Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Erster Abschnitt. Elastizität und Festigkeit der Materialien

ERSTER ABSCHNITT.

Elastizität und Festigkeit der Materialien.

Formänderungen eines Körpers. Der geometrische Zusammenhang aller Bestandtheile einer Maschine wird immer unter der Voraussetzung ausgedacht, dass diese Bestandtheile ihre Formen und Abmessungen unter der Einwirkung der äusseren Kräfte entweder gar nicht oder nur ganz unmerklich ändern. Wir brauchen also zur Realisirung unserer technisch-construktiven Gedanken eines sehr starren Materials, während die Natur gerade umgekehrt zu ihren organischen Bildungen stets sehr leicht deformirbare, höcht elastische Gebilde in Anwendung bringt; für den Techniker ist es daher von der grössten Wichtigkeit zu wissen, wie die Formen und Dimensionen der einzelnen construktiven Elemente gewählt werden müssen, damit die in denselben durch äussere Kräfte eintretenden Formänderungen so gering ausfallen, dass dadurch der wahre geometrische Zusammenhang nicht merklich geändert wird.

Die Deformirungen, welche in den Körpern durch äussere Kräfte eintreten, richten sich theils nach der Form dieser Körper, theils nach der Angriffsweise der Kräfte. Die einfachsten Aenderungen sind Dehnungen und Zusammendrückungen oder Verdichtungen; etwas zusammengesetzter sind schon Gegeneinanderverschiebungen der Theile eines Körpers; noch verwickelter werden Biegungen, bei welchen theilweise Ausdehnungen, theilweise Zusammendrückungen eintreten, und die Verwindungen, wobei gegeneinander Verschiebungen stattfinden, und zwar in ganz veränderlichem Maasse. Endlich gibt es auch noch Deformirungen, wobei zusammengesetzte innere Vorgänge eintreten. Z. B. gleichzeitige Biegungen und Drehungen.

Ueberschreitet eine Deformirung ein gewisses Maass, so werden entweder alle oder einzelne Atome des Körpers so weit von der relativen Gegeneinanderlagerung, die im natürlichen Zustande des Körpers vorhanden ist, entfernt, dass eine Trennung der Atome eintritt. Man sagt dann, die Festigkeit des Materials sei überwunden.

Die Verhältnisse der Elastizität und der Festigkeit der Materialien können auf rationellem Wege untersucht werden, indem man von der atomistischen Anschauungsweise ausgeht und darauf die allgemeinen Prinzipien des Gleichgewichts der Kräfte anwendet, oder man kann einen halbrationellen Weg einschlagen, indem man von annähernd wahren Erfahrungsthatsachen ausgeht und darauf Schlüsse baut. Der erstere Weg ist in wissenschaftlicher Hinsicht von viel höherem Werth als der letztere; dieser ist aber viel leichter zu verfolgen, und führt zu leichter anwendbaren Resultaten, die, wenn man sie nicht missbraucht, sondern als Annäherungen betrachtet, die nur unter gewissen Voraussetzungen zulässig sind, recht gute Dienste leisten. Die Hauptthatsachen, auf welche sich die nachfolgende Theorie gründet, ergeben sich durch Ausdehnungs- und Verdichtungs-Versuche, so wie auch durch Verschiebungs-Versuche mit stabförmigen Körpern. Mit diesen Fundamentalversuchen haben wir es also zunächst zu thun.

Ausdehnung stabförmiger Körper.

Empirisches Gesetz. Nimmt man einen stabförmigen Körper, macht das eine Ende desselben fest, und lässt auf das andere Ende eine Kraft nach der Längenrichtung des Stabes einwirken, so entsteht in dem ganzen Stabe eine Ausdehnung, aber auch gleichzeitig nach der Quere des Stabes eine Zusammenziehung, die Ausdehnung ist jedoch viel auffallender als die Zusammenziehung, und letztere kann bei den meisten technischen Aufgaben ganz unberücksichtigt gelassen werden. Wir wollen daher unsere Aufmerksamkeit nur auf die Längenausdehnung richten. Um nun das Ausdehnungsgesetz kennen zu lernen, kann man zweierlei Wege einschlagen: Man kann unmittelbar an das Experimentiren gehen, und Stäbe von verschiedener Abmessung und aus verschiedenem Materiale durch schwächere und stärkere Kräfte wirklich ausdehnen, diese Ausdehnungen genau messen und dann nachsehen, ob sich die Zahlenresultate durch irgend einen mathematischen Ausdruck wiedergeben lassen. Dieser Weg ist nicht der rechte. Wenn man experimentirt bevor man studirt, macht man sich einen Wust von Arbeit, der sich oft nicht bewältigen lässt.

Zweckmässiger ist es, von einer wahrscheinlichen, das Gefühl befriedigenden Annahme auszugehen, und diese durch zahlreiche Versuche zu prüfen. Bestätiget sie sich, so ist man am Ziele; bestätiget sie sich nicht, so kann man dann vielleicht durch eine geringe Modifikation der Annahme seinen Zweck erreichen. „Naturgesetze" wird man auf diesem Wege (dem inductiven) selten finden, dagegen aber hält es nicht schwer, auf diese Weise Regeln aufzustellen, die für die Verfolgung praktischer Zwecke hinreichend genau sind. Wir wollen also auch in Betreff der Ausdehnung der Stäbe eine Annahme machen, und sie sodann durch Versuche prüfen.

Wenn man sich den Vorgang einer Stabausdehnung lebhaft vorstellt, so wird man es als wahrscheinlich finden, dass die Verlängerung e, die in einem Stab, dessen Länge l und Querschnitt a ist, durch eine ausdehnend wirkende Kraft P entsteht, der ausdehnenden Kraft P und Länge l direkt, dem Querschnitt des Stabes dagegen verkehrt proportional sein dürfte, dass aber auch diese Ausdehnung von der Natur des Materials abhängen werde. Wir stellen daher die Hypothese auf:

$$e = \frac{P\,l}{a\,\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in welcher ε ein Coeffizient ist, welcher die Ausdehnsamkeit des Materials zu charakterisiren bestimmt ist. Wir nennen denselben den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht. Unter der Voraussetzung, dass der Ausdruck (1) eine absolute Wahrheit, also ein wirkliches Naturgesetz ausdrückt, würde die Bedeutung des Elastizitätsmodulus ε leicht zu erklären sein. Wenn nämlich (1) absolut richtig ist, so gilt es auch noch, wenn wir $e = l$, $a = 1$ setzen; dann wird $\varepsilon = P$, d. h. ε drückt diejenige Kraft aus, durch welche ein Stab von 1 Quadratcentimeter Querschnitt um so viel ausgedehnt wird, als seine Länge vor der Ausdehnung beträgt.

Wenn der Ausdruck (1) eine Wahrheit ist, so muss man bei Ausdehnungsversuchen mit Stäben, die aus dem gleichen Material bestehen, für ε immer den gleichen Werth finden, wie auch die Grössen e P l a modifizirt werden mögen. Diese Prüfung ist hundert- und tausendfältig gemacht worden, und es hat sich dabei gezeigt, dass zwar (1) kein absolut richtiges Gesetz ausdrückt, dass es jedoch als eine Annäherungsregel angesehen werden kann, so lange die Ausdehnungen eine gewisse, allerdings nicht streng bestimmbare Grenze nicht überschreiten. Man findet nämlich in der That bei schwächeren Ausdehnungen für ε immer den gleichen Werth, wenn das Material nicht geändert wird. Die Regel (1) hört auf mit den Versuchsresultaten zu stimmen, wenn die Ausdehnungskraft ungefähr gleich wird dem dritten Theil der Kraft, welche das Abreissen des Stabes bewirkt. Ueber diese Grenze hinaus nimmt der Werth von ε allmählich nach einem noch nicht empirisch bestimmten Gesetz ab. Da uns für technische Zwecke doch nur schwache Ausdehnungen interessiren, so werden wir von nun an die durch (1) ausgedrückte Regel als eine Basis für unsere folgenden Untersuchungen gelten lassen.

Es ist klar, dass nicht nur jeder Materialgattung, sondern dass jedem individuellen Körper ein besonderer Elastizitätsmodulus entspricht. Die genauen, von Wertheim angestellten Versuche haben auch nachgewiesen, dass der Elastizitätsmodulus, selbst bei der ganz gleichen Substanz, nicht nur mit dem Ausdehnungsgrade derselben, sondern auch mit ihrer Temperatur und überhaupt mit dem in ihrem Innern herrschenden physikalischen Zustand abhängt. Indessen auf alle diese Feinheiten braucht man sich bei den derben Fragen der technischen Praxis nicht zu kümmern, wohl aber muss hervorgehoben werden, dass wenn es sich um grössere wichtigere technische Konstruktionen handelt, welche von der Ausdehnbarkeit des Konstruktionsmaterials abhängen, es sehr rathsam ist, durch besondere Versuche den Elastizitätsmodulus des Materials, mit welchem diese Konstruktionen realisirt werden sollen, zu bestimmen. Für die meisten Konstruktionen, die im Maschinenbau vorkommen, ist es jedoch genügend, den Rechnungen die mittleren Werthe, welche einem bestimmten Material entsprechen, zu Grunde zu legen. Diese mittleren Werthe sind in der Seite 36 der Resultate befindlichen Tafel in der mit ε überschriebenen Rubrik zusammengestellt. Bei Schmiedeeisen variirt der Modulus von 1,500,000 bis 2,500,000, bei Stahl von 2,000,000 bis 2,400,000. Bedenkt man alle die mannigfaltigen mechanistischen, physikalischen und chemischen Prozesse, die mit dem Eisen und Stahl durchgeführt werden, bis sie als Konstruktionsmaterial gebraucht werden, so hat man Ursache sich zu wundern, dass die Abweichungen nicht grösser sind.

