlänge von z_2 dadurch bestimmt werden, indem man $ab = \beta$ macht.

Diese Evolventenverzahnung hat folgende praktisch wichtige Eigenschaften.

1) Alle Räder, die mit Evolventenzähnen versehen sind und gleiche Theilung haben, können einander richtig bewegen. Die Richtigkeit dieses Satzes wird man leicht erkennen, wenn man bedenkt, dass die Form eines Evolventenzahnes nur allein von dem Kreis abhängt, durch dessen Abwicklung die Evolvente gebildet wird. Den epicycloidischen Zähnen kommt diese Eigenschaft nicht zu, denn die epicycloidische Form eines Zahnes hängt nicht nur von der Grösse des Theilrisses des Rades, sondern auch von dem Theilriss des Getriebes ab. Wenn also ein Stirnrad mehrere Getriebe von ungleicher Grösse bewegen soll, so kann dies mit Evolventenzähnen, nicht aber mit epicycloidischen Zähnen bewerkstelligt werden.

2) Die Entfernung der Axen der Räder kann unbeschadet des richtigen Zahneingriffes innerhalb gewisser Grenzen verändert werden, nur wird durch eine solche Veränderung der Axendistanz die Dauer des Eingriffs verändert. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus dem Seite 320 geführten Beweis, welcher von der Entfernung der Axen nicht abhängt. Diese Eigenschaft ist von praktischem Werth, weil dadurch die Aufstellung des Räderwerkes erleichtert wird, indem eine kleine Aenderung in der Axendistanz keine fehlerhafte Bewegung verursacht. Räder, die mit epicycloidischen Zähnen versehen sind, müssen dagegen äusserst genau in der Weise aufgestellt werden, dass sich die Theilrisse berühren, indem nur bei einer solchen Gegeneinanderstellung der Räder eine richtige Bewegung eintreten kann.

3) Evolventenzähne werden durch Abnützung nur äusserst wenig deformirt. Diese praktisch wichtige Eigenschaft beruht darauf, dass bei einer Evolventenverzahnung die wechselseitige Pressung zwischen den im Eingriff befindlichen Zähnen während der ganzen Dauer des Eingriffs stets den gleichen Werth hat, indem die Richtung dieser Pressung stets in die Tangente Tt fällt, folglich ihr numerischer Werth gleich $\frac{M}{R}$ ist, wobei M das statische Moment der Kraft bezeichnet, welche die Axe C treibt und R den Halbmesser des Kreises K ausdrückt. Wegen dieses constanten Druckes ist die Form, welche durch Abnützung entsteht, eine äquidistante Linie, zur ursprünglichen Form daher von dieser letzteren nur äusserst wenig und in allen Punkten um gleich wenig abweichend.

4) Alle Evolventenzähne sind geometrisch ähnliche Formen und können deshalb am leichtesten durch Maschinen richtig geschnitten werden. Diese Eigenschaft wird einstens von sehr grosser praktischer Wichtigkeit werden, wenn man einmal ernstlich die Aufgabe in Angriff nehmen wird, Räderschneidemaschinen herzustellen, die unfehlbar richtige Zahnformen liefern.

Ausser diesen vier Eigenschaften besitzen die Evolventenzähne noch mehrere andere, die ebenfalls von Werth sind, deren Richtigkeit jedoch nicht so leicht nachgewiesen werden kann. Ungünstige Eigenschaften sind nicht bekannt; die Evolventenverzahnung verdient daher für die Ausführung bestens empfohlen zu werden.

Fünfte Verzahnung. Allgemeine Methode.

Wenn die Zahnform des einen Rades beliebig angenommen wird, kann man immer eine entsprechende Zahnform für das zweite Rad ausfindig machen, und zwar auf folgende Weise.

