Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Dritter Abschnitt. Berechnung der Widerstände

urn:nbn:de:bsz:31-270970

DRITTER ABSCHNITT.

Berechnung der Widerstände.

A. Reibung, B. Steifheit der Seile und Ketten, C. Wälzungswiderstand.

A. Reibung.

Die empirischen Gesetze, nach welchen sich die Reibungswiderstände richten, sind in den „Prinzipien" in dem Abschnitt, welcher von der Reibung handelt, ausführlich erklärt worden. Die Kenntniss dieser Gesetze kann also hier vorausgesetzt werden, und es soll in diesem Abschnitt nur die Berechnung der Reibungswiderstände, welche die verschiedenen Maschinentheile verursachen, behandelt werden.

Reibung eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers. Ein Körper liege auf einer schiefen Ebene, man soll, mit Berücksichtigung der Reibung, die Kraft bestimmen, welche im Stande ist, den Körper längs der schiefen Ebene hinaufzubewegen.

Es sei Fig. 4, Tafel XIV. Q das Gewicht des Körpers, α die Neigung der schiefen Ebene, P die Kraft, welche den Körper längs der schiefen Ebene hinauf zu bewegen im Stande ist, β der Winkel, den die Richtung der Kraft P mit der schiefen Ebene bildet, f der Reibungscoeffizient.

Dies vorausgesetzt ist $Q \cos \alpha - P \sin \beta$ der Normaldruck des Körpers gegen die schiefe Ebene, demnach $f(Q \cos \alpha - P \sin \beta)$ der daraus entstehende Reibungswiderstand. Ferner sind $P \cos \beta$, $Q \sin \alpha$ die zur schiefen Ebene parallelen Componenten der Kräfte P und Q. Damit nun der Körper längs der schiefen Ebene hinauf bewegt wird, muss $P \cos \beta$ nicht nur $Q \sin \alpha$, sondern auch die Reibung $f(Q \cos \alpha - P \sin \beta)$ zu überwinden im Stande sein. Man hat daher:

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha + f (Q \cos \alpha - P \sin \beta)$$

Hieraus folgt:

$$P = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Will man die Kraft P_1 kennen lernen, welche statt P im Stande ist, das Herabgleiten zu verhindern, so hat man nur in dem Ausdruck (1) P_1 statt P und $-f$ statt f zu setzen. Man findet demnach:

$$P_1 = Q \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wirken die Kräfte P und P_1 nach horizontaler Richtung, so ist $\beta = -\alpha$ und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} P &= Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = Q \frac{\tang \alpha + f}{1 - f \tang \alpha} \\ P_1 &= Q \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = Q \frac{\tang \alpha - f}{1 + f \tang \alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Die Kraft P_1 wird Null, d. h. der Körper gleitet selbst dann nicht herab, wenn er gar nicht gehalten wird, wenn

$$\tang \alpha = f \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Kraft P wird unendlich gross, wenn

$$\tang \alpha = \frac{1}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Kreuzkopf und Linealführung. Der Druck des Kreuzkopfes gegen das Führungslineal ist veränderlich mit der Stellung der Kurbel.

Nennt man Fig. 5, Tafel XIV. P die Kraft, mit welcher der Kolben getrieben wird, r den Halbmesser der Kurbel, α den Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung ihre Richtung mit jener der Kolbenstange bildet, l die Länge der Schubstange, β den veränderlichen Winkel, den ihre Richtung mit jener der Kolbenstange bildet, N die wechselseitige Pressung zwischen dem Kreuzkopf und dem Führungslineal, S den in der Schubstange wirkenden Widerstand, f den Reibungscoeffizienten. Dies vorausgesetzt hat die Kraft P nicht nur den Widerstand $S \cos \beta$, sondern auch die Reibung $N f$ zu überwinden.

Man hat daher:

$$S \cos \beta + f N = P \text{ . . . . } (1)$$

Es ist aber ferner:

$$S \sin \beta = N \text{ . . . . } (2)$$

Hieraus folgt, wenn man S eliminirt und N sucht:

$$N = P \frac{\sin \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \text{ . . . . } (3)$$

Der Reibungswiderstand beträgt also in dem Augenblick, wenn die Schubstange mit der Kolbenrichtung einen Winkel β bildet:

$$N f = P f \frac{\sin \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \text{ . . . . } (4)$$

Dieser Reibungswiderstand ist mit β variabel, suchen wir also den mittleren Werth desselben von $\beta = 0$ bis zu $\beta = \frac{r}{l}$, d. h. für die Bewegung der Kurbel durch nahe einen Quadranten.

Heissen wir diesen mittleren Werth F_m und setzen $\frac{r}{l} = \gamma$, so ist:

$$F_m = \frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma N f \, d \beta$$

oder wenn man für $N f$ seinen Werth aus (4) einführt:

$$F_m = \frac{P f}{\gamma} \int_0^\gamma \frac{\sin \beta \, d \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \text{ . . . . } (5)$$

Das genaue Integrale dieser Gleichung ist ein sehr complizirter Ausdruck; für unsern Zweck genügt eine Annäherung, die wir erhalten, wenn wir bedenken, dass in allen Anordnungen γ eine kleine Grösse ist. Wir setzen daher:

$$\cos \beta = 1, \quad \sin \beta = \beta$$

Dann wird:

$$F_m = \frac{P f}{\gamma} \int_0^\gamma \frac{\beta \, d \beta}{1 + f \beta}$$

Es ist aber:

$$\frac{\beta}{1 + f \beta} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{1}{1 + f \beta} \right)$$

Demnach:

$$F_m = \frac{P}{\gamma} \int_0^\gamma \left(1 - \frac{1}{1 + f\,\beta}\right) d\,\beta$$

Das Integrale ist:

$$F_m = \frac{P}{\gamma} \left[\gamma - \frac{1}{f} \text{ lognat } (1 + f\,\gamma) \right]$$

oder

$$F_m = P \left[1 - \frac{1}{f\,\gamma} \text{ lognat } (1 + f\,\gamma) \right]$$

Weil das Produkt $f\,\gamma$ gegen die Einheit jederzeit sehr klein ist, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man setzt:

$$\text{lognat } (1 + f\,\gamma) = f\,\gamma - \frac{1}{2} f^2\,\gamma^2$$

und dann wird

$$F_m = \frac{1}{2} P\,f\,\gamma = \frac{1}{2} P\,f\,\frac{r}{l} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Nennt man v die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens und e den zur Ueberwindung der Reibung erforderlichen Krafteffekt, so ist $e = v\,F_m$ demnach

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} P\,f\,\frac{r\,v}{l} = P\,v\,\frac{1}{2}\,\frac{r}{l}\,f \\ \frac{e}{P\,v} &= \frac{1}{2}\,\frac{r}{l}\,f \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Dieser Quotient ist das Verhältniss des Effektes, der verloren geht, und des im Kolben wirkenden Effektes. Derselbe drückt also den verhältnissmässigen Effektverlust aus. Bei Lokomotiven ist $\frac{r}{l} = \frac{1}{6}$ $f = \frac{1}{10}$, demnach

$$\frac{e}{P\,v} = \frac{1}{120} = 0{\cdot}008$$

Der Verlust beträgt also in diesem Falle kaum 1 Prozent, wäre also leicht zu verschmerzen, wenn nicht der fatale Umstand wäre, dass durch die Reibung des Kreuzkopfes am Lineal ein Hohlausschleifen desselben entstünde, weil der Druck N am Anfang und

Ende eines Kolbenschubes gleich Null, in der Mitte des Kolbenschubes dagegen $P \frac{r}{l}$ wird.

Es ist noch zu bemerken, dass der Kreuzkopf immer nur gegen das eine der beiden Lineale einen Druck ausübt, so lange die Bewegungsrichtung der Kurbel keine Aenderung erleidet. Beim Vorwärtsfahren drückt der Kreuzkopf gegen das obere Lineal, dies wird also vorzugsweise ausgeschliffen, und muss insbesondere sorgfältig geölt werden, was aber dadurch geschehen sollte, indem man mit dem Kreuzkopf selbst das Oelgefäss verbindet und hin- und herlaufen lässt.

Kolbenreibung. Damit eine Kolbendichtung, ohne unnöthige Reibung zu veranlassen, hinreichend verschliesst, muss dieselbe eine gewisse Höhe haben, und mit einer gewissen Intensität gegen die Wandfläche angepresst werden.

Nennt man D den Durchmesser des Kolbens, $\mathfrak{h}$ die parallel mit der Axe gemessene Höhe der Kolbendichtung, $\mathfrak{p}$ die Intensität der Pressung, d. h. die Kraft, mit welcher jeder Quadratcentimeter der Dichtungsfläche gegen die Wand gepresst ist, f den Reibungscoeffizienten, p die Differenz der Pressungen der Flüssigkeit vor und hinter dem Kolben, auf 1 Quadratcentimeter bezogen, so ist der Betrag der Kolbenreibung:

$$D \pi \mathfrak{h} \mathfrak{p} f$$

Dagegen ist die Kraft, mit welcher der Kolben fortgetrieben wird: $\frac{D^2 \pi}{4} p$. Das Verhältniss des Reibungswiderstandes zur gesammten Kraft, die auf den Kolben wirkt, ist demnach:

$$\frac{D \pi \mathfrak{h} \mathfrak{p} f}{\frac{1}{4} D^2 \pi p} = \frac{4}{D} \frac{\mathfrak{h} \mathfrak{p}}{p} f$$

Es scheint, dass der Quotient $\frac{\mathfrak{h} \mathfrak{p}}{p}$ genau oder nahe einen constanten Werth hat. Unter dieser Voraussetzung ist der verhältnissmässige Kraftverlust, den eine Kolbenreibung verursacht, dem Reibungscoeffizienten direkt und dem Durchmesser des Kolbens verkehrt proportional.

Kleinere Kolben verursachen demnach verhältnissmässig grössere Kraftverluste als grosse, daher in dieser Hinsicht grosse Pumpen und Dampfmaschinen vortheilhafter sind, als kleine. Leider gibt es keine verlässlichen Versuche, durch welche der numerische Werth von $\frac{4\,h\,p}{p} f$ für verschiedene Kolbenanordnungen bestimmt wäre; man ist daher heut zu Tage noch nicht im Stande, eine Kolbenreibung mit Zuverlässigkeit zu berechnen. Indessen ist der aus dieser Unkenntniss entstehende Nachtheil in praktischer Hinsicht doch von keiner Bedeutung, denn was man zu thun hat, um die Kolbenreibung klein zu machen, weiss man ja doch, und diese Reibung wird durch eine genaue Berechnung weder grösser noch kleiner.

Zapfenreibungen.

Umfangsreibung eines continuirlich rotirenden cylindrischen Zapfens. Es sei P der Druck, mit welchem die Umfangsfläche eines Zapfens gegen sein Lager gepresst wird, f der Reibungscoeffizient, v die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens in Metern und in einer Sekunde, d der Durchmesser des Zapfens in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute, so ist: $P f$ die Umfangsreibung und $P f v$ der in Kilogramm-Metern ausgedrückte Effekt der Zapfenreibung. Nun ist $v = \frac{d\,\pi\,.\,n}{100 \times 60}$, daher wird dieser Effekt auch:

$$e = \frac{n\,d\,P\,f}{1910} \text{ Kilogramm-Met. } \dots\dots \quad (1)$$

Der Betrag einer solchen Zapfenreibung ist in der Regel nicht sehr von Belang im Verhältniss zur Kraft, die durch eine Welle übertragen wird. Auch ist die Abnutzung, in so ferne als sie ringsum stattfindet, daher eine Formänderung nicht hervorbringt, von keinem Belang. Nur allein das Warmlaufen ist bei schnell sich drehenden Zapfen zu befürchten, daher ist für derlei Zapfen ein grosser Durchmesser und eine beträchtliche Länge zu empfehlen, man muss aber auch für ein gleichmässiges Aufliegen des Zapfens im Lager Sorge tragen.