Wie schwierig es ist, auf experimentalem Wege über die Natur des Molekularbaues der Körper zu einer gründlichen Einsicht zu kommen, zeigt die Verschiedenheit der Ansichten, zu welchen verschiedene, gleich achtenswerthe Beobachter über die sogenannte Elastizitätsgrenze gekommen sind.

Manche Beobachter haben aus ihren Versuchen zu finden geglaubt, dass wenn die, einen Stab ausdehnende Kraft eine gewisse Grenze nicht überschreitet, der Stab nach Beseitigung der Kraft ganz genau in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, und überhaupt in seinem Innern keine Aenderung erleidet. Diese Grenze hat man die Elastizitätsgrenze genannt. Die genauesten und zahlreichen Untersuchungen, welche in dieser Hinsicht Wertheim angestellt hat, haben jedoch zu der Meinung geführt, dass es eine solche Elastizitätsgrenze nicht gebe, und dass ein Stab, wenn er auch nur wenig ausgedehnt wird, nicht mehr ganz genau in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, wenn man die ausdehnende Kraft beseitigt. Indessen, wenn es auch in rein wissenschaftlicher Hinsicht eine wahre Elastizitätsgrenze nicht gibt, so kann man doch in praktischer Hinsicht von einer solchen sprechen, denn es stimmen die Resultate aller Beobachter darin überein, dass die bleibenden Verlängerungen erst dann merklich werden, wenn die ausdehnende Kraft bei Eisenarten ungefähr die Hälfte, bei Hölzern ungefähr den vierten Theil von demjenigen Werth erreicht, bei welchem das Abreissen erfolgt, dass also wirklich die Konstruktionsmaterialien keine wesentliche Aenderung in der inneren Molekulargruppirung erleiden, wenn sie innerhalb dieser praktischen Elastizitätsgrenze deformirt werden.

Für manche praktische Konstruktionen ist es auch von Wichtigkeit zu wissen, ob die Dauer der Einwirkung einer dehnenden Kraft von Einfluss ist auf die Grösse der Ausdehnung. Nach den zur Entscheidung dieser Frage angestellten Versuchen muss man sie bejahend beantworten. Die Ausdehnung nimmt in der That mit der Dauer der Krafteinwirkung zu, jedoch nur sehr langsam und, wie es scheint, nicht einfach proportional mit der Zeit, sondern in der Art, dass sie sich allmählich einer bestimmten Grenze nähert.

Das Stabausdehnungsgesetz (1) kann noch in einer andern Form ausgesprochen werden. Es ist $\frac{P}{a}$ die Kraft, welche jeden Quadratcentimeter des Stabes spannt. Diese wollen wir die Spannungsintensität nennen und mit J bezeichnen. Der Quotient $\frac{e}{l}$ aus der Ausdehnung und der ursprünglichen Länge drückt die Ausdehnung aus, die jeder Centimeter der Stablänge erlitten hat; wir wollen diesen Quotienten die verhältnissmässige Ausdehnung nennen und mit i bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung können wir statt (1) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{J}{\varepsilon} \\ J &= \varepsilon i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man findet also die verhältnissmässige Ausdehnung, wenn man die Spannungsintensität durch den Modulus der Elastizität dividirt. Man findet ferner die Spannungsintensität, wenn man die verhältnissmässige Ausdehnung mit dem Modulus der Elastizität multiplizirt, und diese beiden Regeln sind richtig, wie gross oder wie klein der Querschnitt des Stabes ist, und wie lang oder wie kurz er auch sein mag.

Diese Regeln leisten uns vortreffliche Dienste bei Untersuchungen, bei welchen die verhältnissmässigen Ausdehnungen an verschiedenen Stellen eines Körpers verschieden sind. Die der Elastizitätsgrenze entsprechende verhältnissmässige Ausdehnung beträgt für Schmiedeeisen $\frac{1}{1250}$, für Gusseisen $\frac{1}{1562}$, für Hölzer $\frac{1}{500}$

Absolute oder Zugfestigkeit der Stäbe.

Die Intensität der Cohäsionskraft kann bestimmt gemessen werden, indem man die Kraft angibt, welche erforderlich ist, um einen Stab von einem Quadratcentimeter Querschnitt abzureissen. Diese Kraft nennt man auch das Maass der absoluten Festigkeit eines Materials. Es gründet sich auf die Erfahrung, dass die zum Abreissen eines Stabes erforderliche Kraft unabhängig ist von der Länge des Stabes und von der Form des Querschnitts, dagegen der Grösse des Querschnittes proportional ist.

Nennt man $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials (oder die dem Abreissen entsprechende Spannungsintensität), K die Kraft, welche erforderlich ist, einen Stab, dessen Querschnitt a Quadratcentimeter beträgt, abzureissen, so hat man:

$$K = \mathfrak{A}\, a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist selbstverständlich, dass dieses $\mathfrak{A}$ für jeden individuellen Körper einen besonderen Werth hat. Die mit K überschriebene Columne der Tafel, Seite 36 der Resultate, enthält den mittleren Werth für verschiedene Materialien. Handelt es sich um ausgedehnte Konstruktionen von Eisen, die grössere Materialmassen erfordern, so wird man oftmals gut thun, mit dem zu verwendenden Material genaue Versuche über seine absolute Festigkeit anzustellen, nm den individuellen Werth der Festigkeit zu erhalten; für die meisten Konstruktionen im Maschinenbau genügt die Kenntniss der mittleren Werthe. Die im Allgemeinen sehr grosse absolute Festigkeit der Metalle richtet sich auch nach den mechanischen und chemischen Prozessen, die bei ihrer Bereitung angewendet wurden. Möglichste Befreiung aller fremdartigen und insbesondere der schlackigen Beimengungen, und mechanische Verdichtung durch äussere Schläge oder Drücke erhöhen die absolute Festigkeit. Daher kommt es, dass alles Eisen in dünnen Stäben in der Regel fester ist, als Eisen in dickeren Stäben, und dass man Eisen in dickeren Stäben nur dadurch in vorzüglicher Qualität erhält, indem man dünnes Stabeisen nimmt, es zusammenschweisst und durch Hammerschläge verdichtet. Nimmt man zur Vergleichung der Festigkeit der Metalle die Festigkeit des Gusseisens (1000) als Einheit an, so ist die des Kanonenmetalls 2·6, die des Schmiedeeisens 3·3 bis 7 (Draht), die des Stahles 7·5 bis 10.

Durch das Verhalten stabförmiger Körper beim Abreissen derselben spricht sich die Natur des innerer Molekularbaues sehr deutlich aus.

Stäbe aus kurzfaserigem Holz (Eichen, Buchen) zeigen bis zum Moment des Reissens hin keine andere Veränderung, als die Ausdehnung. Ist der Riss erfolgt, so erscheinen die Rissflächen kurz zackig. Tafel I., Fig. 1.

Stäbe aus langfaserigem Holz (Tanne, Lerche) zeigen zwar für das Auge keine andere Veränderung als die Ausdehnung, allein so wie sich die Spannungsintensität dem Reissen nähert, hört man das klingende Abreissen einzelner Fasern, dies wiederholt sich bei zunehmender Spannung immer häufiger und häufiger und wenn dann plötzlich der Riss eintritt, zeigen sich die Rissflächen lang zackig. Tafel I., Fig. 2.

Gusseisen und überhaupt alle Gussmetalle zeigen während der Ausdehnung bis zum Reissen keine auffallende Erscheinung, als die allgemeine Ausdehnung selbst. Der Riss erfolgt plötzlich, ohne dass er sich durch irgend etwas ankündigte, und die Rissflächen zeigen dann die mehr oder weniger krystallinischen oder körnigen Gefüge des Materials.

Ganz anders ist das Verhalten des Schmiedeeisens und überhaupt der zäh streckbaren Metalle, z. B. auch des Kupfers. Wird ein Stab aus zähem Schmiedeeisen bis zum Reissen ausgedehnt, so zeigt sich in der Regel, sowie die Spannung eine gewisse Grenze erreicht hat, an irgend einer Stelle des Stabes eine Verdünnung, Fig. 3, des Querschnittes, diese nimmt mehr und mehr zu, ohne dass in den übrigen Theilen des Stabes merkliche Veränderungen vorkommen und wenn endlich der Querschnitt eine gewisse Kleinheit erreicht hat, tritt plötzlich der Riss ein. Die Rissflächen Fig. 4, zeigen sich zäh, faserig, und das Eisen ist vorübergehend stark magnetisch.

Gussstahl verhält sich beim Abreissen ähnlich wie Gusseisen, Schmiedestahl (Steierscher) ähnlich wie Schmiedeeisen, jedoch nicht in dem Grade zähe wie Schmiedeeisen.

In neuerer Zeit hat man die Behauptung aufgestellt, dass das Eisen an Festigkeit verliere, wenn es anhaltend heftigen Erschütterungen und Vibrationen ausgesetzt ist. Es ist auch mehrfach versucht worden, die Richtigkeit dieser Behauptung durch Versuche nachzuweisen. Allein die Sache scheint doch noch nicht spruchreif zu sein, indem die Art und Weise, wie die empirischen Beweise geführt wurden, sehr wohl zu irrigen Schlüssen führen konnte, denn ein Beweis wird nicht durch Thatsachen, sondern durch einen Schluss aus Thatsachen geführt.

Betrachtet man die Sache vom theoretischen Standpunkte aus, indem man von der atomistischen Anschauungsweise ausgeht, so erscheint es allerdings als möglich, ja sogar in gewisser Hinsicht als wahrscheinlich, dass die Behauptung richtig ist. Denn es ist sehr wohl denkbar, dass durch andauernde heftige Erschütterungen eine Aenderung der Gegeneinanderlagerung der Atome eintritt, wodurch ein Uebergang aus einem amorphen Zustand in einen regelmässig kristallinischen herbeigeführt werden kann, und z. B. zähes Schmiedeeisen in sprödes umgewandelt wird. Allein hiermit ist nur eine Möglichkeit, oder theilweise eine Wahrscheinlichkeit ausgesprochen; die Wahrheit kann nur auf induktivem Wege aus einem reichen und verlässlichen Thatsachenmaterial erschlossen werden.