Es seien, Fig. 1, Tafel XVIII., C c die Mittelpunkte der Räder, K und k ihre Theilkreise, a der Berührungspunkt derselben, $a\,m\,p$ ein im Rade k angebrachter krummliniger Einschnitt von irgend einer Form. Nimmt man in $a\,p$ einen beliebigen Punkt m an, verzeichnet die zum Punkt m der Kurve $a\,p$ gehörige Normale $m\,n$, schneidet auf K von a an ein Bogenstück $a\,n_1$ gleich dem Bogen $a\,n$ ab, zieht durch n_1 eine gerade Linie, welche den Kreis K unter einem Winkel schneidet, der gleich ist dem Winkel, unter welchem der Kreis k durch die Normale $m\,n$ geschnitten wird, und macht endlich $\overline{m_1\,n_1} = \overline{m\,n}$, so ist m_1 ein Punkt der Kurve $a\,m_1\,p_1$, nach welcher der Zahn des Rades K geformt werden muss, um auf die Höhlung $a\,m\,p$ richtig einwirken zu können. Wiederholt man die so eben beschriebene Construktion, indem man in der Kurve $a\,m\,p$ mehrere Punkte annimmt, so erhält man eine Reihenfolge von Punkten der Kurve $a\,m_1\,p_1$.

Die Richtigkeit dieser Construktion erkennt man auf folgende Weise. Denken wir uns, dass die Räder K k um ihre Axen gedreht werden, bis n und n_1 in a zusammen fallen, so werden auch die Linien $m\,n$ und $m_1\,n_1$ zusammen fallen, denn diese Linien sind gleich lang und die Winkel, unter welchen sie die Kreise k und K durchschneiden, sind gleich gross gemacht worden.

Allein wenn die Linien $m\,n$ und $m_1\,n_1$ zusammenfallen, berühren sich die Kurven in den Punkten m und m_1, d. h. die beiden Zähne befinden sich in einer Position ihrer Wechselwirkung. Nun ist aber $\widehat{a\,n} = \widehat{a\,n_1}$ und folglich haben die verzeichneten Zähne die Eigenschaft, dass sie aus einer richtigen Position ihrer Wechselwirkung wiederum in eine richtige Position gelangen, wenn man die Theilrisse beider Räder um gleich viel fortbewegt, was eben die charakteristische Eigenschaft der wahren Zahnkurven ist.

Man kann auch die Construktion umkehren, indem man von dem convexen Zahn $a\,m_1\,p_1$ ausgeht und die concave Form $a\,m\,p$ sucht, allein dann findet man nicht für jede beliebig angenommene Convexität eine correspondirende Concavität, sondern nur dann, wenn die Convexität so stark gekrümmt ist, dass alle Normalen $m_1\,n_1$ den Kreis K durchschneiden. Nimmt man für $a\,m_1\,p_1$ einen Bogen der Evolvente des Kreises K und zieht sämmtliche Normalen, so berühren dieselben den Kreis K. Diese Kreisevolvente ist daher in dieser Hinsicht eine Grenzform, die bestimmt, wie stark gekrümmt eine Convexität genommen werden muss, damit eine entsprechende Concavität gefunden werden kann.

Abrundung der Zähne nach Kreisbögen.

Zu jeder ganz exakten Verzahnungsart kann man eine Annäherungsconstruktion mit Kreisbögen auffinden, und es gibt eine allgemeine Methode, vermittelst welcher die absolut besten Abrundungshalbmesser gefunden werden können.

Ist nämlich eine mathematisch richtige Zahnkurve und sucht man den wahren mittleren Werth des Krümmungshalbmessers, der der ganzen Zahnkrümmung entspricht, so ist dies der absolut beste Abrundungshalbmesser, wenn man kreisbogenförmige Zähne statt der exakten Form Z machen will. Wir wollen dieses Verfahren anwenden, um für die zweite Verzahnung mit geradlinigen Einschnitten und mit Epicycloiden die beste Kreisbogenverzahnung zu finden. Hierzu ist aber nothwendig, dass wir zuerst die Gleichungen einer Epicycloide aufstellen.

Es sei $\widehat{a\,m}$, Fig. 2, Tafel XVIII., der epicycloidische Bogen, welchen der Punkt m des Kreises k beschrieben hat, während derselbe von a bis b auf dem Kreis K fortgerollt ist.