Bodenreibung bei stehenden cylindrischen Zapfen. Vorausgesetzt dass die Grundfläche eines stehenden Zapfens ganz gleichmässig gegen die Pfanne gepresst wird, ergibt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise. Nennt man P_1 den Druck der Zapfengrundfläche gegen die Pfanne, d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute, so ist $\frac{P_1}{\frac{1}{4} d^2 \pi}$

der Druck jedes Quadratcentimeters der Grundfläche gegen den Boden. Verzeichnet man auf die Grundfläche mit zwei Halbmessern x und $x + \delta x$ concentrische Kreise (wobei δ das Differentialzeichen bedeutet), so ist der Druck der zwischen diesen Kreisen enthaltenen ringförmigen Fläche gegen den Boden der Pfanne:

$$2 x \pi \delta x \frac{P_1}{\frac{1}{4} d^2 \pi} = \frac{8 P_1}{d^2} x \delta x$$

Die daraus entstehende Reibung ist demnach:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f x \delta x$$

Das Moment des ganzen Reibungswiderstandes ist demnach:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \delta x = \frac{1}{3} P_1 f d$$

Die Kraft, welche am Umfange des Zapfens wirken muss, um dieses Reibungsmoment zu bewältigen ist demnach:

$$\frac{\frac{1}{3} P_1 f d}{\frac{1}{2} d} = \frac{2}{3} P_1 f$$

und der zur Bewältigung der Reibung erforderliche Effekt e_1 ist folglich:

$$e_1 = \frac{2}{3} \frac{n d P_1 f}{1910}$$

Wird die Umfangsfläche eines stehenden Zapfens mit einer Kraft P, die Grundfläche mit einer Kraft P_1 gedrückt, so ist der zur Bewältigung beider Reibungen erforderliche Effekt:

$$e_2 = \frac{n d f}{1910} \left(P + \frac{2}{3} P_1\right)$$

Umfangsreibung bei Zapfen, die sich hin und her drehen. Bei Zapfen, die nicht rund umlaufen, sondern sich nur um einen gewissen Winkel α hin und her drehen, ist der Reibungseffekt offenbar im Verhältniss $\frac{2 \alpha}{360}$ kleiner als bei continuirlich rund umlaufenden. Man hat daher für hin und her drehende Zapfen:

$$e = \frac{n\, d\, P\, f}{1910} \frac{2\,\alpha}{360}$$

wobei n die Zahl ist, welche ausdrückt, wie viel mal der Zapfen in einer Minute hin und her gedreht wird. Eine Hin- und Herdrehung als Eins gerechnet.

Dieser Reibungswiderstand ist insbesondere von keinem Belang, wenn $2\,\alpha$ gegen 360° klein ist, z. B. bei den Zapfen an einem Dampfmaschinenbalancier. Allein ein Umstand ist bei derlei Zapfen sehr nachtheilig, nämlich das Unrundwerden dieser Zapfen, weil nicht die ganze Oberfläche, sondern nur ein Theil derselben dem Abschleifen ausgesetzt ist.

Reibung eines stehenden Zapfens, der nach einer Rotationsfläche geformt ist. Nehmen wir an, der Zapfen einer vertikalen Welle sei nach einer Rotationsfläche geformt und eben so auch die Pfanne, in der er sich dreht, Fig. 6, Tafel XIV. Der Zapfen werde mit einer Kraft Q nach vertikaler Richtung in die Pfanne gedrückt. Nehmen wir einen beliebigen Punkt o der Axe als Anfangspunkt eines Coordinatensystems; die geometrische Axe des Zapfens als Abscissenaxe. $o\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m des Meridianschnittes der Rotationsfläche, $o\,p_1 = x + d\,x$, $m_1\,p_1 = y + d\,y$ die Coordinaten eines von m unendlich wenig entfernten Punktes m_1, $\overline{m\,m_1} = d\,s$. Nennt man N die auf die Flächeneinheit bezogene Pressung, welche nach normaler Richtung gegen jeden Punkt des zwischen den Ebenen $m\,p$ und $m_1\,p_1$ befindlichen Theiles der Oberfläche des Zapfens wirkt, so ist $2\,\pi\,y\,d\,s\,N$ der gesammte Normaldruck gegen diesen Flächentheil und $2\,\pi\,y\,d\,s\,N\sin\varphi$ die Kraft, mit welcher der Zapfen vermöge dieses Normaldruckes nach vertikaler Richtung aufwärts gedrückt wird. In diesem Ausdruck bedeutet φ den Winkel, den die zum Punkte m gezogene Berührungslinie mit der Axe des Zapfens bildet.

Es ist also $\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N\sin\varphi$ der aus sämmtlichen Normalpressungen entspringende, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkende Druck. Man hat daher:

$$\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N\sin\varphi = Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In diesem Ausdruck sind r_0 und r die Halbmesser $B\,B_1$ und $A\,A_1$. Allein es ist $\sin\varphi = \frac{d\,y}{d\,s}$, daher findet man:

$$Q = 2\,\pi \int_{r_0}^{r} y\, N\, d\, y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Axe, so ist $\omega\, y$ die Geschwindigkeit, mit der die Reibung überwunden wird, die aus dem Normaldruck $2\,\pi\, y\, d\, s\, N$ entsteht. Der Effekt e, welcher der Ueberwindung der totalen Reibung entspricht, ist demnach:

$$e = \int_{r_0}^{r} 2\,\pi\, y\, d s\, N\, f\, y\, \omega = \omega\, 2\,\pi\, f \int_{r_0}^{r} y^2\, N\, d\, s \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Der im Allgemeinen variable Normaldruck N richtet sich nach der Form des Zapfens und muss aus diesem durch statische Betrachtungen ausgemittelt werden, was nunmehr geschehen soll.

Nehmen wir an, der Zapfen werde zuerst so in die Pfanne gesetzt, dass zwischen den Berührungsflächen nur eine geometrische Berührung und keine Pressung statt findet. Lässt man hierauf die Kraft Q einwirken, so entstehen zwischen den Berührungsflächen Normalpressungen, die so lange zunehmen, bis sie der Kraft Q das Gleichgewicht halten. Dabei wird die Zapfenfläche, so wie auch die Fläche der Pfanne deformirt, aber in der Weise, dass Zapfen und Pfanne in jedem Augenblick übereinstimmende Formen haben. Diese Formen werden aber auch entstehen, wenn wir sowohl die Axe als auch die Pfanne festhalten und sowohl gegen die Fläche des Zapfens als auch gegen die Fläche der Pfanne Normalpressungen einwirken lassen, die jenen gleich sind, welche eintreten, wenn der Zapfen mit einer Kraft Q in die Pfanne gedrückt wird. Durch die Normalpressungen gegen den Zapfen geht derselbe aus der Form $A\,B$ in die Form $C\,D$ über, Fig. 7, Tafel XIV., und durch die Normalpressungen gegen die Pfanne geht dieselbe aus der Form $A\,B$ in die Form $E\,F$ über. Diese Formen $C\,D$ und $E\,F$ müssen aber nothwendig übereinstimmen, wenn die Entfernung $\overline{s\,t}$ der Punkte, in welchen die Linien $C\,D$ und $E\,F$ durch irgend eine vertikal gezogene Linie $s\,m\,t$ geschnitten werden, von gleicher Grösse ist, denn ist dies der Fall, so wird die Fläche $C\,D$ mit $E\,F$ zusammen fallen, wenn man die deformirte Zapfenfläche um die constante Länge $s\,t$ niederbewegt.

Zieht man durch m die Normale $n\,m\,q\,u$, so sind $\overline{m\,q}$ und $\overline{m\,n}$ die Zusammenpressungen des Zapfens und der Pfanne durch den Normaldruck N, man darf daher setzen $\overline{m\,q} = \varepsilon\, N$, $\overline{m\,n} = \varepsilon_1\, N$, wobei $\varepsilon\; \varepsilon_1$ constante Grössen bezeichnen, die von der Elastizität des Materials abhängen, aus welchem Zapfen und Pfanne gefertiget sind.

Da die Zusammendrückungen sehr klein sind, so darf man msq und mnt als unendlich kleine, geradlinige Dreiecke ansehen, es ist demnach:

$$\overline{mq} = \overline{ms} \sin\varphi, \quad \overline{mn} = \overline{mt} \sin\varphi$$

oder:

$$\overline{mq} + \overline{mn} = \sin\varphi \left(\overline{ms} + \overline{mt}\right)$$

Setzt man für $\overline{mq}$ und $\overline{mn}$ die oben aufgestellten Werthe und bezeichnet die constant sein sollende Länge $\overline{ms} + \overline{mt} = st$ mit λ, so erhält man:

$$\varepsilon N + \varepsilon_1 N = \lambda \sin\varphi$$

und hieraus folgt:

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin\varphi \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Hierdurch ist nun der Normaldruck N berechnet und man erhält, wenn man denselben in (2) und (3) einführt:

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin\varphi \, y \, dy = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin\varphi \, dy$$

$$e = 2\pi f \omega \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin\varphi \, y^2 \, ds = 2\pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin\varphi \, ds$$

oder auch weil $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$ ist:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \frac{dy}{ds} \, dy \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

$$e = 2\pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y^2 \, dy \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

oder weil $\int_{r_0}^{r} y^2 \, dy = \frac{1}{3} (r^3 - r_0^3)$ ist:

$$e = \frac{2}{3} \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} (r^3 - r_0^3) \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

auch findet man durch Division von (7) und (5):

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega^2 \frac{r^3 - r_0^3}{\int_{r_0}^{r} y \frac{dy}{ds} \, dy} \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Beispiele. Wir wollen diese Formeln auf spezielle Zapfenformen anwenden.

Für einen Zapfen mit ebener kreisförmiger Grundfläche ist $r_0 = o$, $ds = dy$, daher vermöge (5):

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^r y\, dy = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

$$\lambda = (\varepsilon + \varepsilon_1) \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Ferner vermöge (4) und (8):

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin 90^\circ = \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f\, \omega\, r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Für einen konischen oder Spitzzapfen, Fig. 8, Tafel XIV., ist $r_0 = o$, $ds \sin \beta = dy$, $\sin \varphi = \sin \beta$, man findet also:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^r y \sin \beta\, dy$$

$$Q = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

$$N = \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f\, \omega \frac{r}{\sin \beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Für einen halbkugelförmigen Zapfen darf man mit Berücksichtigung von Fig. 9, Tafel XIV setzen:

$$x = r(1 - \cos \psi), \quad y = r \sin \psi, \quad ds = r\, d\psi, \quad r_0 = o$$

und dann wird:

$$dx = r \sin \psi\, d\psi, \quad dy = r \cos \psi\, d\psi$$

demnach:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^{\frac{\pi}{2}} r \sin \psi \cos \psi\, r \cos \psi\, d\psi$$

$$Q = \frac{2}{3} \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

$$\frac{e}{Q} = f \omega r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

$$N = \frac{3}{2} \frac{Q}{r^2 \pi} \cos \psi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Zapfenform, welche die geringste Erwärmung verursacht. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Form eines Zapfens so zu bestimmen, dass die durch die Reibung entstehende Erwärmung an jedem Punkt der Berührungsfläche zwischen Zapfen und Pfanne einen gleichen aber geringen Werth erhält. Durch einen Zapfen, welcher diese Eigenschaft besitzt, wird man sich wohl am besten gegen das so nachtheilige Abnutzen und Warmlaufen schützen.

Die an einer Stelle der Oberfläche des Zapfens in Folge der Reibung entstehende Erwärmung muss wahrscheinlich nach der Arbeit beurtheilt werden, welche der Ueberwindung der Reibung entspricht, die auf der Einheit der Fläche stattfindet. Diese Arbeit muss also für jeden Punkt der Oberfläche des Zapfens constant sein.