Zusammendrückung kurzer stabförmiger Körper.

Versuche über die Zusammendrückung kurzer Stäbe haben gezeigt, dass das Seite 3 für die Ausdehnung aufgestellte Gesetz auch für die Zusammendrückung gilt, wenn dieselbe eine gewisse Grenze nicht überschreitet und dass sogar innerhalb dieser Grenze der Modulus der Elastizität den gleichen Werth hat, wie für Ausdehnung. Es widerstehen demnach alle Materialien schwächeren Zusammendrückungen genau so, wie schwächeren Ausdehnungen, und es gelten auch hier die Gleichungen:

$$\frac{e}{l} = \frac{P}{a}\frac{1}{\varepsilon}, \qquad i = \frac{J}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Allein wenn die Zusammendrückungen gewisse Grenzen überschreiten, wird der Modulus der Elastizität variabel, und zwar nach einem anderen Gesetz, als bei starken Ausdehnungen, und es verhalten sich in dieser Hinsicht die verschiedenen Materiale verschieden. Bei Schmiedeeisen und bei den verschiedenen Holzarten stimmen die beiden Gesetze des Ausdehnungs- und Zusammendrückungs-Modulus sehr nahe überein; bei Gusseisen dagegen ist das Gesetz für den Zusammendrückungsmodulus sehr verschieden von jenem für die Ausdehnung. Bei starken Aenderungen widersteht nämlich das Gusseisen der Zusammendrückung weit mehr als der Ausdehnung, oder mit andern Worten, es ist schwerer zusammendrückbar als ausdehnbar.

Absolut rückwirkende Festigkeit der Materialien.

Die absolut rückwirkende Festigkeit messen wir durch die Kraft, welche im Stande ist, einen Würfel von einem Quadratcentimeter Querschnitt zu zerdrücken. Diese rückwirkende Festigkeit ist bei Holz die Hälfte, bei Schmiedeeisen $^4/_5$ von der absoluten Festigkeit gegen das Abreissen. Bei Gusseisen ist dagegen die rückwirkende Festigkeit $5^1/_2$mal so gross als die absolute Festigkeit.

Uebersicht der Erfahrungen über Elastizität und Festigkeit der Materialien.

Alles was bisher über die Festigkeit und Elastizitätsverhältnisse der Materialien gesagt wurde, lässt sich durch graphische Darstellung, sowie durch eine tabellarische Zusammenstellung der Erfahrungswerthe am deutlichsten anschaulich machen. Die beiliegende Tabelle ist dem trefflichen Werk von Rebhann, Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, entnommen.

Erfahrungsresultate über die Elastizität und Festigkeit der Materialien.

	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{R}_1$	ε	α_1	β_1
Schmiedeeisen	4040	$\frac{4}{5}\mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\,\mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\,\mathfrak{A}$	2 020 000	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Eisenblech	3636	$\frac{4}{5}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{3}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{3}\mathfrak{A}$	1 779 600	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Eisendraht	6464	$\frac{4}{5}\mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\,\mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\,\mathfrak{A}$	2 181 600	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Gusseisen	1454	$5{\cdot}5\,\mathfrak{A}$	$\frac{4}{9}\mathfrak{A}$	$\frac{4}{3}\mathfrak{A}$	1 010 000	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Tannenholz	970	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	129 280	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Fichtenholz	808	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	121 200	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Kiefern	1050	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	129 280	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Lerchenholz	1131	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	129 280	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Eichenholz	808	$\frac{2}{3}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{3}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	121 200	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$

Es bedeutet:

$\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials.

$\mathfrak{R}$ die absolut rückwirkende Festigkeit.

$\mathfrak{A}_1$ die Spannungsintensität an der Elastizitätsgrenze für Ausdehnung.

$\alpha_1 = \frac{e}{l}$ die verhältnissmässige Ausdehnung an der Elastizitätsgrenze.

$\mathfrak{R}_1$ die Druckintensität an der Elastizitätsgrenze der Zusammendrückung.

β_1 die verhältnissmässige Zusammendrückung an der Elastizitätsgrenze.

ε den Modulus der Elastizität des Materials, innerhalb der Elastizitätsgrenze.

Die Werthe von $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{R}_1$ sind auf $\mathfrak{A}$ bezogen angegeben.

In Figur 5, Tafel I., sind die Intensitäten als Abscissen, die verhältnissmässigen Ausdehnungen und Zusammenpressungen als Ordinaten aufgetragen. Der Maassstab für die Ordinaten ist ein anderer, als der für die Abscissen, und die Kurven, welche die Dehnung und Zusammendrückung darstellen, sind nicht punktweise nach Thatsachen verzeichnet.

Die Kurven gehen natürlich sämmtlich durch die Anfangspunkte der Coordinaten und sind daselbst beinahe geradlinig, indem nach den Thatsachen die verhältnissmäsigen Aenderungen bei schwächeren Kraftintensitäten diesen Intensitäten proportional sind, bis an die Elastizitätsgrenze hin. In der Nähe der Elastizitätsgrenze haben diese Kurven rasche Krümmungen und verlaufen sodann assymptotisch nach der Richtung der Ordinatenaxe.

Für Schmiedeeisen ist:

$\overline{OS} = \mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit. $\overline{OS_1} = \mathfrak{A}_1$ die Spannungsintensität; $s_1 S_1 = \alpha$ die verhältnissmässige Ausdehnung an der Elastizitätsgrenze, und es ist $OS_1 = 0{\cdot}4\ OS$ oder $\mathfrak{A}_1 = 0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$; OS_3 die rückwirkende Festigkeit; OS_2 die Druckintensität; $S_2 s_2$ die verhältnissmässige Zusammendrückung an der Elastizitätsgrenze, und es ist $\overline{OS_2} = 0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$. Ueberhaupt ist die Bedeutung der in der Figur verzeichneten Abscissen und Ordinaten folgende:

	Holz.	Schmiedeeisen.	Gusseisen.
Absolute Festigkeit	OH	OS	OG
Spannungsintensität an der Elastizitätsgrenze für Ausdehnung	OH_1	OS_1	OG_1
Verhältnissmässige Ausdehnung an dieser Grenze	$H_1 h_1$	$S_1 s_1$	$G_1 g_1$
Rückwirkende Festigkeit . .	OH_3	OS_3	OG_3

	Holz.	Schmiedeeisen.	Gusseisen.
Druckintensität an der Elastizitätsgrenze der Zusammendrückung	OH_2	OS_2	OG_2
Verhältnissmässige Zusammendrückung an dieser Grenze .	$H_2 h_2$	$S_2 s_2$	$G_2 g_2$

Empirische Formel für das Gesetz der Ausdehnung und Zusammendrückung eines Stabes.

Die in Figur 5 dargestellten Kurven, in welchen die Abscissen die Intensitäten der Spannungen und Pressungen, die Ordinaten die entsprechenden linearen Ausdehnungen und Zusammendrückungen bedeuten, lassen sich auf folgende Weise annähernd durch Gleichungen ausdrücken:

Zieht man zu irgend einem Punkt m der Kurve Fig. 6, Tafel I., welchem die Coordinaten $Op = x$ und $\overline{mp} = y$ entsprechen, eine Berührungslinie tmn, so bildet dieselbe mit Ox einen gewissen Winkel $\widehat{tnx} = \varphi$ und es ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In der Nähe von O ist der Modulus der Elastizität constant und wird ausgedrückt durch $\frac{x}{y}$ oder auch durch $\frac{dx}{dy}$. Der Modulus der Elastizität kann daher sowohl innerhalb als ausserhalb der Elastizitätsgrenze durch $\frac{dx}{dy} = \operatorname{Cotg} \varphi$ ausgedrückt werden und es handelt sich nur darum, eine Funktion von x zu finden, welche genau oder annähernd den Werth von $\frac{dx}{dy}$ darstellt.

Nennt man ε den constanten Modulus der Elastizität für ganz schwache Ausdehnungen und Zusammenpressungen, $\overline{Ok} = a$ die Zugfestigkeit des Materials, $\overline{Oh} = - a'$ die Druckfestigkeit desselben, so muss die für $\frac{dx}{dy}$ zu suchende Funktion von x die Eigenschaften haben, dass

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{für } x = o & \frac{dx}{dy} = \varepsilon \\ \text{,, } x = + a & \frac{dx}{dy} = o \\ \text{,, } x = - a_{\prime} & \frac{dx}{dy} = o \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird.

Dieser Bedingung wird entsprochen, wenn man setzt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varepsilon}{a\,a_1}(a - x)\ (a_1 + x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Integrirt man diese Differenzialgleichung und berücksichtigt, dass für x = o auch y = o werden soll, so findet man

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\ \frac{a\,a_1}{a + a_1}\ \text{lognat}\left(\frac{a_1 + x}{a - x}\ \frac{a}{a_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck ist die Gleichung einer Kurve, welche mit der wahren Kurve für x = o, x = a, x = — a_1 übereinstimmt. Ob sie auch für Werthe von x die zwischen + a und — a_1 liegen und von o verschieden sind, mit der wahren Kurve übereinstimmt, könnte nur durch Vergleichung mit Versuchsresultaten ermittelt werden.

Den Bedingungen (2) kann man auch entsprechen, wenn man statt (3) setzt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varepsilon}{a^m\,a_{1n}}\ (a - x)^m\,(a_1 + x)^n \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wobei m n beliebige Zahlen sind, die sich vielleicht so bestimmen lassen, dass der Ausdruck das wahre Gesetz des Elastizitätsmodulus darstellt.