Nehmen wir $C\,a\,x$ als Abscissenaxe und nennen:

A den Halbmesser des Kreises K, a den Halbmesser des Kreises k, $C\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines Punktes m der Epicycloide. $\frac{A}{a} = i$, $\widehat{a\,C\,b} = \psi$, so findet man leicht für x und y nachstehenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} x &= (A + a) \cos \psi - a \cos (i + 1)\, \psi \\ y &= (A + a) \sin \psi - a \sin (i + 1)\, \psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Hieraus findet man für den wahren Werth des Krümmungshalbmessers, der dem Punkt m der Epicycloide entspricht, folgenden Ausdruck:

$$\varrho = 4\,a\,\frac{i+1}{i+2}\sin\frac{1}{2}\,i\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man findet diesen Ausdruck auch ohne Mühe, wenn man das früher erklärte Verfahren zur Verzeichnung einer Epicycloide beachtet.

Bezeichnet man nun durch ϱ_m den wahren *mittleren* Krümmungshalbmesser, welcher dem Epicycloidenbogen entspricht, der durch Wälzung des Kreises k auf einem Bogen des Kreises K entsteht, der einem Centralwinkel α entspricht, so hat man nach dem Begriff von dem mittleren Werth einer Grösse

$$\varrho_m = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varrho\, d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Führt man den Werth von ϱ aus (2) ein, so folgt

$$\varrho_m = 4\,\frac{a}{\alpha}\,\frac{i+1}{i+2}\int_0^\alpha \sin\frac{1}{2}\,i\,\psi\, d\psi$$

Das Resultat dieser Integration gibt

$$\varrho_m = 8\,\frac{a}{\alpha}\,\frac{i+1}{i\,(i+2)}\left[1-\cos\frac{1}{2}\,i\,\alpha\right]$$

oder auch, weil $1-\cos\frac{1}{2}\,i\,\alpha = 2\sin^2\frac{1}{4}\,i\,\alpha$ ist:

$$\varrho_m = 16\,\frac{a}{\alpha}\,\frac{i+1}{i\,(i+2)}\sin^2\frac{1}{4}\,i\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Allein bei allen Verzahnungen ist $\frac{i\,\alpha}{4}$ eine kleine Grösse, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn man annähernd

$$\sin\frac{1}{4}\,i\,\alpha = \frac{1}{4}\,i\,\alpha,\quad \sin^2\frac{1}{4}\,i\,\alpha = \frac{1}{16}\,i^2\alpha^2$$

setzt, und dann findet man:

$$\varrho_m = a\,i\,\alpha\left(\frac{i+1}{i+2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wenden wir dieses Ergebniss auf eine Verzahnung an mit geradlinigen Einschnitten und mit Epicycloiden.

Es seien R und r die Halbmesser der Theilrisse der Räder, t eine Zahntheilung, $\frac{R}{r} = n$, und nehmen wir eine Construktion an, bei welcher sich je zwei Zähne um eine Theilung vor und um eine Theilung nach der Centrallinie bewegen, so ist in diesem Fall zu setzen für die Zähne des Rades R:

$$i = \frac{R}{\frac{1}{2} r} = 2 n, \quad a i \alpha = t$$

Demnach folgt aus (5):

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right) = t \frac{2 n + 1}{2 n + 2}$$

Dagegen ist für die Zähne des Rades r zu setzen:

$$i = \frac{r}{\frac{1}{2} R} = \frac{2}{n}, \quad a i \alpha = t$$

und wir erhalten:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right) = t \frac{2 + n}{2 + 2 n}$$

Dies sind die in den Resultaten Seite 10 angegebenen Regeln für die Bestimmung der Kreisbogen-Verzahnung.

Hat man den Abrundungshalbmesser nach dieser Regel berechnet, so ergibt sich dann die Verzeichnung in ähnlicher Weise, wie bei der zweiten Verzahnungsart. Man verzeichnet, Fig. 3, Tafel XVIII., die vier Kreise K k, $\frac{1}{2}$ K, $\frac{1}{2}$ k, macht $\widehat{a c_1} = \widehat{a a_1} = \widehat{a e_2} = \widehat{a d_2} =$ einer Theilung. Beschreibt man nun mit einer Zirkelöffnung gleich $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ aus den Punkten a_1 und c_1 als Mittelpunkt Kreisbogen und sucht ihren Durchschnittspunkt, so ist dieser der Einsatzpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ die Rundung a_1 c_1 zu verzeichnen ist.