Nun ist für eine Stelle des Zapfens, welche einem Halbmesser y entspricht, Fig. 6, $N f$ der Reibungswiderstand auf der Flächeneinheit und ωy die Geschwindigkeit, mit welcher die Reibung überwunden wird, wir haben daher zu setzen:

$$N f \omega y = \text{const} = k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

wobei k eine durch Erfahrung zu bestimmende constante Grösse bedeutet.

Setzen wir für N seinen Werth aus (4), so wird:

$$\frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi f \omega y = k$$

oder:

$$y \sin \varphi = \frac{k(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega}$$

Das Produkt $y \sin \varphi$ muss also für jeden Punkt des Zapfens einen und denselben Werth haben. Nennen wir α den Werth von φ, welcher dem grössten Halbmesser $y = r$ entspricht, so haben wir:

$$y \sin \varphi = r \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

$$\frac{k(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega} = r \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Die Gleichung (19) bestimmt die Form des Zapfens. Es ist nämlich $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$, daher erhalten wir aus (19):

$$y\,dy = r \sin\alpha\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{1}{2}\, y^2 = r\, s \sin\alpha + \text{const}$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkt B_1, Fig. 6, Tafel XIV, so ist für $y = r_0$, $s = 0$, demnach:

$$\frac{1}{2}\, r_0^2 = 0 + \text{const}$$

demnach:

$$\frac{1}{2}\,(y^2 - r_0^2) = r\, s \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Dies ist die Gleichung der Zapfenform, ausgedrückt durch y und s. Suchen wir aber auch die Gleichung der Zapfenlinie durch x und y darzustellen.

Es ist $ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Führt man diesen Werth von ds in (21) ein, so findet man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$dx = dy\sqrt{\left(\frac{y}{r \sin\alpha}\right)^2 - 1}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$x = + \frac{1}{2}\, y\sqrt{\frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} - 1} - \frac{r \sin\alpha}{2} \operatorname{lognat}\left(\frac{y}{r \sin\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} - 1}\right)$$
$$+ \text{const}$$

y kann nie kleiner werden als $r \sin\alpha$, weil sonst die Wurzelgrösse $\sqrt{\left(\frac{y}{r \sin\alpha}\right)^2 - 1}$ imaginär würde. Der kleinste zulässige Zapfenhalbmesser ist demnach gleich $r \sin\alpha$ oder:

$$r_0 = r \sin\alpha$$

Für $y = r_0 = r \sin\alpha$ wird aber $x = 0$, daher findet man $\text{const} = 0$ und die Gleichung der Zapfenkurve wird:

$$x = \frac{1}{2}\, y\sqrt{\frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} - 1} - \frac{r \sin\alpha}{2} \operatorname{lognat}\left(\frac{y}{r \sin\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} - 1}\right) \quad (23)$$

Der grösste Halbmesser ist $y = r$. Nennt man h die Höhe des Zapfens, setzt also $A_1 B_1 = h$, Fig. 6, so muss für $y = r$, $x = h$ werden, daher hat man:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{2} \operatorname{lognat} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \quad . \; . \; . \quad (24)$$

Hierdurch ist das Verhältniss zwischen der Höhe des Zapfens und seinem grössten Halbmesser r bestimmt. Berechnen wir nun auch den Werth von Q und von e.

Vermöge (19) und (20) wird:

$$Q = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} \frac{k (\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega} d y = 2 \pi \frac{k}{f \omega} (r - r_0)$$

oder weil $r_0 = r \sin \alpha$ ist:

$$Q = 2 \pi \frac{k}{f \omega} (1 - \sin \alpha) r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Hieraus ergibt sich der Zapfenhalbmesser:

$$r = \frac{f \omega}{2 \pi k} \frac{Q}{(1 - \sin \alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Führt man in (7) für $\frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$ den Werth ein, welcher aus (20) folgt, so findet man:

$$e = \frac{2}{3} \pi k r^2 \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

oder endlich, wenn man vermittelst (26) den Werth von r wegbringt:

$$e = \frac{1}{6 \pi} \frac{1}{k} f^2 \omega^2 Q^2 \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Auch ist:

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega r \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Um für die Constante k einen angemessenen Werth zu finden, können wir von der Thatsache ausgehen, dass für einen gewöhnlichen cylindrischen Zapfen mit kreisrunder Grundfläche ein Durchmesser von 12 Centimeter hinreichend ist, wenn der Druck auf einen Quadratcentimeter der Grundfläche 20 Kilogramm beträgt und die Welle in einer Minute 150 Umdrehungen macht. Setzen wir für einen solchen Zapfen auf analoge Weise

$$\frac{Q}{r^2 \pi} f \omega r = k$$

und nehmen

$$\frac{Q}{r^2 \pi} = 20, \quad f = 0{\cdot}08, \quad \omega = \frac{2 \pi \times 150}{60} = 15{\cdot}7, \quad r = 6 \text{ Centimeter}$$

so wird:

$$k = 20 \times 0{\cdot}08 \times 15{\cdot}7 \times 6 = 154 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Um zur Einsicht zu kommen, was man von dieser Art Zapfen erwarten darf, dienen folgende numerische Rechnungen.

Setzen wir in die Formeln $k = 154$, $f = 0{\cdot}054$ (sorgfältige continuirliche Oelung) $\pi = 3{\cdot}142$, so findet man:

für		$\alpha = 20^0$	30^0	40^0
aus (26)	$\frac{r}{Q \omega}$ =	$\frac{1}{11844}$	$\frac{1}{9000}$	$\frac{1}{6426}$
aus (28)	$\frac{e}{Q^2 \omega^2}$ =	$\frac{1}{154700}$	$\frac{1}{142860}$	$\frac{1}{111111}$

oder wenn man statt der in Centimetern ausgedrückten Winkelgeschwindigkeit die Anzahl n der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute einführt, also $\omega = \frac{2 \pi}{60} n$ setzt:

$\frac{r}{Q n}$ =	$\frac{1}{113086}$	$\frac{1}{85732}$	$\frac{1}{61355}$
$\frac{e}{Q^2 n^2}$ =	$\frac{1}{14077700}$	$\frac{1}{13000260}$	$\frac{1}{10111101}$

auch wird:

$\frac{e}{r^2}$ =	906	567	372

Nennt man e_1 den Reibungseffekt für einen gewöhnlichen Zapfen mit ebener kreisförmiger Basis, so ist:

$$e_1 = \frac{2}{3} Q f r \omega$$

Aus dieser und der Formel (29) folgt:

$$\frac{e_1}{e} = \frac{2}{\dfrac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)}}$$

und man findet für

$$\alpha = \quad 20^\circ \qquad 30^\circ \qquad 40^\circ$$

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{3{\cdot}23} \qquad \frac{1}{3{\cdot}50} \qquad \frac{1}{4{\cdot}5}$$

Hinsichtlich des Reibungsverlustes ist demnach dieser künstlich geformte Zapfen gar nicht empfehlenswerth. Ob man sich in der That mit diesem künstlichen Zapfen gegen das Warmlaufen schützen kann, müsste die Erfahrung entscheiden, denn die ganze Theorie beruht doch auf zwei Annahmen, deren Richtigkeit von vornherein nicht unbedingt behauptet werden kann.

Der „Antifrictions"-Zapfen. Der sogenannte „Antifrictions"-Zapfen ist eine Erfindung von *Schiele*. Er ist nach einer Kurve AB, Fig. 10, Tafel XIV., gebildet, die die Eigenschaft hat, dass die Länge des Tangentenstückes mp für jeden Punkt der Kurve constant ist. Nennt man t die Länge mp des Tangentenstückes, so ist $t \sin\varphi = y$, es ist aber $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, demnach:

$$t\frac{dy}{ds} = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dies ist die Differenzialgleichung der Kurve. Das Integrale gibt

$$t \log y = s + \text{const}$$

Nennt man r_0 den kleinsten Halbmesser und rechnet von da an die Bogenlänge s, so ist für $s = o$, $y = r_0$, demnach:

$$t \log r_0 = o + \text{const}$$

und dann wird:

$$t \log\frac{y}{r_0} = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{y}{r_0} = e^{\frac{s}{t}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Will man die Gleichung der Kurve zwischen x und y ausdrücken, so hat man wegen $ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

$$\frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = y, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{t^2 - y^2}}{y}$$

Das Integrale dieses Ausdruckes ist:

$$y = \sqrt{t^2 - y^2} + \frac{1}{2} t \text{ lognat } \frac{\sqrt{t^2 - y^2} - t}{\sqrt{t^2 - y^2} + t} + \text{const}$$

Zu dieser Kurve kommt man, wenn man den Normaldruck N nicht, wie wir gefunden haben, dem Sinus des Winkels φ proportional setzt, sondern im Gegentheil

$$N = \frac{\gamma}{\sin \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

setzt, wobei γ eine Constante bezeichnet, und wenn man ferner, wie auch wir gethan haben,

$$N f \omega y = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

nimmt, denn in diesem Falle wird:

$$\frac{\gamma}{\sin \varphi} f \omega y = k, \qquad \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{k}{\gamma f \omega}$$

Allein es ist $\frac{\gamma}{\sin \varphi} = t$, demnach folgt unter den Annahmen (1) und (2), dass $t = \frac{k}{\gamma f \omega}$ sein soll, oder dass t eine constante Grösse sein soll. Allein die Annahme $N = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$ ist offenbar verfehlt, daher beruht der Antifrictions-Zapfen von Herrn *Schiele* auf einem Irrthum und ist zu verwerfen.

Kurbelzapfen und Excentrik. Die Formel, welche wir für den Effekt der Reibung am Umfang von rundumlaufenden Zapfen gefunden haben, nämlich:

$$e = \frac{n\, d\, f\, P}{1910}$$

gilt auch für Kurbelzapfen und für excentrische Scheiben, wenn man d den in Centimetern ausgedrückten Durchmesser des Kurbelzapfens oder den Durchmesser der excentrischen Scheibe bedeuten lässt. Man sieht hieraus, dass diese excentrischen Scheiben sehr krafterschöpfend werden können, indem ihr Durchmesser immer sehr gross ausfällt. Zur Uebertragung grösserer Effekte darf desshalb die excentrische Scheibe nicht gebraucht werden, und wird auch heut zu Tage in solchen Fällen nicht gebraucht.

Reibung an Ringflächen. Ringförmige Flächen, die sich drehen und gegen eine Fläche gepresst werden, kommen bei verschiedenen Maschinentheilen vor.

Nennen wir P den gesammten Druck der Ringfläche gegen die ruhende Fläche, d_0 den inneren, d_1 den äusseren Durchmesser des Ringes, f den Reibungscoefficienten, so ist zunächst $\frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_0^2)}$ der Druck auf einen Quadratcentimeter der Ringfläche. Beschreibt man mit x und $x + \delta x$ (wobei δ das Differenzialzeichen bedeutet), zwei concentrische Kreise, so ist: $2\pi x \delta x \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_0^2)} f$ der Reibungswiderstand auf diesen Ring von der Breite δx. Multiplizirt man diesen Ausdruck mit x und dividirt ihn durch $\frac{d_1}{2}$, so erhält man die Kraft, welche am Umfang des Zapfens wirkend im Stande ist, die an der Fläche $2\pi x \delta x$ stattfindende Reibung zu überwinden. Diese Kraft ist demnach:

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} x^2 \delta x$$

Die Kraft, welche am Umfang des Zapfens wirken muss, um die Reibung, welche an der ganzen Ringfläche stattfindet, zu überwinden, ist demnach:

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} \int_{\frac{1}{2} d_0}^{\frac{1}{2} d_1} x^2 \, \delta x = \frac{2}{3} P f \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)}$$

Wird d_0 und d_1 in Centimetern ausgedrückt und nennt man n die Anzahl der Umdrehungen des Ringes in einer Minute, so ist $\frac{d_1 \pi n}{100 \times 60}$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rings in Metern ausgedrückt. Der Effekt e der Ringreibung wird demnach:

$$e = \frac{n P f}{1910} \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1^2 - d_0^2}$$

Frictionsrollen. Es sei A ein Wellenzapfen, der nicht in ein Lager, sondern auf eine mit zwei Zapfen B versehene Rolle C gelegt ist, jeder der Zapfen B liege in gewöhnlichen Lagern D, der Zapfen A befinde sich in einer Gabel, so dass er keine Horizontalbewegung machen kann. Eine solche Anordnung wird Friktionsrolle genannt.