Abscheerung.

Man denke sich durch einen stabförmigen Körper eine Querebene A gelegt und die zu beiden Seiten dieser Ebene befindlichen Theile B und C des Stabes durch Kräfte in der Weise angefasst, dass sie diese Theile nach Richtungen zu verschieben streben, welche zur Ebene A parallel, aber einander entgegengesetzt sind, so wird dadurch der Molekularzusammenhang des Körpers auf eine besondere Art einem Kraftangriff ausgesetzt, welchen man Abschiebungs- oder Abscheerungsangriff nennen kann. Wenn der Querschnitt des Stabes nicht sehr beträchtlich ist, kann man vermuthen, dass die zum Abscheeren eines Stabes erforderliche Kraft dem Querschnitt des Stabes proportional ist, und dies haben auch Versuche ziemlich genau bestätiget. Bei metallischen Körpern ist überdies die zum Abscheeren jedes Quadratcentimeters des Stabquerschnittes erforderliche Kraft (die Abscheerungs- oder Abschiebungsfestigkeit) nahezu der absoluten oder Zugfestigkeit des Materials proportional. Dieses Festigkeitsverhältniss kommt insbesondere bei Nietbolzen und Kettenbolzen in Betrachtung. Aber auch bei Biegungen wird man zur Annahme von Abschiebungskräften veranlasst.

Biegung eines Stabes, relative Festigkeit der Materialien.

Voraussetzungen. Stäbe können auf verschiedene Weise gebogen werden. Wir betrachten zuerst einen speziellen Fall, der zwar in der Wirklichkeit selten vorkommt, worauf sich aber die verschiedenen Biegungsfälle zurückführen lassen.

Man denke sich, das eine Ende eines in natürlichem Zustande geraden Stabes werde nach horizontaler Richtung eingeklemmt, das andere Ende dagegen freigelassen, jedoch durch ein Gewicht belastet.

Fig. 7 sei der Stab im horizontal eingespannten, jedoch unbelasteten Zustand. Fig. 8 der Stab in belastetem, mithin gebogenem Zustand. Fig. 9 der Querschnitt des Stabes. Um uns eine klare Vorstellung zu verschaffen von dem im Innern des Stabes herrschenden Zustande, denken wir uns, der Stab bestehe aus einer grossen Anzahl von neben- und übereinandergelegten und mit einander verbundenen Fasern, wobei wir uns unter einer Faser eine Reihe von Atomen denken, die im geraden Zustand des Stabes in einer geraden, mit der Axe parallelen Linie liegen, in gebogenem Zustande des Stabes dagegen eine zur äusseren Krümmung a b äquidistante Linie bilden. i_1 k_1 sei die Faser, welche im unbelasteten Zustande durch die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes geht; i k die gleiche Faser im belasteten Zustande. Wir wollen diese Faser die Axenfaser nennen. Der Gleichgewichtszustand des Stabes wird bekannt sein, wenn wir anzugeben im Stande sind: 1) den Zustand der Spannung oder Pressung in jedem einzelnen Punkte des Stabes, 2) die Gestalten der einzelnen Fasern des Stabes. Will man diese Gleichgewichtsaufgabe ganz scharf zur Lösung bringen, so hat man es mit einer äusserst schwierigen Aufgabe zu thun. Begnügt man sich aber mit einer Annäherung, so hat man es mit einer verhältnissmässig leichten Aufgabe zu thun, die schon unzählige Male behandelt worden ist.

Die folgende annähernde Behandlung beruht auf folgenden Annahmen, über deren Zulässigkeit wir uns später aussprechen werden. Wir nehmen an:

1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem ebenen Querschnitt e_1 g_1 lagen, auch im gebogenen Zustande in einer Ebene e g liegen, die in e auf der Faser a b senkrecht steht. Es ist also e g die Richtung der zum Punkt e der Kurve a b gehörigen Normale;

2) dass die Atome eines und desselben Querschnittes ihre relative Gegeneinanderlagerung nicht ändern, dass mithin die Querschnitte durch die Biegung weder ihre Form noch ihre Grösse verändern;

3) dass alle ursprünglich geraden Fasern im gebogenen Zustande des Stabes zur Faser a e f b äquidistante Linien bilden;

4) dass die Biegung nur so schwach sei, dass die früher Seite 3 und 5 aufgestellten Gesetze über die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben angewendet werden dürfen.

Diesen Voraussetzungen wird ein eingespannter und belasteter Stab niemals mathematisch genau entsprechen. In der That denken wir uns z. B. einen Stab mit quadratischem Querschnitt, so ist zunächst klar, dass derselbe im gebogenen Zustande der zweiten Voraussetzung nicht entsprechen wird, denn so wie oben bei e f eine Ausdehnung und unten bei g h eine Zusammenziehung entsteht, wird gleichzeitig oben nach der Quere eine Zusammenziehung und unten nach der Quere eine Ausdehnung eintreten. Im gebogenen Zustande wird daher der Querschnitt nicht mehr die Gestalt Fig. 1, Tafel II., sondern die Form Fig. 2 haben. Der ganze Stab wird also in Folge der Biegung oben schmäler, unten breiter werden, als er ursprünglich war. So wie aber einmal eine Aenderung in der Querschnittsform und eine Gegeneinanderverschiebung der Atome eines und desselben Querschnittes eintritt, können auch die Voraussetzungen (1), (3) und (4) nicht mehr streng erfüllt sein. Nimmt man aber gar einen schienenartigen Stab an, d. h. einen Stab von verhältnissmässig grosser Höhe und geringer Dicke, so wird sich der belastete Stab in einem Gleichgewichtszustand befinden können, der von dem vorausgesetzten Zustand weit verschieden ist. Es kann z. B. ein Umschlagen der Schiene in der Art, wie Fig. 3 zeigt, oder es können an der unteren Kante Faltungen eintreten, in der Art, wie Fig. 4 zeigt.

Die vier Voraussetzungen oder Annahmen müssen gestellt werden, weil bei starken Belastungen und bei einem leicht zusammendrückbaren Materiale so komplizirte Molekularverschiebungen und Formänderungen eintreten würden, dass es ganz unmöglich wäre, dieselben durch Rechnung zu bestimmen. Diese sämmtlichen Voraussetzungen haben aber zugleich einen sehr wichtigen praktischen Sinn, denn sie sprechen Bedingungen aus, denen jeder auf relative Festigkeit in Anspruch genommene Bestandtheil entsprechen muss, um als ein solides Glied in irgend einer Konstruktion dienen zu können.

Indem wir also die folgenden Rechnungen unter jenen vier Voraussetzungen machen, werden wir solche Resultate erhalten, die sich jedenfalls auf praktisch brauchbare Konstruktionen anwenden lassen, nur sind wir leider nicht im Stande die Bedingungen oder Grenzen scharf anzugeben, bis zu welchen hin unsere Resultate noch Geltung haben, weil wir nicht im Stande sein werden zu sagen, wann die Verschiebungen der Moleküle eines und desselben Querschnittes merklich zu werden beginnen, wann ein Ueberwerfen oder Zusammenfalten oder Knicken eines Stabes einzutreten beginnt. Freilich in der Mehrzahl der Fälle, welche der Maschinenbau darbietet, weiss man schon mit dem Gefühl die Stabformen und Dimensionen so zu wählen, dass unsere Voraussetzungen zulässig sind.

Wir gehen nun zur Entwicklung der Theorie über. Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Faserstückchen, welche ursprünglich zwischen den Querschnittsebenen $e_1\ g_1$ und $f_1\ h_1$ liegen, so treffen wir dieselben, nachdem die Biegung eingetreten ist, zwischen den Ebenen $e\,g$ und $f\,h$ (wegen Voraussetzung 1), die bei e und f auf der Faserlinie $a\ e\ f\ b$ normal stehen, deren verlängerte Richtungen also in dem Krümmungsmittelpunkt O des Bogenelements $e\ f$ sich scheiden.

Es ist klar dass $e\ f > e_1\ f_1$ und $g\ h < g_1\ h_1$. In $e\,f$ herrscht also Ausdehnung, in $g\,h$ dagegen Zusammendrückung. Geht man in Gedanken von $e\,f$ an tiefer herab so begegnet man Faserstückchen, die weniger ausgedehnt sind als $e\,f$; geht man dagegen von $g\,h$ an nach aufwärts, so begegnet man Faserstückchen die weniger zusammengepresst sind als $g\,h$; es muss also nothwendig irgendwo zwischen h und f eine Stelle geben, z. B. q, wo weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Dies gilt aber auch für jeden anderen Querschnitt, demnach muss es eine ganze Schicht $o\ p\ q\ t$ geben, wo weder Ausdehnung noch Zusammenpressung vorhanden ist. Diese Schicht wollen wir die neutrale Schicht nennen und die Linie, in welcher diese Schicht durch die Ebene der Figur geschnitten wird: neutrale Faser. Diese fällt im Allgemeinen nicht zusammen mit der Axenfaser $i\ m\ n\ k$. Aus dem bisher Gesagten erkennt man bereits, dass die Spannungen grösser und grösser werden, je mehr man sich von der neutralen Schicht nach aufwärts entfernt, dass dagegen die Pressungen mehr und mehr zunehmen, je mehr man sich von der neutralen Faser nach abwärts entfernt.

Es ist wohl auch zu vermuthen, dass die Spannungsintensitäten in einer und derselben Faser, z. B. in der Faser $a\ e\ f\ b$, nicht überall gleich gross sein werden, sondern dass sie von b an bis a hin wachsen. Hierdurch erkennt man, dass es in dem ganzen Stabe Schichten von gleicher Spannung und von gleicher Pressung geben muss, und dass die neutrale Schicht die Grenze bildet zwischen den gespannten und den gepressten Schichten.

Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen. Zieht man durch q, Fig. 8, eine Linie s q r parallel mit e g, so ergeben sich zwei Dreiecke q s f und q r h, in welchen die in verschiedenen Entfernungen von q stattfindenden Ausdehnungen und Zusammendrückungen aller ursprünglich zwischen e_1 g_1 und f_1 h_1, Fig. 7, enthaltenen Faserstückchen zum Vorschein kommen.

Nennen wir:

ε den Modulus der Elastizität des Materials, und behandeln denselben als eine constante Grösse.

$\overline{f\,n} = z$ die Entfernung der Axenfasern von der obersten Faser ab.

$\overline{n\,w} = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens u w von den Axenfasern.

$\overline{n\,q} = v$ den Abstand der Neutralfaser von der Axenfaser im Querschnitt f h.

$\varrho = O\,m = O\,n$ den Krümmungshalbmesser des Bogenelementchens m n.

x y die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt k, dessen Abscissenaxe horizontal und dessen Ordinatenaxe vertikal gerichtet ist.

S s $\mathfrak{S}$ die Spannungsintensitäten in den Faserstücken m n u w e f.

$\Theta = \widehat{m\,O\,n}$ den Winkel, den die zu m und n gezogenen Normalen bilden.

$m_1\,n_1 = ds_0$ Fig. 7, die ursprüngliche Länge aller zwischen e_1 g_1 und f_1 h_1 enthaltenen Faserstückchen.

Dies vorausgesetzt, ist vermöge des Stabausdehnungsgesetzes

$$\overline{m\,n} = d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) = \varrho\,\Theta \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

$$\overline{u\,w} = d\,s_0 \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) = (\varrho + \zeta)\,\Theta \quad \dots\dots \quad (2)$$

$$\overline{e\,f} = d\,s_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon}\right) = (\varrho + z)\,\Theta \quad \dots\dots \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{1 + \frac{s}{\varepsilon}}{1 + \frac{S}{\varepsilon}} = \frac{\varrho + \zeta}{\varrho} = 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \text{ oder:}$$

$$1 + \frac{s}{\varepsilon} = \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right)$$

Da jederzeit $\frac{S}{\varepsilon}$ und $\frac{\zeta}{\varrho}$ sehr kleine Grössen sind, so kann man die Produkte derselben vernachlässigen, und dann folgt aus dieser letzteren Gleichung:

$$s = S + \frac{\varepsilon}{\varrho}\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hierdurch ist die in einer Entfernung ζ oberhalb der Axenfaser herrschende Spannungsintensität ausgedrückt. Diese Spannungsintensität verschwindet für $\zeta = -\,v$, d. h. es ist:

$$o = S - \frac{\varepsilon}{\varrho}\,v$$

oder:

$$v = \frac{S\,\varrho}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichung bestimmt die Tiefe der Neutralfaser unterhalb der Axenfaser im Querschnitt f q h. Setzt man in (4) für ζ den Werth $z = n\,f$, so geht s in $\mathfrak{S}$ über und es ist:

$$\mathfrak{S} = S + \frac{\varepsilon}{\varrho}\,z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Theilen wir den Querschnitt f h durch horizontale Linien in unendlich viele unendlich schmale Streifen, und nennen $d\,f$ den Flächeninhalt des bei w befindlichen Streifens, so dürfen wir annehmen, dass in allen Punkten desselben die Spannungsintensität gleich s ist. Es ist demnach $s\,d\,f$ die Kraft, welche alle Fasern des Querschnittes $d\,f$ spannt und $\zeta\,s\,d\,f$ das statische Moment dieser Kraft, in Bezug auf eine durch n gehende, auf der Ebene der Figur senkrechte Axe. Die auf den ganzen Querschnitt f h ausgedehnten Integrale

$$\int s\,d\,f \text{ und } \int \zeta\,s\,d\,f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

drücken demnach aus: das erste die Summe aller Spannungen und Pressungen, welche im Querschnitt f h vorkommen; das zweite die Summe der Momente aller Spannungen und Pressungen. Setzt man für s den Werth (4) und berücksichtiget, dass sich die Integrationen nur auf ζ, nicht aber auf S und ϱ beziehen, so erhält man:

$$\int s\,d\,f = \int \left[S + \frac{\varepsilon}{\varrho}\,\zeta\right] d\,f = S \int d\,f + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int \zeta\,d\,f$$

$$\int \zeta\,s\,d\,f = \int \zeta \left[S + \frac{\varepsilon}{\varrho}\,\zeta\right] d\,f = S \int \zeta\,d\,f + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int \zeta^2\,d\,f$$

Nennt man Ω den Querschnitt des Stabes, so ist: $\int df = \Omega$. Berücksichtiget man, dass die ζ vom Schwerpunkt n des Querschnittes aus gemessen werden, so erkennt man, dass $\int \zeta \, df = o$ ist und dass $\int \zeta^2 \, df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ausdrückt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int \zeta^2 \, df = z \, E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

so werden die obigen Integrale:

$$\left.\begin{array}{l} \int s \, df = S \, \Omega \\ \int \zeta \, s \, df = \frac{\varepsilon}{\varrho} \, z \, E \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Der Gleichgewichtszustand des Stabstückes n k erfordert, dass die inneren, am Querschnitt f h wirkenden Elastizitätskräfte mit allen äusseren, auf das Stabstück n k einwirkenden Kräften im Gleichgewicht sind. Nennt man Fig. 5, Tafel II., φ den Winkel, den die zum Punkt n der Axenfaser gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe k x bildet, so ist auch φ der Winkel, den die Richtung der Kraft P mit der Richtung der Normalen f h bildet. Zerlegt man P in zwei Kräfte $P \sin \varphi$ und $P \cos \varphi$, so ist die Richtung der ersteren senkrecht auf f h, die Richtung der letzteren parallel mit f h. Vernachlässigen wir das Gewicht des Stabes, so muss im Gleichgewichtszustand sein:

1) $P \sin \varphi$ gleich der Summe aller Spannungen und Pressungen, welche im Querschnitt f h stattfinden. 2) $P x$ gleich der Summe der Momente dieser Spannungen und Pressungen. 3) $P \cos \varphi$ gleich einer gewissen Abschiebungskraft T, welche den Theil f h b c des Stabes von dem Theil a f d h längs des Querschnitts f h abzushieben strebt.

Wir erhalten daher für den Gleichgewichtszustand des Stabes:

$$\left.\begin{array}{l} P \sin \varphi = \Omega \, S \\ P \cos \varphi = T \\ P x \quad\; = \frac{\varepsilon}{\varrho} \, z \, E \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Der Differenzialausdruck für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Kurve ist:

$$\varrho = \pm \frac{d\,s^3}{d\,x\,d^2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Linie der Abscissenaxe ihre convexe oder ihre concave Seite zuwendet. Im vorliegenden Falle gilt also das untere Zeichen. Da wir eine schwache Biegung voraussetzen, so begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir in (11) $d\,s$ gleich $d\,x$ setzen. Dann aber erhalten wir:

$$\varrho = - \frac{d\,x^2}{d^2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hiermit sind nun alle, zur Lösung unseres Problems erforderlichen Gleichungen aufgestellt, und wir gehen nun zur weiteren Behandlung dieser Gleichungen über.

Behandlung der aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen Aus der ersten der Gleichungen (10) folgt $S = \frac{P \sin. \varphi}{\Omega}$

Aus der dritten der Gleichungen (10) folgt $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{P\,x}{E\,z}$ führt man diese Werthe in die Ausdrücke (4), (5), (6) ein, so erhält man:

$$s = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E\,z}\,x\,\zeta \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E}\,x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\upsilon = \frac{z\,E}{\Omega} \; \frac{\sin \varphi}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

In diesen Gleichungen ist noch sin φ unbekannt; dieser ergibt sich aus der Gleichung der Axenfaser. Zur Bestimmung derselben hat man wegen (10) und (12)

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = - \frac{P}{\varepsilon\,z\,E}\,x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$y = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

wobei l die Länge des Stabes bezeichnet und die Constante der Integration so bestimmt wurde, dass für $x = o$ auch $y = o$ wird, und dass für $x = l$, $\frac{dy}{dx} = o$ ist. Nun ist aber ganz genau $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\ \varphi$, oder annähernd, weil φ stets sehr klein ist, $\frac{dy}{dx} = \sin \varphi$, demnach vermöge (17)

$$\sin.\ \varphi = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Führt man diesen Werth von $\sin \varphi$ in die Ausdrücke (13), (14), (15) ein, so ergiebt sich:

$$s = \frac{P}{E z} x \zeta + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (20)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{E} x + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (21)$$

$$v = \frac{P}{2 \Omega \varepsilon} \frac{l^2 - x^2}{x} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

und überdies hat man noch wegen (18)

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon z E} \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Hiermit ist nun unsere Aufgabe vollständig gelöst. Die Gleichung (20) bestimmt die in irgend einem Punkt im Innern des Stabes herrschende Spannung. Die Gleichung (21) bestimmt die Spannung in jedem Punkt der oberen Faser a b. Die Gleichung (23) bestimmt die Gestalt der Schwerpunktfaser. Endlich die Gleichung (22) die Gestalt der Neutralfaser.

Interpretation der Resultate. Eliminirt man vermittelst (22) $l^2 - x^2$ aus (20) und (21), so findet man auch

$$s = \frac{P x}{E z} (\zeta + v) \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man die Spannungszustände im Innern des Stabes deutlich erkennen.

Betrachtet man x und v als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (22) die Gleichung einer Hyperbel dar, da aber die wirklichen Werthe von v nach normaler Richtung auf die Axenfaser aufzutragen sind, so bestimmt die Gleichung (22) so zu sagen eine gebogene Hyperbel.