Beschreibt man ferner mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ aus e_2 und d_2 Kreisbogen, so ist der Durchschnittspunkt derselben, der Einsatzpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ die Abrundung e_2 d_2 gezogen werden muss. Die Einsatzpunkte für alle anderen Abrundungen ergeben sich, indem man durch den Einsatzpunkt für a_1 c_1

einen zu K und durch den Einsatzpunkt für c_2 d_2 einen zu k concentrischen Kreis zieht, sodann aus den Punkten a_1 a a_2 . . . mit einer Zirkelöffnung $\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ R\end{smallmatrix}\right)$ und aus den Punkten d_2 a d_1 . . . mit einer Zirkelöffnung $\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ r\end{smallmatrix}\right)$ in diese Kreise einschneidet. Die geradlinigen Einschnitte zieht man tangirend an die Kreisbogen und die Kreise, in welchen die Punkte b b_1 b_2, so wie f f_1 f_2 . . . . liegen, ergeben sich durch die Zahnlängen.

Verzahnung der Kegelräder.

Es seien, Fig. 4, Tafel XVIII., S C O und s c O die beiden Axen, die durch Kegelräder in Verbindung gesetzt werden sollen, O ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Denken wir uns von dem Punkt O aus eine Linie O x so gezogen, dass die von einem beliebigen Punkt A dieser Linie auf die Axen O S und O s gefällten Perpendikel A C und A c sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten, mit welchen sich die Axen drehen sollen, und errichten wir ferner in A auf O x und in der Ebene der Axen eine Senkrechte, welche die Axen in S und s schneidet, so entstehen zwei Doppeldreiecke S C A, C A O und A s c, A O c. Werden diese Doppeldreiecke um die Axen O S und O s herumgedreht, so entstehen zwei Doppelkegel E, G und e, g. Wir nennen die Kegel G, g, die sich längs der Linie A O berühren, Grundkegel, dagegen die Kegel E, e, die längs der Linie S A s eine gemeinschaftliche tangirende Ebene haben, Ergänzungskegel.

Werden die Grundkegel gegeneinander gepresst, und wird hierauf einer derselben um seine Axe gedreht, so entsteht auch in dem andern Kegel durch die an der Linie O A statt findende Reibung eine drehende Bewegung, und es ist leicht zu erkennen, dass sich dabei die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen O S und O s verkehrt wie die Halbmesser A C und A c verhalten werden. Versieht man aber die beiden Kegel G und g mit passend geformten Zähnen, so kann durch das Aufeinanderwirken derselben eine Bewegungsmittheilung hervorgebracht werden, die ganz identisch ist mit derjenigen, die durch das Aufeinanderrollen der Grundkegel entsteht. Die mathematisch genaue Form dieser Zähne ist eine äusserst complizirte; eine für praktische Zwecke hinreichend genaue Verzahnung ergibt sich auf folgende Weise.

Der Eingriff der Zähne findet nur in der Nähe der Linie S A s statt. Sieht man den Kegel nach der Richtung x O an und richtet seine Aufmerksamkeit nur auf das, was in der Nähe der Linie s A s vorgeht, wenn beim Drehen der Räder die Zähne aufeinander wirken, so wird man eine Erscheinung vor Augen haben, wie wenn zwei Stirnräder, deren Halbmesser gleich sind den Seiten S A und s A der Ergänzungskegel auf einander einwirkten. Dieser Schein wäre eine volle Wahrheit, wenn die Dauer des Eingriffs der Zähne unendlich klein wäre, er ist aber nur eine Annäherung, weil diese Dauer des Eingriffs eine endliche ist. Allein weil in der Anwendung die Eingriffsdauer jederzeit nur klein ist, so können wir als praktische Regel aufstellen, dass die Form der Kegelräderzähne gefunden wird, wenn man eine Stirnräderverzahnung verzeichnet für Räder, deren Halbmesser gleich sind den Seiten der Ergänzungskegel. Dabei kann man je nach Belieben oder je nach Umständen eine oder die andere von den Verzahnungsarten wählen, deren Construktion früher angegeben wurde.

Allgemeine Methode zur Bestimmung von Bahnflächen.