Wird der Zapfen gedreht, so rollt derselbe auf der Rolle C und diese dreht sich dabei um ihre Zapfen. Wenn die Zapfen B und der Rollenumfang glatt bearbeitet sind, kann der Wälzungswiderstand ganz vernachlässigt werden, und ist dann bei dieser Einrichtung nur die Reibung an den Zapfen der Friktionsrolle zu überwinden.

Nennt man P den Druck des Zapfens A gegen den Rollenumfang, d den Durchmesser des Zapfens A, D den Durchmesser der Rolle C und $\varDelta$ den Durchmesser eines der Zapfen B, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens A in einer Minute, so ist $\frac{1}{2}$ P der Druck eines der Zapfen B gegen das Lager, $\frac{1}{2}$ P f der daraus entspringende Reibungswiderstand, welcher mit der Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens B überwunden wird. Diese letztere ist aber im Verhältniss $\frac{\varDelta}{D}$ kleiner als die Umfangsgeschwindigkeit von C oder von A, ist demnach $\frac{\varDelta}{D} \frac{d \pi n}{60 \times 100}$. Der Effekt e der Reibungen an den beiden Zapfen B ist demnach:

$$e = 2 \times \frac{1}{2} P f \times \frac{\varDelta}{D} \frac{d \pi n}{60 \times 100}$$

oder

$$e = \frac{n d P f}{1910} \frac{\varDelta}{D}$$

Der Reibungseffekt ist demnach bei einer Friktionsrolle im Verhältniss des Durchmessers des Rollenzapfens und der Rolle selbst kleiner, als bei einer gewöhnlichen Zapfeneinrichtung.

Axenreibung eines Wagens. Bei Strassenwagen sind die Axen mit dem Gestelle verbunden und drehen sich die Räder um die Axen. Bei Eisenbahnwagen sind die Axen mit den Rädern verbunden und liegt das Wagengestelle auf den Axen. Diese Verschiedenheit der Wagenconstruktion hat jedoch auf den Betrag der Axenreibung keinen Einfluss. Wir wollen einen Eisenbahnwagen der Berechnung zu Grunde legen.

Es sei d der Durchmesser eines Zapfens, D der Durchmesser eines Rades, i die Anzahl der Räder des Wagens, Q_1, Q_2, Q_3 die Pressungen gegen die Zapfen der Axen, v die Fahrgeschwindigkeit des Wagens. Dies vorausgesetzt, sind $Q_1 f$, $Q_2 f$, $Q_3 f$ die Reibungswiderstände an den Zapfenumfängen; diese werden aber mit einer Geschwindigkeit v $\frac{d}{D}$ überwunden, daher hat man für den Effekt e sämmtlicher Axenreibungen:

$$e = Q_1 f v \frac{d}{D} + Q_2 f v \frac{d}{D} + \ldots$$

oder

$$e = f\, v \frac{d}{D} (Q_1 + Q_2 + \ldots)$$

Allein $Q_1 + Q_2 + \ldots$ ist die totale Belastung sämmtlicher Zapfen; bezeichnet man dieselbe mit Q, so erhält man:

$$e = Q f \frac{d}{D} v \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Demnach ist die zur Ueberwältigung der Axenreibung erforderliche Zugkraft Z:

$$Z = Q f \frac{d}{D} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Für Eisenbahnwagen ist in der Regel $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$ und darf man, weil continuirlich geölt wird, $f = 0{\cdot}054$ setzen, dann wird:

$$Z = \frac{Q}{260}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) sieht man, dass es vortheilhaft ist, wenn die Räder im Verhältniss zu den Zapfendurchmessern gross sind. Auch erkennt man leicht, dass es hinsichtlich der Axenreibung auf die Anzahl der Räder nicht ankommt. Allein da bei einer grösseren Räderzahl der Druck auf jeden Zapfen kleiner ausfällt, wodurch die Zapfendurchmesser kleiner sein können, so dürfen auch die Räder kleiner gemacht werden. Wagen mit wenig Rädern erfordern also starke Zapfen und grosse Räder, Wagen mit vielen Rädern dagegen können kleine Zapfen und kleine Räder erhalten.

Bei Lokomotiven mit äusseren Rahmen und äusseren Axenzapfen ist $\frac{d}{D}$ beträchtlich kleiner, als bei Lokomotiven mit inneren auf den Axen selbst aufsitzenden Rahmen. Die Lokomotive der ersten Art verursachen daher einen geringeren Axenreibungswiderstand als die der zweiten Art.

Würde man bei Eisenbahnwagen Frictionsrollen anwenden, so könnte der Axenreibungswiderstand in der That verschwindend klein gemacht werden, denn die Zugkraft für einen solchen mit Frictionsrollen versehenen Zapfen wäre:

$$Z = Q f \frac{d}{D} \frac{d_1}{D_1}$$

wobei D_1 den Durchmesser der Frictionsrolle und d_1 den Zapfen dieser Rolle bezeichnet.

Für $f = 0{,}054$, $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$, $\frac{d_1}{D_1} = \frac{1}{5}$ würde

$$Z = \frac{Q}{1300}$$

Leider ist die Anwendung der Friktionsrollen bei Eisenbahnwagen, so wie überhaupt bei Maschinen, in welchen mächtigere Kräfte wirken, nicht wohl zulässig. Die Construktion ist zu complizirt und die Axenlagerung zu unsicher.

Die Schraube mit flachem Gewinde. Eine genaue Bestimmung des bei einer Schraube vorkommenden Reibungswiderstandes verursacht sehr weitläufige Rechnungen und führt zu so complizirten Formeln, dass es wohl Niemand in den Sinn kommen würde, darnach numerische Rechnungen zu machen. Auch würde die Genauigkeit doch nur illusorisch sein, indem man in den Anwendungen niemals in der Lage ist, den Werth des Reibungscoeffizienten mit Zuverlässigkeit anzugeben. Wir begnügen uns daher mit einer Annäherungsrechnung, die sich ergiebt, wenn man die Gewindtiefe unendlich klein annimmt, in welchem Falle 1) alle Punkte der Schraubenfläche gleiche Geschwindigkeit haben, 2) die Neigung der Schraubenfläche gegen den Horizont für alle Punkte derselben einerlei Grösse hat.

Wird die Mutter festgehalten und die Spindel gedreht, so erhält dieselbe auch eine fortschreitende Bewegung nach der Richtung ihrer Axe und dabei gleitet die Spindelfläche an der Mutterfläche hinauf, wie ein auf einer schiefen Ebene liegender, durch eine Horizontalkraft getriebener Körper.

Wir werden daher die Formel, welche wir Seite 261 für die schiefe Ebene aufgestellt haben, anwenden können und erhalten daher für die Kraft P, welche am Umfang der Spindel horizontal drehend wirken muss, um die an derselben hängende Last aufzuziehen und die zwischen Mutter und Spindel statt findende Reibung zu überwinden, folgenden Ausdruck:

$$P = Q \frac{\tang \alpha + f}{1 - f \tang \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei nun α den Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen eine auf die Axe senkrechte Ebene bedeutet.

Nennt man d den Durchmesser der Spindel, h die Höhe eines Schraubenganges, so darf man setzen:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{d\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

demnach ist auch:

$$P = Q \, \frac{\frac{h}{d\,\pi} + f}{1 - f \frac{h}{d\,\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft P entwickeln muss, damit die Last Q auf eine Höhe H gehoben wird, ist $P \frac{H}{\operatorname{tang}\alpha}$, oder

$$W = Q\,H \, \frac{\operatorname{tang} \alpha + f}{\operatorname{tang} \alpha - f \operatorname{tang}^2 \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum für

$$\operatorname{tang} \alpha = -f + \sqrt{1 + f^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese hinsichtlich des Erhebungseffektes vortheilhafteste Schraube fällt in der Regel sehr steil aus, indem für gut ausgeführte Metallschrauben f nie grösser als $\frac{1}{10}$ ist.

Gewöhnlich wird eine Schraube angewendet, um mit einer gewissen Kraft einen sehr grossen Druck auszuüben, und dann muss $\operatorname{tang}\alpha$ klein gemacht werden, oder muss eine Schraube von geringer Steilheit genommen werden, dann aber ist das Güteverhältniss einer solchen Schraube, nämlich $\frac{W}{QH} = \frac{\operatorname{tang} \alpha + f}{\operatorname{tang} \alpha \,(1 - f \operatorname{tang} \alpha)}$, äusserst ungünstig, denn wenn z. B. $f = 0{\cdot}1$ und $\operatorname{tang} \alpha = 0{\cdot}1$ ist, wird dieses Verhältniss $\frac{W}{QH} = \frac{2}{1 - 0{\cdot}01} = \frac{2}{0{\cdot}99} = 2$ (nahe), d. h. die zum Erheben erforderliche Wirkung wird noch einmal so gross, als sie wäre, wenn keine Reibung statt fände, oder mit anderen Worten, es geht in diesem Falle von der drehenden Kraft die Hälfte verloren. Die Schraube ist daher leider ein sehr schlechter Mechanismus zur Transmittirung grosser Kräfte. Wenn man mit einer Schraube 100 Pferdekraft übertragen wollte, würden 50 verloren gehen, und diese verlorene Kraft würde noch überdies auf Abnutzung der Spindel und Mutter wirken. Um die Mutter gegen Abnützung zu schützen, ist es nothwendig, derselben eine sehr grosse Ausdehnung zu geben, um so die Intensität des Druckes zwischen Spindel und Mutter zu mässigen.

Frägt man nach der Kraft P_1, die am Umfang der Schraube wirken muss, um zu verhindern, dass sich die Spindel durch den

Zug der Last Q nicht dreht, so findet man dieselbe, wenn man in (1) P_1 statt P und $-f$ statt f setzt Man hat daher:

$$P_1 = Q \frac{\text{tang}\,\alpha - f}{1 + f\,\text{tang}\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Schrauben, die zum Festhalten dienen, müssen so eingerichtet werden, dass sie sich durch die längs der Spindel wirkende Kraft von selbst nicht aufdrehen. Hierzu ist vermöge Gleichung (6) erforderlich, dass

$$\text{tang}\,\alpha \leqq f$$

ist. Will man dagegen umgekehrt, dass sich die Spindel, wenn auf sie keine drehende Kraft einwirkt, dreht, so muss

$$\text{tang}\,\alpha > f$$

genommen werden.

Schraube mit scharfem Gewinde. Die genaue Berechnung der Reibung bei einer Schraube mit scharfem Gewinde ist mit Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten verbunden, die in keinem Verhältniss stehen mit dem geringen praktischen Nutzen, der aus einer ganz genauen Berechnung entstehen könnte. Will man die Sache ganz genau nehmen, so ist diese Berechnung heut zu Tage noch ganz unmöglich, denn man müsste mit Rücksicht einerseits auf das sehr complizirte Bildungsgesetz der Schraubenfläche, andererseits auf die Elastizität des Materials, aus welchem Spindel und Mutter besteht, die in jedem Berührungspunkt zwischen Spindel und Mutter statt findende Pressungsintensität bestimmen. Ich habe diese Rechnungen so weit als möglich durchgeführt, halte es aber nicht für angemessen, sie hier zu produziren, sondern beschränke mich auf die praktischen Bedürfnisse, für welche eine Annäherungsrechnung ganz ausreichend ist.