Betrachtet man in (24) s als eine constante Grösse, so bestimmt diese Gleichung für beliebige Werthe von x diejenigen Werthe von $\zeta + \upsilon$, für welche s einen constanten Werth hat, d. h. die Gleichung (24) bestimmt die Linie, in welcher einerlei Spannung herrscht.

Betrachtet man x und $\zeta + \upsilon$ als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (24) eine Hyperbel dar. Da aber $\zeta + \upsilon$ von der neutralen Faser aus nach normaler Richtung gegen die Schwerpunktfaser aufzutragen ist, so ist die durch (24) ausgedrückte Linie eine Hyperbel, deren Abscissenaxe nach der neutralen Faser gekrümmt ist.

In Fig. 6 und 7, Tafel II., sind die Linien dargestellt, in welchen gleiche Spannungen herrschen.

Fig. 6 stellt die Linien von gleicher Spannung dar, wenn die Biegung des Stabes unendlich klein ist, also υ gegen ζ vernachlässiget werden kann. Diese Linien sind Hyperbeln, deren Aeste gegen die Coordinatenaxen $k\,i$ und $k\,l$ assymptotisch verlaufen. Die Gleichung derselben folgt aus (24), wenn man $\upsilon = o$ setzt; dann wird:

$$\frac{s\,E\,z}{P} = x\,\zeta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Die Spannungsdifferenzen in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Linien sind gleich gross, daher sind es auch die Ordinatendifferenzen in je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Linien.

Nennt man ζ_0 den Werth von ζ für $x = \overline{k\,i} = l$, so hat man auch:

$$\frac{s\,E\,z}{P} = \zeta_0\, l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

demnach:

$$\zeta\, x = \zeta_0\, l\,, \quad \zeta = \zeta_0 \left(\frac{l}{x}\right) . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man sehr leicht eine Kurve verzeichnen, die in einer Entfernung ζ_0 von dem Punkt i ihren Anfang nimmt.

Die grösste Spannung findet statt im Punkt a, die grösste Pressung im Punkt d. Nennt man J diese grösste Spannung bei a, so hat man zur Bestimmung derselben (wegen $\zeta = z$ und $x = l$):

$$J = \frac{P\,l}{E} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Fig. 7 zeigt die Kurven von gleicher Spannung, wenn der Stab merklich gebogen wird, und die Neutralfaser $o\,t$ merklich von der Axenfaser $i\,k$ abweicht. Diese Kurven ergeben sich, wenn man zuerst vermittelst (23) die Schwerpunktsfaser $i\,k$ verzeichnet, hierauf vermittelst (22) die Neutralfaser $o\,t$ darstellt und das Ordinatensystem der Linien von Fig. 6 von der Linie $o\,t$ aus nach Richtungen aufträgt, welche die Axenfaser normal durchschneiden. Die grösste Spannung findet im Punkt a statt und wird bestimmt, wenn man in (20) $x = l$, $\zeta = z$ setzt. Man findet

$$J = \frac{P\,l}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

also der Form nach den gleichen Ausdruck, wie in dem Fall einer unendlich schwachen Biegung. Für $x = o$ wird [vermöge (22)] $v = \infty$, d. h. in der Nähe des Punktes k entfernt sich die Neutralfaser plötzlich unendlich rasch von der Axenfaser. Aehnliches tritt jederzeit in denjenigen Punkten eines gebogenen Stabes ein, in welchem der Krümmungshalbmesser der neutralen Linie unendlich gross wird. So ist z. B. Fig. 8, Tafel II., ein auf zwei Stützen liegender, aber zu beiden Seiten über dieselben hinausragender Stab dargestellt, der an den Enden und in der Mitte belastet ist. In den Punkten β_1 und β_2, wo die Aenderungen der Krümmungsrichtungen stattfinden, sind die Krümmungshalbmesser unendlich und die neutrale Faser des ganzen Stabes besteht in diesem Fall aus den drei Theilen $\lambda\ \lambda_1\ \lambda_2$, deren Zweige assymptotisch gegen die Normalen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ verlaufen.

Bei den meisten Anwendungen der Elastizitätstheorie hat man es nur mit äusserst schwachen Formänderungen zu thun, so dass die Neutralfaser mit der Schwerpunktfaser zusammenfallend angenommen werden kann. Unter dieser Voraussetzung geben die Gleichungen (20) bis (23)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{P}{E\,z}\,x\,\zeta \\ \mathfrak{S} &= \frac{P}{E}\,x \\ J &= \frac{P\,l}{E} \\ v &= o \\ y &= \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\left(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Berechnung der Werthe von E und z. In den aufgefundenen Formeln erscheinen die nur von der Gestalt und Grösse des Querschnittes abhängigen Grössen z und E. z ist der Abstand n f, Fig. 8, Tafel I., eines Punktes f der oberen Faser, a b von der Schwerpunktfaser. z wird mithin bestimmt, indem man nach den gewöhnlichen Regeln den Schwerpunkt einer ebenen Figur sucht. Die Grösse E ist in die Rechnung eingeführt worden, indem wir gesetzt haben $E\,z = \int \zeta^2\,df$, d. h. indem wir das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende horizontale Queraxe gleichgesetzt haben dem Produkt E z. Nun ist $E = \frac{\int \zeta^2\,df}{z}$, es wird demnach der einem bestimmten Querschnitt entsprechende Werth von E gefunden, wenn man das Trägheitsmoment des Querschnittes $\int \zeta^2\,df$ sucht und dasselbe durch z dividirt.

Die Werthe von E und z für verschiedene Querschnittsformen findet man auf Tafel V. der Resultate für den Maschinenbau zusammengestellt. Zur Erläuterung wollen wir solche Berechnungen in einigen speziellen Fällen vornehmen. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment eines Querschnittes mit μ, so ist:

$$E = \frac{\mu}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

für einen rechtwinkligen Querschnitt, Fig. 9, Tafel II., dessen Breite b und Höhe h ist, hat man

$$\mu = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\,d\zeta\,\zeta^2 = \frac{1}{12}\,b\,h^3 \text{ und } z = \frac{h}{2}$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{1}{6}\,b\,h^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt, Fig. 10, Tafel II., dessen Durchmesser d ist, hat man:

$$z = \frac{d}{2}, \quad \mu = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2}\,d\zeta\,\zeta^2 = \frac{\pi}{64}\,d^4$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} d^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Für einen Ring, Fig. 11, Tafel II., dessen Durchmesser d und d_1 sind, ist:

$$z = \frac{d}{2}, \quad \mu = \frac{\pi}{64} d^4 - \frac{\pi}{64} d_1^4$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

In einem Querschnitt von der Form Fig. 12, Tafel II., ist:

$$z = \frac{1}{2} h \qquad \mu = \frac{1}{12} b h^3 - 2 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} (b - b_1) h_1^3$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{1}{6} \left[b h^3 - (b - b_1) h_1^3 \right] \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Relative oder Bruchfestigkeit.

Die grösste Spannung tritt bei a, Fig. 8, Tafel I., ein, die grösste Pressung bei d. Bezeichnen wir diese Maximalspannungen und Pressungen (auf die Einheit des Querschnittes bezogen) mit $\mathfrak{S}_m$ und $\mathfrak{P}_m$ und setzen $\overline{ia} = z$, $\overline{id} = z_1$, so ist:

$$\frac{\mathfrak{P}_m}{\mathfrak{S}_m} = \frac{z_1}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Nehmen wir an, dass die für die Biegung eines Stabes aufgefundenen Resultate nicht nur für schwache, sondern dass sie auch für beliebig starke und selbst bis zu derjenigen Biegung gelten, bei welcher entweder ein Reissen der Fasern bei a, oder ein Zerquetschen der Fasern bei d eintritt; dann bietet sich die Frage dar, ob das Reissen bei a, oder das Zerquetschen bei d eher eintritt. Nennen wir $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials, $\mathfrak{R}$ seine rückwirkende Festigkeit, und vergleichen den Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ mit $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} = \frac{z}{z_1}$, so ist leicht zu erkennen, dass bei zunehmender Biegung die Spannung $\mathfrak{S}_m$ die Grenze $\mathfrak{A}$ eher erreicht, als die Pressung $\mathfrak{P}_m$ die Grenze $\mathfrak{R}$, wenn $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} > \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$, dass dagegen die Quetschung zuerst eintritt, wenn $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$, dass endlich das Reissen bei a und das Quetschen bei d

gleichzeitig eintritt, wenn $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$. Es ist aber $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} = \frac{z}{z_1}$ und demnach erhalten wir folgende Regel:

a) Bruch durch Riss, wenn . . . . $\frac{z}{z_1} > \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$

b) Bruch durch Quetschung, wenn . . . . . $\frac{z}{z_1} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$

c) Bruch durch Riss und Quetschung . . . $\frac{z}{z_1} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$

Nun ist für Schmiedeeisen . . . $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \frac{5}{4}$

„ Gusseisen . . . . $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{5 \cdot 5}$

„ Holzarten . . . . $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = 2$

Der Bruch erfolgt demnach	bei Schmiedeeisen	bei Gusseisen	bei Holz
a) durch Riss bei a, wenn $\frac{z}{z_1} >$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2
b) „ Quetschung bei d, wenn $\frac{z}{z_1} <$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2
c) „ beides zugleich, wenn $\frac{z}{z_1} =$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2

Ist die Querschnittsform des Körpers, dessen Festigkeit bestimmt werden soll, gegeben, so lässt sich das Tragungsvermögen, d. h. die Belastung, bei welcher der Bruch erfolgt, auf folgende Art bestimmen: Man bestimme zuerst den Schwerpunkt des Querschnittes, so ergeben sich zunächst die Werthe von z und z_1 und ergibt sich das Verhältniss $\frac{z}{z_1}$. Ist dies geschehen, so ersieht man aus der vorhergehenden Tabelle, ob der Bruch durch Riss, oder durch Quetschung, oder durch beides zugleich erfolgt.