Es gibt zwei ganz allgemeine Methoden, nach welchen geometrisch richtige Verzahnungen nicht nur für Stirn- und Kegelräder, sondern auch für solche Räder bestimmt werden können, deren Axen sich nicht schneiden und ganz beliebig gerichtet sind. Diese Methoden sollen nun erklärt werden.

Man denke sich zwei Axen c und c_1, die einen beliebigen Winkel bilden, sich aber nicht schneiden, versehe eine dieser Axen, z. B. die Axe c, mit einer Zahnfläche F von ganz beliebiger Form und verbinde mit der andern Axe c_1 ein rechtwinkliges Coordinatensystem $O x_1$, $O y_1$ $O z_1$ in der Weise, dass die Axe der z_1 mit der Axe c_1 zusammenfällt. Dreht man nun die Axen c und c_1, so dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten einen constanten vorgeschriebenen Werth hat, so wird die Zahnfläche F um die Axe c und wird das Coordinatensystem um die Axe c_1 herumbewegt, und die Zahnfläche F wird gegen das Coordinatensystem in jedem Augenblick der Bewegung eine gewisse relative Position haben. Denkt man sich nun die Fläche F_1, welche die Gesammtheit der relativen Positionen der Fläche F gegen das Coordinatensystem umhüllt, so ist dies die Einhüllungsfläche, welche durch die relative Bewegung des Zahnes F gegen das Coordinatensystem $O x_1$ y_1 z_1 beschrieben wird, und diese Einhüllungsfläche F_1 ist offenbar nichts anderes als die dem Zahn F entsprechende Zahnform, mit welcher die Axe c_1 versehen werden muss, damit durch das Aufeinanderwirken der

Zähne F und F_1 die vorgeschriebene Bewegung hervorgebracht werden kann. Auf diesem Verfahren beruhen einige der früher erklärten speziellen Verzahnungen, namentlich die erste, die zweite und die fünfte. Bei der ersten Verzahnungsart ist die mit der einen Axe verbundene Zahnfläche ein dünner Stift, und die Zahnfläche F_1 ist die Einhüllungsfläche, welche dieser Stift gegen das zweite Rad beschreibt, wenn beide Axen richtig bewegt werden. Bei der zweiten Verzahnung ist die mit der einen Axe verbundene Zahnform F ein gerader radialer Einschnitt, und ist die Einhüllungsfläche F_1, welche der Einschnitt relativ gegen das zweite Rad beschreibt, eine epicycloidische Fläche.

Bei der fünften Verzahnung ist F ein beliebig krummliniger Einschnitt und ist F_1 die Einhüllungsfläche, welche F gegen die zweite Axe beschreibt.

Auch die Evolventenverzahnung entsteht nach der zweiten der beiden Methoden. Die Evolventenzähne sind nämlich die einhüllenden Flächen, welche durch die relative Bewegung einer Ebene gegen die beiden Räder entstehen, wenn diese Ebene in einer auf die gemeinschaftliche Tangente T t, Fig. 5, Tafel XVII., stets senkrechten Stellung längs dieser Tangente mit einer Geschwindigkeit fortschreitet, welche gleich ist der Umfangsgeschwindigkeit von k und K. Diese Bildung der Evolventenzähne gibt eine Andeutung zur Construktion einer Evolventenzahn-Räderschneidmaschine. Es ist eine Rundstanzmaschine, bei welcher der Meisel nicht nur auf- und niedergeht, sondern gleichzeitig nach gerader Linie (nach der Linie T t, Fig. 5, Tafel XVII.) fortschreitet, bei jedem Vorrücken des Meisels aber auch das Rad um einen angemessenen Winkel gedreht wird. Für Stirnräder lässt sich diese Idee sehr leicht und sehr solide realisiren, für Kegelräder wird aber diese Maschine so complizirt, dass eine sichere Wirkung kaum erwartet werden dürfte.

Ein zweites ganz allgemeines Verfahren zur Bildung von Zahnflächen besteht in Folgendem:

Man denke sich mit jeder der beiden Axen C und C_1 ein Coordinatensystem verbunden und zwar so, dass die Axe O z des Coordinatensystems O x y z mit C und dass die Axe O_1 z_1 des Coordinatensystems O_1 x_1 y_1 z_1 mit C_1 zusammenfällt.