Nennt man für eine dreikantige Schraube, Fig. 12, Tafel XIV., α die Neigung der äusseren Schraubenlinie der Spindel gegen eine auf die Axe der Schraube senkrechte Ebene, β die Hälfte des Kantenwinkels des Gewindes und nimmt P, Q, f in dem früher angegebenen Sinn, so ist $\frac{Q\cos\alpha + P\sin\alpha}{\cos\beta}$ der Normaldruck zwischen Mutter und Spindel, die Kraft $P\cos\alpha$ muss nun den Widerstand $Q\sin\alpha$ und die aus obigem Normaldruck entstehende Reibung überwinden, daher hat man:

$$P\cos\alpha = Q\sin\alpha + \frac{Q\cos\alpha + P\sin\alpha}{\cos\beta}\,f$$

hieraus folgt:

$$P = Q \frac{\text{tang } \alpha \cos \beta + f}{\cos \beta - f \text{ tang } \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft P entwickeln muss, um die Last auf eine Höhe H zu heben, ist $P \frac{H}{\text{tang } \alpha} = W$, daher wird:

$$\frac{W}{Q\,H} = \frac{\text{tang } \alpha \cos \beta + f}{(\cos \beta - f \text{ tang } \alpha) \text{ tang } \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Dieses Verhältniss ist noch ungünstiger als das ähnliche für eine Schraube mit flachem Gewinde, denn es wird, weil $\cos \beta < 1$ ist, noch grösser, als wenn $\cos \beta = 1$ ist, d. h. noch grösser als für eine Schraube mit flachen Gewinden. Diese Schrauben mit scharfen Gewinden sollen daher zur Uebertragung von grossen Kräften durchaus nicht angewendet werden, und werden es auch in der That nicht, dagegen sind sie zur Befestigung sehr geeignet, denn die Bedingung, dass sich eine solche Schraube von selbst nicht aufdreht, ist

$$\text{tang } \alpha \leqq \frac{f}{\cos \beta}$$

d. h. wenn eine solche Schraube steiler ist als eine flache Schraube, so wird sie sich doch noch nicht aufdrehen.

Die Schraube ohne Ende. Eine endlose Schraube mit dem zugehörigen Rade kann hinsichtlich der Reibung so angesehen werden, wie wenn der in das Gewinde eingreifende Zahn des Rades ein Stück einer Mutter wäre, das die Schraubengewinde nicht ringsum umgibt. Man kann daher die Reibung annähernd wie bei einer Schraubenspindel mit vollständiger Mutter berechnen, kann daher schreiben:

Für eine Schraube mit flachem Gewinde:

$$P = Q \frac{\text{tang } \alpha + f}{1 - f \text{ tang } \alpha}$$

Für eine Schraube mit scharfem Gewinde:

$$P = Q \frac{\text{tang } \alpha \cos \beta + f}{\cos \beta - f \text{ tang } \alpha}$$

und dabei bedeutet:

Q den Widerstand, welcher am Umfang des Schraubenrades wirkt, P die Kraft, welche am Umfang des Wurmrades wirken muss, um den Widerstand Q und die daraus entstehende Reibung zu überwinden, α den Winkel, den die äussere Schraubenlinie des Wurmes mit einer auf der Axe senkrecht stehenden Ebene bildet, β die Hälfte des Kantenwinkels des Gewindes, falls dasselbe dreieckig ist. Es ist selbstverständlich, dass diese Rechnungsweise nur eine Annäherung ist und strenge genommen nur gilt, 1) wenn die Gewindtiefe unendlich klein ist, 2) wenn der Halbmesser des Schraubenrades sehr gross oder gar unendlich gross ist.

Auch die Schraube ohne Ende ist zur Transmittirung grösserer Kräfte nicht zu empfehlen, indem fast in allen Fällen der Anwendung die Hälfte der Kraft durch Reibung verloren geht und diese verlorne Kraft nothwendig bei continuirlicher Bewegung eine rasche Abnützung der Gewinde und Zähne zur Folge hat. Handelt es sich aber überhaupt nur um sanfte feine Bewegungen, die nur von schwachen Kräften begleitet sind, so ist dagegen die Schraube ohne Ende wie die gewöhnliche Schraube ein vortrefflicher Mechanismus, denn es ist diese Schraube ohne Ende der compendiöseste Mechanismus, um mit einer schwachen Kraft einen grossen Widerstand zu bewältigen, und sie gewährt den in vielen Anwendungen sehr nützlichen Vortheil, dass eine rückgängige Bewegung nicht von selbst, d. h. auch dann nicht eintritt, wenn auf die Schraube keine drehende Kraft einwirkt, was für Winden und Aufzüge eine sehr wünschenswerthe Eigenschaft ist.

Reibung einer Stirnräderverzahnung. Bei allen Verzahnungen, welche wir in der Folge für Stirnräder werden kennen lernen, geht die dem Berührungspunkt zweier Zähne entsprechende Normale durch den Berührungspunkt der Theilkreise. Wir wollen daher auch der nachfolgenden Rechnung eine Verzahnung zu Grunde legen, welcher diese Eigenschaft hinsichtlich der Richtung der Normale zukommt.

Es seien K k die im Punkt a sich berührenden Theilkreise der beiden Räder, Z ein Zahn des Rades K, z ein Zahn des Rades k, b der Punkt, in welchem sich die beiden Zähne in irgend einem Augenblick ihrer wechselseitigen Einwirkung berühren, c b a E die dem Punkt b der beiden Zähne gemeinschaftliche Normale, Q der am Umfang von k wirkende Widerstand, P die am Umfang von K nothwendige Kraft, um den Widerstand Q und die zwischen den Zähnen statt findende Reibung zu überwinden, R und r die Halbmesser der Theilkreise K und k, N die wechselseitige Pressung der Zähne. Diese Pressung wirkt nach der Richtung $b\,n_1$ auf den Zahn z und nach der Richtung b n auf den Zahn Z. Aus diesem Druck entspringt ein Reibungswiderstand $N f$ und dieser wirkt auf den

Zahn z nach der Richtung $b\,t_1$, auf den Zahn Z nach der Richtung $b\,t$. Das Gleichgewicht zwischen P, Q und der Reibung erfordert nun 1) dass P (am Umfang von K wirkend) mit N nach der Richtung $b\,n$ wirkend und mit $N\,f$ nach der Richtung $b\,t$ wirkend im Gleichgewicht ist, 2) dass Q am Umfang von k wirkend mit N nach $b\,n_1$ wirkend und mit $N\,f$ nach der Richtung $b\,t_1$ wirkend im Gleichgewicht ist. Wir erhalten daher, wenn wir $\widehat{a\,C\,E} = \varphi$ und $a\,b = p$ setzen, folgende Momentengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P\,R &= N\,R\cos\varphi + N\,f\,(R\sin\varphi + p) \\ Q\,r &= N\,r\cos\varphi + N\,f\,(r\sin\varphi - p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi + \frac{p}{R}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Berechnet man hieraus $\frac{P-Q}{Q} = \frac{P}{Q} - 1$, so findet man:

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Allein $P - Q$ ist offenbar der Betrag des Reibungswiderstandes, setzt man denselben F, so hat man:

$$\frac{F}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Diese Gleichung ist streng richtig und man kann vermittelst derselben den Reibungswiderstand für jede Verzahnungsart berechnen, wenn man nach der Form der Zähne den Werth von p als Funktion von φ ausdrückt.

Wir wollen uns jedoch nicht damit befassen, die Reibungswiderstände für die verschiedenen Verzahnungsarten ganz genau zu berechnen, sondern begnügen uns mit einer Annäherungsrechnung, die auf alle Verzahnungsarten anwendbar ist. Da nämlich in allen Fällen der Anwendung die Zahntheilung klein ist, so darf man φ

als einen sehr kleinen Winkel ansehen, und dann wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man den Nenner des Ausdruckes (4) gleich Eins setzt, denn $\cos \varphi$ ist beinahe 1 und $f\left(\sin \varphi - \frac{p}{R}\right)$ ist jedenfalls eine äusserst kleine Grösse, denn f ist klein, φ und $\frac{p}{R}$ sind es ebenfalls. Wir erhalten demnach für alle Verzahnungen annähernd:

$$\frac{F}{Q} = f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) p \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Der Reibungswiderstand ist also mit p, demnach mit der Stellung, in welcher sich die Zähne während ihrer Aufeinanderwirkung befinden, veränderlich. Suchen wir daher den mittleren Werth von F, so werden wir diesen erhalten, wenn wir für p den mittleren Werth setzen. Bewegen sich die Zähne durch eine Theilung von a an, so ist der kleinste Werth von p gleich Null und der grösste Werth von p sehr nahe gleich der Länge eines Theilungsbogens t, daher der mittlere Werth von p gleich $\frac{1}{2}$ t, gleich der Hälfte einer Theilung. Der mittlere Werth F_m des Reibungswiderstandes ist demnach:

$$\frac{F_m}{Q} = \frac{1}{2} f t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Nennt man M und m die Anzahl der Zähne der Räder K und k, so ist $t = \frac{2 R \pi}{M}$ und $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$, daher wird:

$$\frac{F_m}{Q} = f \pi \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

und somit ist annähernd der Reibungswiderstand für Stirnräder berechnet und zwar für jede Verzahnungsform.

Hieraus geht zunächst hervor, dass der Reibungswiderstand bei allen Verzahnungen sehr nahe gleich gross ist, wenn die Zahntheilungen klein sind. Sodann folgt aus (7), dass der Reibungswiderstand mit der Anzahl der Zähne der Räder abnimmt, dass also eine grosse Zahnzahl oder eine feine Theilung vortheilhaft ist. Endlich folgt aus (7), dass dieser Reibungswiderstand von sehr geringem Belang ist, wenn die Zahnzahlen gross sind, denn ist z. B. $f = \frac{1}{8}$, $M = m = 12$, so wird:

$$\frac{F_m}{Q} = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{15}$$

Es beträgt also dieser Reibungswiderstand selbst dann, wenn der Reibungscoeffizient $\frac{1}{8}$ beträgt und jedes Rad nur 12 Zähne hat, dennoch nur $\frac{1}{15}$ von dem am Umfang des getriebenen Rades wirkenden Widerstande.

$$\text{für } f = \frac{1}{10}, \quad M = 48, \quad m = 48$$

$$\text{wird } F_m = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{10}\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{48}\right) Q = \frac{1}{76} Q$$

also sehr klein.

Die Verzahnungen müssen daher hinsichtlich des Reibungswiderstandes vortreffliche Anordnungen genannt werden.

Reibung konischer Räder. Wir werden in der Folge zeigen, dass richtige Zahnformen für Kegelräder gefunden werden, wenn man die Zähne von zwei Stirnrädern verzeichnet, deren Halbmesser gleich sind den Seiten der Ergänzungskegel der Kegelräder. Wir werden daher auch sagen dürfen, dass der Reibungswiderstand der Kegelräder so gross ist, als der Reibungswiderstand zweier Stirnräder, deren Halbmesser so gross sind, als die Seiten der Ergänzungskegel und deren Theilung mit jener der Kegelräder übereinstimmt.

Es seien, Fig. 1, Tafel XV., OA und Oa die Axen der Räder, $\widehat{AOa} = \alpha$ der Winkel, den ihre Richtungen einschliessen, R und r die Halbmesser der Räder, S und s die Seiten der Ergänzungskegel, M und m die Anzahl der Zähne der beiden Kegelräder, M_1 m_1 die Anzahl der Zähne der oben erwähnten idealen Stirnräder.