Ist z. B. der Stab von Gusseisen und $\frac{z}{z_1} = 1$, so erfolgt der Bruch durch Riss, denn es ist in diesem Fall $\frac{z}{z_1} = 1 > \frac{1}{5 \cdot 5}$

Erfolgt der Bruch durch Riss, so ist das Tragungsvermögen:

$$P = \frac{\mathfrak{A}\,E}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Erfolgt der Bruch durch Quetschung, so ist das Tragungsvermögen:

$$P = \frac{z}{z_1} \frac{\mathfrak{N} E}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Allein es ist nicht zu übersehen, dass diese wie alle früher aufgefundenen Formeln nur dann richtig wären, wenn der Modulus der Elastizität einen unveränderlichen Werth hätte, was bei starken Biegungen nicht der Fall ist. Wegen dieser Ungenauigkeit der Gleichungen (2) und (3) ist es zweckmässiger, durch Biegungsversuche die Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ direkt aufzusuchen.

Die Tabelle Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau enthält in der mit $\mathfrak{B}$ überschriebenen Columne die Bruchcoeffizienten, wie sie durch Versuche gefunden wurden. Diese Coeffizienten gelten jedoch nur für Querschnitte, bei welchen $\frac{z}{z_1}$ gleich der Einheit ist, oder nicht weit davon abweicht. Für solche Querschnitte kann man also schreiben:

$$P = \frac{\mathfrak{B} E}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Günstige Querschnittsformen.

Durch die vorausgegangenen Erklärungen lernen wir kennen, unter welchen Umständen das Tragungsvermögen eines Balkens oder Stabes gross oder klein ausfällt. Zunächst ist klar, dass solche Querschnitte günstig sind, bei welchen der Bruch durch Riss und Quetschung gleichzeitig erfolgt. Für diese Querschnitte ist aber

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für Schmiedeeisen ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ nahe gleich der Einheit, sind also diejenigen Querschnittsformen günstig, welche durch zwei auf einander senkrechte durch den Schwerpunkt gehende Linien in vier congruente Theile getheilt werden. Das Rechteck und die Kreisform sind also für Schmiedeeisen angemessen, weil sich diese Formen in diesem Materiale leicht herstellen lassen. Für Holz ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} = 2$, sollte also $z = 2 z_1$ sein. Allein die zusammengesetzten Holzverbindungen abgerechnet, werden jederzeit runde Stämme oder viereckige Balken angewendet, ist also $\frac{z}{z_1} = 1$ und erfolgt der Bruch durch Quetschung.

Für Gusseisen ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{5 \cdot 5}$, sollte man also Formen wählen, für welche $\frac{z}{z_1} = \frac{1}{5 \cdot 5}$ ist. Die T-Form, Fig. 13, Tafel II., ist dazu besonders geeignet. Nimmt man bei Gusseisen Querschnitte an, die sich durch zwei auf einander senkrechte Linien in vier congruente Theile theilen lassen, so erfolgt der Bruch durch Riss.

Was den Einfluss der Grösse und der Form des Querschnittes betrifft, so wird dieser insbesondere auch durch den Werth $E = \frac{\mu}{z}$ bestimmt.

Da im Trägheitsmoment μ die mit der biegenden Kraft parallelen Dimensionen im quadratischen, die Breitendimensionen dagegen im einfachen Maase auftreten, so ist daraus zu ersehen, dass diejenigen Querschnitte günstig sind, bei welchen das Material in grosser Entfernung von der neutralen Faser und insbesondere an der Stelle concentrirt ist, wo der Bruch durch Riss oder durch Quetschung eintritt. Das hochgestellte Rechteck, die hochgestellte Ellipse, der hohe kreisförmige oder elliptische Cylinder, ferner die an der Axenfaser durchbrochenen Formen, und bei Gusseisen die T-Form, sind daher günstige Querschnitte.

Will man dagegen einen Körper biegsam machen, wie z. B. Federn, so muss man dem Querschnitt eine geringe Höhe und grosse Breite geben. Das liegende Rechteck ist in diesem Falle angemessen.

Die Gleichung (4) zeigt, dass das Tragungsvermögen der Balkenlänge verkehrt proportional ist.

Die Anstrengung.

Das Verhältniss zwischen der Last, die ein Balken wirklich zu tragen hat, und der Last, welche seinen Bruch veranlasst, wollen wir das Maas seiner Anstrengung nennen. Einzelne spezielle Fälle abgerechnet, dürfen die Theile irgend einer Konstruktion und dürfen insbesondere die Maschinentheile nie stark angestrengt werden, denn die Konstruktionen sollen nicht nur nicht brechen, sondern sie sollen selbst merkliche Formänderungen nicht erleiden. Man sieht hieraus, dass die Konstruktionen in der Regel nicht einmal bis an ihre Elastizitätsgrenze angestrengt werden dürfen. Bei Maschinen beträgt die Anstrengung: bei Seilen $\frac{1}{3}$; Ketten $\frac{1}{4}$; Hebel $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$; Wellen $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{20}$; Rädern $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{20}$.

Wenn man will, kann man die Anstrengung auch beurtheilen nach dem Verhältniss zwischen der Belastung, die der Konstruktion wirklich aufgebürdet wird und derjenigen Belastung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht. Für die Praxis ist es jedoch ganz gleichgiltig, ob man die Anstrengung nach der einen oder nach der andern Weise beurtheilt, denn es ist ganz gleichgiltig, ob man die Regel aufstellt: ein Körper darf bis auf $\frac{1}{9}$ seines Tragungsvermögens angestrengt werden, oder die Regel: ein Körper dürfe bis zu $\frac{1}{3}$ seiner Elastizitätsgrenze angestrengt werden; wenn nur jedesmal der angemessene Quotient erfahrungsgemäss in Rechnung gebracht wird. Wir werden in der Folge die Anstrengung jederzeit nach dem zuerst aufgestellten Begriffe bemessen.

Berechnung der Querschnittsdimensionen.

Kennt man den Bruchcoeffizienten $\mathfrak{B}$ (Tafel Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau) und ist die Anstrengung bekannt, so wird hierdurch die Spannung bestimmt, welche bei a, Fig. 8, Tafel I., eintreten darf, und wenn man für einen zu construirenden Bestandtheil Querschnitte wählt, die von den besten nicht viel abweichen, so kann man für alle Fälle mit einer für praktische Zwecke hinreichenden Sicherheit die Querschnittsdimensionen eines Stabes vermittelst der Formel

$$P\,l = \mathfrak{S}_m\,E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

berechnen. (Die Ausdrücke für E findet man auf Tafel V. der Resultate). Den Kreisquerschnitt und den quadratischen ausgenommen, haben alle übrigen mehr als eine Dimension. Durch diese *Eine* Gleichung (1) können daher nicht alle Dimensionen eines zusammengesetzteren Querschnittes bestimmt werden. Diese theilweise Willkürlichkeit der Dimensionen eines zusammengesetzten Querschnittes kann man sehr oft benutzen, um verschiedenen praktisch wichtigen Nebenbedingungen zu genügen. Wenn z. B. aus einem runden Stamm ein viereckiger Balken gefertiget werden soll, so kann man das Verhältniss $\frac{h}{b}$ zwischen Höhe und Breite des Querschnittes so bestimmen, dass das Tragungsvermögen des Balkens ein Maximum wird, dies ist, wie man sich leicht überzeugt, der Fall, wenn $\frac{h}{b} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414 = \frac{10}{7}$ genommen wird. In anderen Fällen ist es wegen der Ausführung, namentlich wegen der Kosten der Modellanfertigungen, oder auch wegen des gefälligen Ansehens, oder wegen Raumersparung etc. angemessen, nicht nur die Querschnittsform der Art nach, sondern auch ganz bestimmte Verhältnisse zwischen den einzelnen Dimensionen des Querschnittes anzunehmen und dann kann man den Ausdruck für E jederzeit auf die Form bringen $E = a^3 H$, wobei a eine von den Abmessungen des Querschnittes und H eine reine Funktion von den angenommenen Verhältnissen zwischen den Querschnittsdimensionen bezeichnet. So z. B. kann der Ausdruck für die I-Form geschrieben werden wie folgt:

$$E = h^3 \frac{1}{6} \left\{ \frac{b_1}{h} \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 + \frac{b}{h} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 \right] \right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Nimmt man also für $\frac{b_1}{h}$, $\frac{h_1}{h}$, $\frac{b}{h}$ passende Werthe an, so ist in E nichts mehr unbestimmt als h und dieser Werth ergibt sich dann aus (1) und (2). Man findet:

$$h = \sqrt[3]{\left\{ \frac{\frac{6\,P\,l}{\mathfrak{S}_m}}{\frac{b_1}{h}\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 + \frac{b}{h}\left[1 - \left(\frac{h_1}{h}\right)^3\right]} \right\}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Verschiedene Biegungsweisen.

Wir werden in Folgendem noch mehrere Biegungsaufgaben behandeln, wollen aber dabei von der geringen Abweichung der Neutralfaser von der Axenfaser ganz absehen, wollen uns also so benehmen, wie wenn die Schwerpunktsfaser die Neutrallinie oder die Grenze wäre von den Gebieten, in welchen Spannungen und Pressungen herrschen.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir bestimmen:
1) die Gestalt der Schwerpunktfaser,
2) die Stellen, wo die Maximalpressungen eintreten,
3) den Betrag dieser Maximalpressungen.