Man denke sich, dass diese Axen mit dem Coordinatensystem nach dem vorgeschriebenen Gesetz bewegt werden und bewege ferner gleichzeitig eine beliebige Fläche M nach irgend einem Gesetz im Raum fort, so wird M gegen O x y z wie gegen O_1 x_1 y_1 z_1 einhüllende Flächen beschreiben, und diese sind geometrisch richtige Zahnflächen für beide Axen. Da sowohl die Gestalt der Fläche M als auch das Gesetz ihrer Bewegung ganz willkürlich genommen werden können, so sieht man, dass sich unendlich viele Paare von richtigen Zahnformen finden lassen.

Alle diese möglichen Zahnformen lassen sich in zwei Klassen theilen, nämlich: 1) Verzahnungen, bei welchen sich die Zähne in jeder Position der Axen längs einer geraden oder krummen Linie berühren, und 2) Verzahnungen, bei welchen sich die Zähne in jedem Augenblick ihres Aufeinanderwirkens nur in einem Punkt berühren. Wir heissen diese Verzahnungsarten die erstere Kraftverzahnung, die letztere Bewegungsverzahnung, weil jene Verzahnungsart zur Transmittirung starker Kräfte, letztere aber nur zur Uebertragung schwacher Kräfte gebraucht werden darf. Bei der Kraftverzahnung kommt die ganze Fläche jedes Zahnes in Wirksamkeit, bei der Bewegungsverzahnung jedoch kommen nur die in einer gewissen geraden oder krummen Linie liegenden Punkte der Zahnfläche in Wirksamkeit. Bei der Kraftverzahnung schleifen die Zähne aufeinander und nützen sich ab. Bei der Bewegungsverzahnung rollen die Zähne aufeinander und drehen sich gleichzeitig in jedem Augenblick um eine Axe, deren Richtung in die Normale fällt, welche durch den Berührungspunkt der Zahnflächen geht. Diese Bewegungsverzahnungen verursachen also, theoretisch gesprochen, d. h. wenn man von der Elastizität des Materials abstrahirt, keinen Reibungswiderstand.

Dieses zweite allgemeine Verfahren zur Auffindung von Zahnformen ist von grosser praktischer Wichtigkeit, weil durch dasselbe der Weg vorgezeichnet ist, welchen man zu verfolgen hat, um Maschinen zum Schneiden von richtigen Zahnformen zu construiren. Befestiget man mit der Axe einer Drehbank einen Radkörper K, dreht die Axe mit dem Rade gleichförmig herum, nimmt ferner irgend ein passend geformtes Werkzeug M und bewegt dieses gleichzeitig in einer bestimmten Weise, so wird M sich in das Material des Rades K nach der Einhüllungsfläche F einwühlen. Befestigt man hierauf mit der Axe der Drehbank den Körper K_1 des zweiten Rades und lässt auf demselben ein Werkzeug M_1 einwirken, das sich zu M wie eine Schraubenmutter zur Spindel verhält, so wühlt sich auch dieses Werkzeug nach der Einhüllungsfläche F_1 in den Radkörper K_1 ein, und diese beiden Flächen F und F_1 sind richtige Zahnflächen.

Auch die erstere der beiden allgemeinen Methoden kann zum Räderschneiden gebraucht werden und wird auch in der That schon längst angewendet und zwar zum Schneiden von genauen Rädern für endlose Schrauben. Bildet man zwei identische Schraubenspindeln E und S, die eine E aber aus Eisen, die andere S aus Gussstahl, macht sodann in s Schärfen und Einschnitte, ähnlich wie bei den Schraubenbohrern, nimmt man nun den Körper des Rades K, legt und drückt das Stahlwerkzeug s an dasselbe und bewegt K und s so, wie wenn die Schraube das Rad richtig bewegte, so wühlt sich s in den Körper des Rades nach einer Einhüllungsfläche ein; es entsteht am ganzen Umfang des Radkörpers ein Kranz von Vertiefungen und Erhöhungen und wenn man zuletzt das Stahlwerkzeug beseitigt und dafür die Eisenschraube E in den Eingriff bringt, so bewirkt die Drehung derselben die richtige Bewegung des Rades.