Dies vorausgesetzt bestehen zunächst wegen der Gleichheit der Zahntheilungen der realen und idealen Räder die Beziehungen:

$$\frac{2R\pi}{M} = \frac{2r\pi}{m} = \frac{2S\pi}{M_1} = \frac{2s\pi}{m_1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1} &= \frac{R}{Ms} \\ \frac{1}{M_1} &= \frac{R}{MS} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die idealen Räder Stirnräder sind, so ist nach Gleichung (7), Seite 286 der Reibungswiderstand derselben:

$$F = Q\pi f\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{M_1}\right)$$

oder wenn man für $\frac{1}{m_1}$ und $\frac{1}{M_1}$ die Werthe aus (2) einführt:

$$F = Q \pi f \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{S}\right) \frac{R}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Es handelt sich also nur noch um die Berechnung der Seiten der Ergänzungskegel aus r, R und α.

Nun ist:

$$\frac{1}{S} = \frac{\cos \beta}{R}, \qquad \frac{1}{s} = \frac{\cos \gamma}{r}$$

wobei β und γ die Winkel sind, welche die Berührungslinie O B der Grundkegel mit den Axen bildet. Führt man diese Werthe in (3) ein, so erhält man, mit Berücksichtigung dass $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$ ist:

$$F = Q \pi f \left(\frac{\cos \beta}{M} + \frac{\cos \gamma}{m}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Winkel β und γ hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \beta + \gamma = \alpha \\ \frac{R}{r} = \frac{M}{m} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \beta = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \dfrac{m}{M}} \\[2ex] \operatorname{tang} \gamma = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \dfrac{M}{m}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und daraus folgt wegen $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \gamma}}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \beta = \dfrac{\dfrac{\cos \alpha}{m} + \dfrac{1}{M}}{\sqrt{\dfrac{1}{M^2} + \dfrac{1}{m^2} + 2 \dfrac{1}{M} \dfrac{1}{m} \cos \alpha}} \\[4ex] \cos \gamma = \dfrac{\dfrac{\cos \alpha}{M} + \dfrac{1}{m}}{\sqrt{\dfrac{1}{M^2} + \dfrac{1}{m^2} + 2 \dfrac{1}{M} \dfrac{1}{m} \cos \alpha}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Führt man diese Werthe in (4) ein, so findet man nach einigen ganz gewöhnlichen Reduktionen:

$$F = Q \pi f \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Der Werth der Wurzelgrösse ist kleiner als $\frac{1}{M} + \frac{1}{m}$ so lange α nicht gleich Null ist. Hieraus folgt nun, dass die Reibung einer Kegelräder-Verzahnung noch kleiner ist, als die einer Stirnräder-Verzahnung. Der Unterschied ist jedoch von keiner praktischen Bedeutung, weil überhaupt die grössten Beträge dieser Reibung (für $\alpha = 0$) sehr klein sind.

Dieser geringe Zahn-Reibungswiderstand ist von sehr grosser praktischer Wichtigkeit, nicht allein wegen des Kraftverlustes, sondern insbesondere wegen der geringen Abnützung. Versieht man also die Räder mit hinreichend vielen, richtig geformten, glatt bearbeiteten Zähnen und fettet dieselben noch überdies reichlich ein, so werden solche Räder einen kaum merklichen Kraftverlust verursachen, werden sich die Zähne lange conserviren und wird man also eine andauernde sanfte Bewegung erhalten.

Widerstände eines Rollentriebes. Bei einem Riementrieb werden die Axen der Rollen durch die Riemenspannungen heftig in die Lager gedrückt, wodurch eine nicht unbeträchtliche Reibung entsteht. Wir haben Seite 188 gezeigt, dass die Spannung im führenden Riemenstück in der Regel zweimal, und im geführten Riemenstück genau so gross ist, als die auf den Rollenumfang reduzirte Kraft Q, welche übertragen wird.

Nennt man nun $D\,D_1$ die Durchmesser der Rollen, $d\,d_1$ die Durchmesser der Wellen, f den Reibungscoeffizienten, so wird jede der beiden Axen mit einer Kraft $2\,Q + Q = 3\,Q$ in die Lager gepresst, ist demnach die Kraft, welche an dem Rollenumfang wirken muss, um die aus diesen Pressungen entstehende Reibung zu überwinden

$$3\,Q f \left(\frac{d}{D} + \frac{d_1}{D_1}\right)$$

Wird durch die Rolle die ganze Kraft übertragen, die in der treibenden Welle vorhanden ist, so sind die Werthe von $\frac{d}{D}$ und $\frac{d_1}{D_1}$ mindestens $\frac{1}{7}$, wird nur ein Theil dieser Kraft übertragen, so sind diese Quotienten noch grösser. Nehmen wir $f = 0{\cdot}1$, so wird für diese günstigsten Werthe von $\frac{d}{D}$ und $\frac{d_1}{D_1}$ die obige Reibung $= \frac{1}{16}$, beträgt also unter den günstigsten Umständen viel mehr als eine Zahnreibung. Diese Rollentriebe sind demnach hinsichtlich des Kraftverlustes, den sie durch Reibung verursachen, nicht sehr gut und jedenfalls nachtheiliger als Räderübersetzungen.

Reibung einer Transmission durch ihr Gewicht. Es ist von einigem Interesse, zu untersuchen, ob leichte schnell laufende oder ob schwere langsam laufende Transmissionen durch ihr Gewicht grösseren Reibungswiderstand verursachen.

Nennen wir L die Länge einer Transmissionswelle, d ihren Durchmesser in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen der Welle in einer Minute, γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem die Welle besteht, f den Reibungscoefficienten, N den Effekt, welchen die Welle überträgt.

Nun ist $\frac{d^2 \pi}{4} L \gamma$ das Gewicht der Welle, $\frac{d \pi n}{60 \times 100}$ die Umfangsgeschwindigkeit in Metern, demnach

$$L \frac{d^2 \pi}{4} \gamma \frac{d \pi n}{60 \times 100} f = e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

der Effekt, welcher der Reibung entspricht. Ist nun die Welle der Kraft gemäss construirt, so ist:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Eliminirt man aus (1) und (2) d, so folgt:

$$e = \frac{\pi^2 \gamma (16)^3}{4 \times 60 \times 100} L f N$$

oder weil $75 N = E$ ist:

$$\frac{e}{E} = \frac{\pi^2 \gamma (16)^3}{4 \times 60 \times 100 \times 75} L f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Für Schmiedeeisen ist $\gamma = 0{\cdot}0075$ und dann wird sehr nahe:

$$\frac{e}{E} = \frac{L f}{6000} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass das Verhältniss zwischen dem Effekt e, der durch Reibung verloren geht und dem Effekt E, welcher auf die Welle einwirkt, für alle richtig proportionirten Transmissionen einerlei Werth hat, dass also hinsichtlich der Reibung dünne und schnell laufende Transmissionen eben so viel Verlust verursachen, wie dicke und langsam laufende.

Bestimmung eines Annäherungsausdruckes von der Form $\alpha x + \beta y$ für die irrationale Formel $\sqrt{x^2 + y^2}$. Die Berechnung der Reibungswiderstände zusammengesetzter Maschinengliederungen werden meistens sehr complizirt, weil die zwischen den Bestandtheilen herrschenden Pressungen durch irrationale Formeln von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ ausgedrückt erscheiuen. Es ist daher sehr wünschenswerth, statt eines solchen irrationalen Ausdruckes einen rationalen von der Form $\alpha x + \beta y$ substituiren zu dürfen, und es bietet sich demnach die Frage dar, wie die Constanten α und β genommen werden sollen, damit der Rechnungsfehler, den man begeht, wenn man nach der rationalen, statt nach der irrationalen Formel rechnet, im Allgemeinen möglichst klein ausfällt. *Poncelet* hat diese Aufgabe zuerst gestellt und für gewisse spezielle Fälle durch geometrische Betrachtungen gelöst. Wir werden diese Aufgabe allgemein und auf analytische Weise so lösen, dass wir die absolut besten Werthe von α und β bestimmen.

Wir nehmen an, man wisse nicht wie gross x und y sind, wohl aber innerhalb welcher Grenzen das Verhältniss $\frac{x}{y}$ liege. Weiss man z. B., dass in allen speziellen Fällen eines vorliegenden Problems $y > x$ ist, so weiss man, dass alle möglichen Werthe von $\frac{x}{y}$ zwischen 0 und 1 liegen, dass also 0 und 1 die Grenzen sind, innerhalb welchen der Quotient $\frac{x}{y}$ liegt.

Shreiben wir $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$, so wird $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ und $\alpha x + \beta y = r (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)$ und dann ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (\alpha x + \beta y) = r \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)\right] = f$$

der Fehler, den man begeht, wenn man statt der irrationalen Formel die rationale gebraucht.

Nun ist $\frac{x}{y} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tang} \varphi$, wir können daher die gegebenen Grenzen von $\frac{x}{y}$ ausdrücken durch die Tangenten $\operatorname{tang} \varphi_1$ und $\operatorname{tang} \varphi_0$, gewisser Winkel φ_1 und φ_0.

Die absolut besten Werthe von α und β sind nun diejenigen, für welche der mittlere Werth des Fehlerquadrates ein Minimum wird. Nun ist

$$f^2 = r^2 \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ferner der mittlere Werth T von dem Quadrat dieses Fehlers innerhalb der Grenzen φ_1 und φ_0:

$$\frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right]^2 d\varphi = T$$

Die Entwickelung dieses Ausdruckes gibt:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \times$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[1 + \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + 2\,\alpha\,\beta \sin \varphi \cos \varphi - 2\,\alpha \sin \varphi - 2\,\beta \cos \varphi \right] d\varphi \quad (2)$$

Wegen

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \qquad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

ist

$$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$$

und dann ist noch:

$$\int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi)$$

Vermittelst dieser Formeln wird nun:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \left\{ \begin{aligned} & \varphi_1 - \varphi_0 + \alpha^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0) \right] \\ & \qquad + \beta^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(2 \sin \varphi_1 - \sin 2\varphi_0) \right] \\ & \qquad + \frac{1}{2}\,\alpha\,\beta \left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1 \right] \\ & \qquad - 2\,\alpha \left[\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1 \right] \\ & \qquad - 2\,\beta \left[\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die vortheilhaftesten Werthe von α und β sind nun diejenigen, für welche $\frac{dT}{d\alpha} = o$ und $\frac{dT}{d\beta} = o$ wird.

Durch Differenziation des Ausdruckes für T nach α und β findet man:

$$\frac{dT}{d\alpha} = o = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ + \frac{1}{2}\beta\left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ - 2\left[\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1\right] \end{array} \right\} . \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\beta} = o = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ + \frac{1}{2}\alpha\left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ - 2\left[\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0\right] \end{array} \right\} . \quad (5)$$

Berücksichtiget man die bekannten Formeln für die Summe und Differenzen der Sinuse und Cosinuse, so erhalten die Ausdrücke (4) und (5) folgende Formen:

$$\alpha\left[(\varphi_1 - \varphi_0) - \cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0)\right]$$
$$+ \beta\sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) = 4\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$$

$$\beta\left[(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0)\right]$$
$$+ \alpha\sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) = 4\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$$

und hieraus findet man durch gewöhnliche Auflösung und Reduktion:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 2\,\dfrac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \\[2ex] \beta = 2\,\dfrac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

und somit sind die besten Werthe von α und β bestimmt und wir erhalten demnach für $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Annäherungsformel:

$$\sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$2 \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin (\varphi_1 - \varphi_0)} x + 2 \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin (\varphi_1 - \varphi_0)} y \quad (7)$$

Weiss man, dass $\frac{x}{y} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tang } \varphi$ zwischen 0 und 1 liegt, wass der Fall ist, wenn bekannt wäre, dass $y > x$ ist, so sind die Grenzen von φ, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und dann findet man aus (7):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin \frac{\pi}{4}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin \frac{\pi}{4}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{\cdot}393 \, x + 0{\cdot}947 \, y$$

Ist man über das Verhältniss $\frac{x}{y}$ gar nicht unterrichtet, kann es also jeden beliebigen positiven Werth haben, so sind die Grenzen von φ, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und dann wird der Annäherungswerth (7):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 0 + \text{sio } \frac{\pi}{2}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0^0}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin \frac{\pi}{2}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{\cdot}777 \, (x + y)$$

B. Steifheit der Seile.

Steifheit der Seile. Um eine Rolle A, Fig. 2, Tafel XV., die mit Zapfen versehen ist, ist ein Seil geschlungen, an welchem eine Last Q hängt. Es soll die Kraft P bestimmt werden, die am freien Ende ziehen muss, um die Last zu heben und die Steifheit des Seiles wie auch die Axenreibung zu überwinden. Wegen der Steifheit des Seiles bilden die mit der Rolle nicht in Berührung stehenden Seilstücke keine geraden Linien, sondern krumme Linien, zu welchen die Richtungen von P und Q Assypmtoten sind.

Fällt man von dem Mittelpunkt der Rolle aus Perpentikel auf die nach aufwärts verlängerten Richtungen von Q und P, so ist das erstere (q) grösser, dass letztere (p) kleiner als der Halbmesser der Rolle + der halben Seildicke, denn da wo das Seil sich aufwickelt, muss es krumm gebogen, und da wo es sich abwickelt, muss es gerade gebogen werden. Für den Gleichgewichtszustand ergibt sich nun Folgendes: Nennen wir δ den Durchmesser des Seiles, Δ den Durchmesser des Zapfens der Rolle, D ihren Durchmesser, so ist $(P + Q) f$ die am Umfang des Zapfens wirkende Reibung und $(P + Q) f \frac{\Delta}{2}$ das statische Moment derselben; man hat daher:

$$P p = Q q + (P + Q) f \frac{\Delta}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hieraus findet man:

$$P - Q = Q \left(\frac{\frac{q}{p} - 1 + f \frac{\Delta}{p}}{1 - f \frac{\Delta}{2 p}} \right) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Dieser genaue Ausdruck würde die zur Bewältigung der Steifheit und der Zapfenreibung erforderliche Kraft $P - Q$ bestimmen, wenn p und q bekannt wäre, allein diese Grössen lassen sich für ein so complizirtes Gebilde wie ein Seil ist und bei seinem unvollkommenen Elastizitätszustand nicht wohl durch Rechnung verlässlich bestimmen; man muss daher zu Annäherungen und Experimenten seine Zuflucht nehmen. Derlei Versuche zur Bestimmung von $\frac{p}{q}$ sind von *Eitelwein* und *Coulomb* angestellt worden. Die von *Coulomb* sind wohl die genaueren und vermittelst derselben findet man, dass man annähernd nehmen darf:

$$\frac{q}{p} - 1 = 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} \quad \left\{ \begin{aligned} &P p = Q . q \\ &P = Q + S \\ &(Q + S) p = Q q \\ &S = \frac{q - p}{p} Q = \left(\frac{q}{p} - 1\right) Q \end{aligned} \right.$$

vorausgesetzt, dass δ wie D in Centimetern ausgedrückt wird. Führt man diesen Werth in (2) ein und erlaubt sich $f \frac{\Delta}{2 p}$ gegen 1 ganz zu vernachlässigen, ferner in den Quotienten $f \frac{\Delta}{p}$ statt $p, \frac{D}{2}$ zu setzen, so wird:

$$P - Q = Q \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f \frac{\Delta}{D} \right) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Diese Formel kann freilich nicht sehr genau sein und jedenfalls nur für Seile passen, die sich in jeder Hinsicht in einem gewöhnlichen mittleren Zustand befinden, denn diese Steifheit hängt streng genommen von sehr vielen Verhältnissen ab. Sie richtet sich nach der Beschaffenheit, Festigkeit, Elastizität, Länge der Elementarfasern des Hanfes, nach der Anfertigungsweise des Seiles, namentlich nach der stärkeren oder schwächeren Zwirnung der Schnüre und

Leinen, ferner nach dem Alter des Seiles, nach den Substanzen, von welchen es mehr oder weniger durchdrungen ist, namentlich von Wasser, Seife, Oel, Theer u. s. w., es ist also selbstverständlich, dass von einer genauern Berechnung der Steifheit keine Rede sein kann, und dass aber auch eine genauere Berechnung keinen Werth haben kann, weil man ja doch bei Verwendung eines Seiles keine weitläufigen Prüfungen und Untersuchungen über alle seine Qualitäten anstellen kann noch anstellen will.

Für den Steifheitswiderstand der Drahtseile habe ich aus einigen Versuchen gefunden, dass derselbe durch

$$0{\cdot}58\ Q\ \frac{\delta^2}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ausgedrückt werden kann. Da bei gleicher Festigkeit der Durchmesser eines Drahtseiles halb so gross ist, als der eines Hanfseiles, so stellt sich heraus, dass der Steifheitswiderstand des Drahtseiles kleiner ist, als der eines Hanfseiles, vorausgesetzt, dass beide Seile gleich fest sind.

Theoretische Bestimmung des Steifheitswiderstandes der Seile. Denkt man sich das Material, aus welchem das Seil besteht, gleichförmig im Innern vertheilt (was bei einem Hanfseil nahe, bei einem Drahtseil weniger genau richtig ist), so kann man ein Seil als einen elastischen Stab ansehen und der Steifheitswiderstand wird dann durch die Kraft bestimmt, welche erforderlich ist, um das anfänglich gerade Seil nach dem Umfang der Rolle krummlinig zu biegen.

Im ersten Abschnitt haben wir Seite 53 für die Wirkungsgrösse W, welche erforderlich ist, um einen anfänglich geraden Stab kreisbogenförmig zu biegen, folgenden Ausdruck gefunden:

$$W = \frac{\varepsilon\,\mu\,l}{2\,R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei bedeutet: ε den Modulus der Elastizität des Materials, l die Länge des Stabstückes, das krummlinig gebogen worden ist, μ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf eine Drehungsaxe, die durch den Schwerpunkt des Stabquerschnittes geht und auf der Biegungsebene senkrecht steht, R den Halbmesser des Kreises, nach welchem der Stab gebogen wird.

Bezeichnet man den Steifheitswiderstand mit S, so wirkt derselbe durch einen Weg l, wenn sich ein Seilstück von der Länge l aufwickelt, also krumm gebogen wird, die Arbeit ist demnach $S\ l$ und sie ist gleich zu setzen obigem Werth von W, d. h. man hat $W = S\,l$. Setzt man für W seinen Werth und lässt l weg, so findet man:

$$S = \frac{\varepsilon\,\mu}{2\,R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Für ein rundes Seil vom Durchmesser δ ist $\mu = \frac{\pi}{64}\,\delta^4$.

Nennt man D den Durchmesser der Rolle, so ist $D = 2\,R$, und dann wird:

$$S = \frac{\pi}{32}\,\varepsilon\,\frac{\delta^4}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Für ein flaches Seil von einer Dicke δ und Breite β ist $\mu = \frac{1}{12}\,\beta\,\delta^3$ und dann wird:

$$S = \frac{1}{6}\,\varepsilon\,\beta\,\frac{\delta^3}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Nach diesen theoretischen Ergebnissen (welche von den empirischen Regeln, die *Prony* und *Eitelwein* aufgestellt haben, total abweichen) ist der Steifheitswiderstand von der Seilspannung ganz unabhängig, dem Quadrat des Rollendurchmessers verkehrt, und bei einem runden Seil der vierten Potenz des Seildurchmessers direkt proportional. Dieser Widerspruch zwischen den theoretischen und empirischen Regeln deutet darauf hin, dass die Voraussetzung, von welcher wir in unserer Theorie ausgegangen sind, dass nämlich das Seil wie ein homogener elastischer Stab angesehen werden dürfe, nicht ganz naturgemäss ist. Es mag aber auch sein, dass die empirischen Regeln unrichtig sind. Wahrscheinlich ist es nicht wahr, dass der Steifheitswiderstand der Seilspannung proportional ist.

Genauere Versuche werden in der Folge entscheiden, ob die Empirie oder ob die Theorie der Wahrheit näher liegt.

Bestimmung der Seilkurve. Wir wollen uns noch die Aufgabe vorlegen, die Gestalt eines sich auf einer Rolle aufwickelnden Seiles zu bestimmen.

Es sei, Fig. 3, Tafel XV., $A\,B\,m\,m_1$ die Axenkurve des Seiles, B_1 der Ort, wo das Anlegen des Seiles an die Rolle beginnt. Nennen wir $\widehat{A\,O\,B} = \alpha$, $\overline{AO} = \overline{OB} = R$, $\overline{O\,p} = x$, $\overline{m\,p} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m der Axenkurve, $\overline{AC} = a$ die Länge des Perpentikels, das vom Mittelpunkt O auf die Richtung der Spannungskraft Q gefällt werden kann, ϱ den Krümmungshalbmesser, welcher dem Punkt m der Axenkurve entspricht, μ das Trägheitsmoment eines

Seilquerschnittes in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und auf der Ebene der Figur senkrecht steht. Setzt man zur Abkürzung

$$m = \frac{Q}{\varepsilon \mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so ist vermöge Gleichung 4, Seite 50, die Differenzialgleichung der Axenkurve

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = m (y - a) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = a + \mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m} x} + \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m} x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Hieraus folgt durch Differenziation:

$$\frac{d y}{d x} = \sqrt{m} \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m} x} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m} x} \right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

In diesen Gleichungen (3) und (4) sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die zwei Constanten der Integration.

Da die Kurve durch den Punkt B gehen muss, ist

$$\text{für } x = - R \cos \alpha,\; y = R \sin \alpha,\; \frac{d y}{d x} = \operatorname{cotg} \alpha,\; - \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{R}$$

Demnach erhalten wir vermöge (2), (3), (4):

$$\left.\begin{array}{l} m (a - R \sin \alpha) = \frac{1}{R} \\[2ex] \operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{m} \left(\mathfrak{B}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} - \mathfrak{C}\, e^{+\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \right) \\[2ex] R \sin \alpha = a + \mathfrak{B}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} + \mathfrak{C}\, e^{+\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Nennt man x_1 die Abscisse des Punktes m_1, in welchem die Last angehängt ist, β den in der Regel sehr kleinen Winkel, den die zum Punkt m_1 gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet, so ist:

$$\text{für } x = x_1,\; y = a,\; \frac{d y}{d x} = \operatorname{tang} \beta$$

Demnach hat man noch:

$$\left.\begin{aligned} a &= a + \mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} + \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ \operatorname{tang} \beta_1 &= \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1}\right) \sqrt{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (6)$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (5) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos\alpha} \left[\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} + (R \sin\alpha - a)\right] \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos\alpha} \left[\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - (R \sin\alpha - a)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (7)$$

oder wenn man für $R \sin\alpha - a$ den aus der ersten der Gleichungen (5) folgenden Werth $-\frac{1}{mR}$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos\alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{mR}\right) \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos\alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{mR}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (8)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = - \frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{mR}}{\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{mR}}\, e^{2\sqrt{m}\, R \cos\alpha} \quad \ldots\ldots \; (9)$$

Aus den Gleichungen (6) folgt dagegen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{m}}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{m}}\, e^{+\sqrt{m}\, x_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; (10)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = -\, e^{-2\sqrt{m}\, x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (11)$$

Setzt man die Werthe von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, welche die Ausdrücke (9) und (11) darbieten, einander gleich, so folgt:

$$e^{-2\sqrt{m}\,x_1} = e^{2\sqrt{m}\,R\cos\alpha}\,\frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m\,R}}{\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m\,R}} \quad . \; . \; (12)$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel α oder den Anlegepunkt B_1.