Herstellung der Räderzähne.

Was die Herstellung der Räderzähne anbetrifft, so müssen wir theils die Grösse, theils das Material berücksichtigen. In dieser Hinsicht haben wir folgende Räder zu unterscheiden:

1) kleine Räder von Messing oder Rothguss,
2) kleine Räder von Gusseisen,
3) kleine Räder von Schmiedeeisen,
4) grössere Räder von Gusseisen mit angegossenen Zähnen,
5) grössere Räder von Gusseisen mit eingesetzten hölzernen Zähnen.

Die Zähne dieser Räder werden gewöhnlich auf folgende Weise ausgeführt:

Räder aus Messing oder Rothguss werden massiv gegossen und abgedreht. In diese Radkörper werden die Zähne entweder mit einem Meisel, der die Form der Zahnlücke hat, ausgehobelt, oder mit einer rotirenden Fraise, deren Randquerschnitt mit der Form der Lücke übereinstimmt, eingeschnitten. Das erstere Verfahren ist zweckmässig, wenn man nur einzelne Räder anzufertigen hat, das letztere dagegen, wenn eine grosse Anzahl von gleichen Rädern angefertigt werden soll. Der Meisel ist nämlich leicht herzustellen, arbeitet aber langsam, die Fraise dagegen ist sehr kostspielig, arbeitet aber schnell. Statt einer Fraise kann übrigens auch ein rotirender Meissel angewendet werden.

Kleine Räder aus Gusseisen werden mit Modellen aus Messing geformt, und diese Modellräder werden genau so angefertigt, wie im Vorhergehenden beschrieben wurde. Die Modellräder werden nämlich massiv gegossen, abgedreht und mit geschnittenen Zähnen versehen.

Für grössere gusseiserne Räder mit angegossenen Zähnen werden Holzmodelle hergestellt, deren Form mit der des fertigen Rades übereinstimmt. Um die Zähne an diesen Modellen richtig zu formen, werden nach Anleitung der Verzahnungstheorie Lehren aus Blech nach der richtigen Form der Zähne hergestellt. Mit diesen Lehren wird auf jeden Zahnkörper die Form des Zahnes aufgezeichnet oder aufgerissen und darnach die Zähne mit Säge, Raspel und Feile bearbeitet. Bei Anfertigung dieser Lehren können die Zahnformen construirt oder durch Hilfswerkzeuge empirisch gemacht werden. Um eine Epicycloide zu verzeichnen, kann man z. B. zwei Brettchen nach Kreisbogen krumm schneiden, sie dann aufeinanderrollen lassen und durch eine Spitze die Linie, welche ein Punkt des rollenden Kreises beschreibt, auf Blech ritzen lassen. Ist eine Evolvente zu verzeichnen, so kann man ein Brettchen nach dem Grundkreis zuschneiden, am Umfang eine Uhrfeder befestigen, diese sodann um das Brettchen herumwickeln und dabei wieder mit einer an die Feder angebrachten Spitze die Evolvente, welche sie beschreibt, auf Blech ritzen lassen. Ist einmal das Modell hergestellt, so wird es abgeformt und die Form mit geschmolzenem Eisen ausgefüllt.

Grössere gusseiserne Räder mit hölzernen Zähnen werden hergestellt, indem man zuerst den Radkörper in ähnlicher Weise fertigt, wie überhaupt Gegenstände aus Gusseisen, dann in dem Umfang die hölzernen Zahnkörper einsetzt, fest einkeilt und abdreht, worauf endlich die Zahnform vermittelst einer Lehre aufgerissen und ausgearbeitet werden kann.

Bei kleinen Rädern, deren Zähne mit einer Räderschneidmaschine eingeschnitten werden, wird die gleiche Zahntheilung vermittelst einer Theilscheibe hervorgebracht, mit welcher diese Maschinen jederzeit versehen sind.

Bei grossen Rädern dagegen wird die Theilung gewöhnlich vermittelst eines Handzirkels gesucht und angeritzt, was allerdings eine etwas rohe Prozedur genannt werden muss.