Nachdem α bestimmt ist, ergeben sich die übrigen unbekannten Constanten des Problems auf folgende Weise:

Die Gleichungen (6) geben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m\,R}\right) \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m\,R}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (13)$$

Die erste der Gleichungen (5) gibt:

$$a = R\sin\alpha + \frac{1}{m\,R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Die zweite der Gleichungen (6) gibt endlich:

$$\operatorname{tang}\beta = \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\,x_1} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\,x_1}\right)\sqrt{m} \quad . \; . \; . \; (15)$$

Diese Resultate werden bedeutend einfacher, wenn wir annehmen, dass das Seil, an welchem die Last hängt, sehr lang ist. In diesem Falle ist x_1 sehr gross, und wenn auch m einen beträchtlichen Werth hat (was voraussetzt, dass das Seil biegsam und ziemlich stark gespannt ist), so wird $e^{-\sqrt{m}\,x_1}$ verschwindend klein oder annähernd gleich Null.

Setzt man aber in den Ausdrücken (12) bis (15) $e^{-\sqrt{m}\,x_1} = 0$, so erhält man:

wegen (12) $\quad \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m\,R} = 0$

oder

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{R\sqrt{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} = \frac{R\sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ferner wegen (13):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= o \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \times \frac{2}{m R} = -\frac{1}{m R} e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{aligned}\right\} (18)$$

Die Gleichung (14) gibt, wenn man für $\sin \alpha$ obigen Werth (17) einführt:

$$a = \frac{R^2 \sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} + \frac{1}{m R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Endlich wird wegen $\mathfrak{B} = o$ und $e^{-\sqrt{m}\, x_1} = o$:

$$\operatorname{tang} \beta = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Da für ein ziemlich biegsames und stark gespanntes Seil $R^2 m$ gegen die Einheit eine kleine Grösse ist, so kann man setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 m + 1}} = \frac{1}{R\sqrt{m}\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 m}}} = \frac{1}{R\sqrt{m}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R^2 m}\right)$$

Dann wird:

$$a = R\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R^2 m}\right] + \frac{1}{m R} = R + \frac{1}{2}\,\frac{1}{m R} \quad . \quad . \quad (21)$$

Nennen wir S den Steifigkeitswiderstand, so ist:

$$Q\, a = (Q + S)\, R$$

demnach:

$$S = Q\,\frac{a - R}{R}$$

oder wegen (21):

$$S = \frac{Q}{2\, m\, R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Setzt man für m seinen Werth aus (1), so folgt:

$$S = \frac{\varepsilon\, \mu}{2\, R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

welcher Ausdruck mit dem Seite 297 auf anderem Wege gefundenen übereinstimmt.

Vermöge (1) und (2) wird:

$$a = R + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\mu}{R\,Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Endlich wird wegen (17) annähernd:

$$\sin\alpha = 1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\mu}{Q\,R^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Diese zwei letzteren Gleichungen bestimmen das Hinaushängen a der Last und den Anlegewinkel α.

Kettenaufwicklung. Die Aufwicklung so wie auch die Abwicklung einer im gespannten Zustande befindlichen Kette auf eine Welle oder von einer Welle verursacht einen Widerstand, ähnlich wie die Biegung eines Seiles.

Nennt man, Fig. 4, Tafel XV., δ den Durchmesser des Ketteneisens, D den Durchmesser der Welle, auf welche die Kette aufgewickelt wird, e die innere Länge eines Kettengliedes, α den Winkel, den die Richtungen zweier unmittelbar auf einander folgenden Kettenglieder des aufgewickelten Theils der Kette mit einander bilden, Q die Last, welche an dem Kettenstück hängt, das aufgewickelt wird, f_1 den Reibungscoeffizienten für die Reibung zwischen je zwei Kettengliedern, d den Durchmesser des Zapfens der Rolle oder Welle, f den Coeffizienten für die Zapfenreibung, P die Kraft, welche an dem sich abwickelnden Kettenstück wirken muss, um die Last und die Widerstände zu überwinden.

Nun ist $e = \left(\frac{D}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\alpha$, oder $\alpha = \frac{2\,e}{D+\delta}$. Ist ferner $\alpha\,\frac{\delta}{2} = \frac{2\,e}{D+\delta}\times\frac{\delta}{2} = \frac{e\,\delta}{D+\delta}$ der Weg, durch welchen die Reibung $Q\,f_1$ überwunden werden muss, wenn ein Kettenglied gegen das benachbarte um den Winkel α verstellt werden soll, ist demnach $Q\,f_1\,\frac{e\,\delta}{D+\delta}$ die Wirkungsgrösse, welche der Ueberwindung dieser Reibung entspricht. Nennt man für einen Augenblick X die Kraft, welche in der Entfernung $\frac{D}{2}+\frac{\delta}{2}$ von der Axe continuirlich durch den Weg e wirken muss, um jene Wirkung hervorzubringen, so hat man:

$$X\,e = Q\,f_1\,\frac{e\,\delta}{D+\delta}$$

demnach $X = Q f_1 \frac{\delta}{D + \delta}$. Dies ist also die Kraft, welche zur Aufwicklung der Kette nothwendig ist.

Wenn das eine Ende einer Kette aufgewickelt, das andere Ende aber gleichzeitig abgewickelt wird, ist der Widerstand doppelt so gross, als in dem Fall, wenn nur Aufwicklung stattfindet.

Da jederzeit δ gegen D vernachlässigt werden kann, so erhalten wir zur Berechnung des Kettenwiderstandes folgende Ausdrücke:

a. Wenn die Kette nur aufgewickelt wird . . . . $Q f_1 \frac{\delta}{D}$

b. Wenn das eine Ende der Kette aufgewickelt, das andere Ende aber gleichzeitig abgewickelt wird $2 Q f_1 \frac{\delta}{D}$

Diese Widerstände sind klein, und von der Länge der Kettenglieder nicht abhängig.

Vergleichen wir diesen Widerstand mit dem Steifheitswiderstand eines Hanfseiles von gleicher Tragkraft, so ist für letzteres der Widerstand gleich

$$0{\cdot}26 \frac{\delta_1^2}{D_1} Q$$

Allein es ist (Resultate S. 38) $\delta_1 = 0{\cdot}113 \sqrt{Q_1}$ und (Resultate S. 39) $\delta = 0{\cdot}028 \sqrt{Q}$, demnach verhält sich das Seil zur Kette wie $0{\cdot}26 \frac{Q}{D_1} (0{\cdot}113)^2 Q : 2 Q f_1 \frac{0{\cdot}028 \sqrt{Q}}{D} = 0{\cdot}59 \frac{D}{D_1} \sqrt{Q} : 1$. Sind die Rollen gleich gross, d. h. ist $D = D_1$, so fällt der Seilwiderstand grösser aus, als der Kettenwiderstand wenn $\sqrt{Q} > \frac{1}{0{\cdot}59}$, d. h. wenn $Q > 3$ Kilogramm. In allen Fällen der Anwendung ist aber Q bedeutend grösser als 3, fällt demnach der Seilwiderstand bedeutend grösser aus, als der Kettenwiderstand.

Berücksichtigt man bei einer Kette, die sich um eine Rolle auf- und abwickelt nebst dem Kettenwiderstand auch die Axenreibung der Rolle, so ist die Kraft P, welche am Kettenende wirken muss, das sich abwickelt:

$$P = Q \left(1 + 2 f_1 \frac{\delta}{D} + 2 f \frac{d}{D}\right)$$

Verlangt man, dass $\frac{P}{Q}$ einen gewissen Werth $\mathfrak{p}$ erhalten soll, so ist:

$$\mathfrak{p} = 1 + 2 f_1 \frac{\delta}{D} + 2 f \frac{d}{D}$$

und hieraus folgt:

$$D = \frac{2\, f_1\, \delta + 2\, f\, d}{p - 1}$$

Allein es ist (Resultate Seite 39) $\delta = 0\cdot028\, \sqrt{Q}$, (Resultate Seite 46) $d = 0\cdot12\, \sqrt{Q}$ und wenn $f = f_1 = 0\cdot1$ gesetzt wird, so folgt:

$$D = 0\cdot0296\, \frac{\sqrt{Q}}{p - 1}$$

Diese Gleichung gibt:

für $p =$	1·04	1·06	1·08	1·10
$\frac{D}{\sqrt{Q}} =$	0·74	0·43	0·37	0·30

Der Wälzungswiderstand. Unter Wälzungswiderstand versteht man denjenigen Widerstand, welcher sich zu erkennen gibt, wenn man auf einer ebenen aber mehr oder weniger weichen und nicht elastischen Bahn einen cylindrischer Körper fortrollen will.

Auf einer vollkommen elastischen Bahn, die immer wiederum sich selbst aufrichtet, nachdem sie zusammengedrückt worden ist, kann ein derartiger Widerstand gar nicht vorkommen.

Es sei, Fig. 5, Tafel XV., C der Mittelpunkt des fortrollenden Körpers, E A B F die Bahn. Bis A hin ist sie bereits durch den rollenden Körper zusammengedrückt, B F ist die noch im natürlichen Zustand befindliche Bahn, K die Kraft, welche nach horizontaler Richtung gegen die Axe der Rolle drücken muss, um den Widerstand zu bewältigen, R der Halbmesser $CA = Cm = CB$ des rollenden Körpers, $\widehat{ACB} = \alpha$ der Winkel, welcher dem Einsenken ($\xi = AD$) des Körpers in das Bahnmaterial entspricht. Da jedenfalls in allen Fällen der Anwendung der Bogen AB oder der Winkel α eine sehr kleine Grösse ist, so wird man sich der Wahrheit so ziemlich nähern, wenn man annimmt, dass das Bahnmaterial an irgend einer Stelle m dem Eindringen des Cylinders einen Widerstand entgegensetzt, welcher der Tiefe des Punktes m unter B F proportional ist.

Nennt man $\widehat{ACm} = \varphi$, so ist:

$$\overline{mn} = \xi - R\,(1 - \cos\varphi)$$

Behandelt man α und φ wie unendlich kleine Grössen, so darf man

$$1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}\,\varphi^2$$

setzen und dann wird:

$$\overline{mn} = \xi - \frac{1}{2} R \varphi^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nennt man nun β die Breite der Walze, P die Kraft, mit der sie gegen die Bahn gepresst wird, λ einen Coeffizienten, durch welchen die Zusammenpressbarkeit des Bahnmaterials gemessen wird, so ist mit hinreichender Genauigkeit:

$$\int_0^\alpha \lambda \beta (\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2) R d \varphi$$

die Summe aller Pressungen des Bahnmaterials gegen die Walze, und

$$\int_0^\alpha \lambda \beta (\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2) R d \varphi R \sin \varphi$$

die Summe der Momente aller Pressungen in Bezug auf eine durch A gehende Drehungsaxe; wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\alpha \lambda \beta (\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2) R d \varphi &= P \\ \int_0^\alpha \lambda \beta (\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2) R d \varphi R \sin \varphi &= K R \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (2)$$

wobei jedoch φ statt $\sin \varphi$ gesetzt werden darf.

Die Integrale dieser Gleichungen sind unter dieser Voraussetzung:

$$\left.\begin{aligned} P &= \lambda \beta R (\xi \alpha - \frac{1}{6} R \alpha^3) \\ K &= \lambda \beta R (\xi \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{8} R \alpha^4) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Allein es ist $R (1 - \cos \alpha) = \xi$ oder annähernd $\xi = \frac{1}{2} R \alpha^2$. Führt man diesen Werth in (3) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \lambda \beta R^2 \alpha^3 \\ K &= \frac{1}{8} \lambda \beta R^2 \alpha^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Und hieraus folgt durch Elimination von α:

$$K = \frac{1}{8}(3)^{\frac{4}{3}} \frac{P^{\frac{4}{3}}}{\lambda^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} R^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dieser Rollungswiderstand fällt also klein aus, wenn λ, β und R gross sind, d. h. wenn die Bahn hart ist, und wenn sowohl die Radbreite als auch der Radhalbmesser gross ist.