Es ist $\mathfrak{S}$ E die Summe der statischen Momente aller in einem Querschnitte vorkommenden Spannungen und Pressungen, in Bezug auf eine, durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende, in der Ebene des Schnittes liegende aber auf die Richtung der biegenden Kraft senkrechte Drehungsaxe. Bezeichnet man durch M die algebraische Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte, welche jenen Spannungen und Pressungen das Gleichgewicht halten, so ist:

$$\mathfrak{S}\,E = M \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Dann ist aber vermöge Gleichung (6), Seite 17, wenn man s vernachlässiget:

$$\varrho\,\mathfrak{S} = z\,\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{S}$ vermittelst (1) findet man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{\varepsilon\,E\,z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

oder auch weil für schwache Biegungen, und wenn $d^2 x = o$ gesetzt wird $\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{d x^2}$ ist

$$\pm \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{\varepsilon\,E\,z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Kennt man M als Funktion von x, so gibt diese Gleichung durch Integration die Gestalt der Schwerpunktsfaser. Aus (1) folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{M}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Bestimmt man diejenigen Werthe von x, für welche M ein Maximum wird, so hat man die Stelle bestimmt, wo das Maximum der Spannung eintritt. Wird dieser Werth von x in (5) eingeführt, so erhält man den Werth der Maximalspannung, d. h. den Werth von $\mathfrak{S}_m$.

Wir wollen diese allgemeine Regel auf mehrere Beispiele anwenden.

Erster Fall. Ein Stab ist an dem einen seiner Enden eingespannt, am andern Ende belastet. Das Gewicht desselben sei p und soll berücksichtiget werden. Fig. 1, Tafel III.

Wählt man das freie Ende o zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems und setzt $o\,n = x$, $m\,n = y$, so ist annähernd $p\,\frac{x}{l}$ das Gewicht des Stabstückes $m\,o$ und es ist ferner $p\,\frac{x}{l} \times \frac{x}{2}$ annähernd das Moment dieses Gewichtes in Bezug auf die durch m gehende Axe. Die Momentensumme der Kräfte, die den Stab bei m zu brechen streben, ist demnach $M = P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}$. Die Gleichung der Schwerpunktsfaser ist demnach vermöge (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}\right)$$

Das Zeichen — ist genommen, weil die Kurve ihre concave Seite der Abscissenlinie zuwendet. Das erste Integrale dieser Gleichung ist:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\, E\, z}\left(\frac{1}{2}\, P\, x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\, x^3\right) + \text{Const}$$

Für $x = \overline{o\,n_1} = l$ (annähernd) ist $\frac{d\,y}{d\,x} = o$ (genau) demnach:

$$o = \frac{1}{\varepsilon\, E\, z}\left(\frac{1}{2}\, P\, l^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\, l^3\right) + \text{Const}$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\, E\, z}\left[\frac{1}{2}\, P\,(l^2 - x^2) + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,(l^3 - x^3)\right]$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{1}{\varepsilon\, E\, z}\left[\left(\frac{1}{2}\, P\, l^2 + \frac{1}{6}\, p\, l^2\right) x - \frac{1}{6}\, P\, x^3 - \frac{1}{24}\,\frac{p}{l}\, x^4\right] \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = o$ auch $y = o$ wird. Dies ist die Gleichung der Axenfaser. Für $x = l$ wird $y = m_1\, n_1 = f$ und man findet:

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon\, E\, z}\left[\frac{1}{3}\, P + \frac{1}{8}\, p\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Biegungsmoment M wird ein Maximum für $x = l$ und ist: $M_m = P\,l + \frac{p\,l}{2}$.

Die Maximalspannung an der Befestigungsstelle ist demnach vermöge (5):

$$\mathfrak{S}_m = \frac{P\,l + \frac{p}{2}\,l}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Zweiter Fall. Der Stab liegt mit beiden Enden auf Unterstützungen, ist in der Mitte belastet und hat ein Gewicht p. Fig. 2, Tafel III.

Es sei $2\,l$ die Entfernung der Stützpunkte, $2\,P$ die Belastung in der Mitte, so ist $P + \frac{1}{2}\,p$ der Druck, welchen jeder Stützpunkt auszuhalten hat. Nimmt man B als Anfangspunkt der Coordinaten und setzt für irgend einen Punkt m der Axenfaser $B\,n = x$, $m\,n = y$, so ist das Kraftmoment, welches in dem Querschnitte bei m die Spannungen und Pressungen hervorruft:

$$\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)x - \frac{p}{2\,l}\,x\,\frac{x}{2} = M$$

Demnach erhält man wegen (4):

$$-\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)x - \frac{p}{4\,l}\,x^2}{\varepsilon\,E\,z}$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)x^2 - \frac{p}{12\,l}\,x^3 + \text{Const}\right]$$

Für $x = l$ wird $\frac{d\,y}{d\,x} = o$, demnach:

$$o = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)l^2 - \frac{p}{12\,l}\,l^3 + \text{Const}\right]$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\left(l^2 - x^2\right) - \frac{p}{12\,l}\left(l^3 - x^3\right)\right]$$

Die nochmalige Integration liefert:

$$y = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\left(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right) - \frac{p}{12\,l}\left(l^3\,x - \frac{1}{4}\,x^4\right)\right]. \quad (9)$$

Die Senkung $C\,D = f$ beträgt:

$$f = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\frac{2}{3}\,l^3 - \frac{p}{12\,l}\,\frac{3}{4}\,l^3\right]$$

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{3}\,P + \frac{10}{96}\,p\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Das Moment M wird innerhalb $x = o$ und $x = l$ erst bei $x = l$ ein Maximum und beträgt dort:

$$M_{max} = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Für die bei D eintretende grösste Spannung ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Dritter Fall. Ein Stab liegt mit seinen Enden auf Stützen, ist in Entfernungen c von denselben mit P und P belastet; sein Eigengewicht beträgt p. Fig. 3, Tafel III.

Setzt man für einen zwischen E und D gelegenen Punkt m $Bn = x$, $mn = y$. Für einen zwischen E und B gelegenen Punkt m_1 dagegen $Bn_1 = x_1$, $m_1 n_1 = y_1$, so sind die Momente M und M_1 welche den Querschnitten bei m und m_1 entsprechen

$$M = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x - P(x - c) - \frac{p}{2l} x \frac{1}{2} x$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{2l} x_1 \frac{1}{2} x_1$$

oder:

$$M = Pc + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4l} x^2$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1^2$$

Die Gleichungen der Stabstücke BE und EF sind demnach, vermöge (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[Pc + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4l} x^2 \right]$$

$$-\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1^2 \right]$$

Die erste dieser Gleichungen gilt von $x = c$ bis $x = l$, die zweite von $x_1 = o$ bis $x_1 = c$.

Im Punkt E, d. h. für $x = x_1 = c$, müssen beide Gleichungen einerlei Ordinate und einerlei Tangente geben, d. h. es muss für $x = x_1 = c$, $y = y_1$ und muss $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ werden.

Die ersten Integrale dieser zwei Gleichungen sind:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c x + \frac{1}{4} p x^2 - \frac{p}{12 l} x^3\right] + C$$

$$-\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12 l} x_1^3\right] + C_1$$

wobei C und C_1 die Constanten der Integrale bedeuten. Wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ für $x = x_1 = c$ ist:

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c^2 + \frac{1}{4} p c^2 - \frac{p}{12 l} c^3\right] + C =$$
$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{c^2}{2} - \frac{p c^3}{12 l}\right] + C_1$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P c^2}{2} = (C_1 - C)\, \varepsilon E z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Eine wiederholte Integration gibt nun weiter:

$$-y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12} p x^3 - \frac{p}{48 l} x^4\right] + C x + B \; . \; . \; . \quad (12)$$

$$-y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{x_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} x_1^4\right] + C_1 x_1 + B_1 \; . \; . \quad (13)$$

wobei abermals B und B_1 die Constanten der Integration bezeichnen. Da für $x_1 = o$, auch $y_1 = o$ ist, so ist $B_1 = o$, nun ist aber für $x = x_1 = c$ $y = y_1$ daher:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{P c^3}{2} + \frac{1}{12} p c^3 - \frac{p c^4}{48 l}\right] + C c + B = \\ \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{c^3}{6} - \frac{p}{48 l} c^4\right] + C_1 c \end{array}\right\} \; . \; . \; . \quad (14)$$

Endlich ist für $x = l$ $\frac{dy}{dx} = o$, demnach:

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c l + \frac{1}{4} p l^2 - \frac{p}{12 l} l^3\right] + C = o \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Aus den Ausdrücken (11), (14), (15) folgen, mit Berücksichtigung, dass $B_1 = o$ ist, die Werthe von $C\ C_1\ B$. Die Gleichung (14) reduzirt, gibt:

$$\frac{1}{3} P c^3 \left[(C - C_1)\ c + B\right] \varepsilon E z = o$$

Für $C_1 - C$ den Werth gesetzt, der aus (11) folgt, erhält man:

$$B = -\frac{1}{6} \frac{P c^3}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Nun folgt aus (15):

$$C = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

und vermittelst dieses Werthes folgt aus (11):

$$C_1 = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Führt man diese drei Werthe (16), (17), (18) in (12) und (13) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{1}{\varepsilon E z} & \left[\frac{1}{6} P c^3 + \left(P c l + \frac{1}{6} p l^2\right) x \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} P c x^2 - \frac{1}{12} p x^3 + \frac{p}{48 l} x^4 \right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (19)$$

$$y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}\right) x_1 - \left(P + \frac{1}{2} p\right) \frac{x_1^3}{6} + \frac{p}{48 l} x_1^4\right] (20)$$

Was das Tragungsvermögen eines in der Art belasteten Balkens betrifft, so ergibt sich dieses aus dem Maximalwerth der Momente M und M_1; der Werth von M_1 wird am grössten für $x_1 = c$, der Werth von M ist für $x = c$ gleich dem Werth von M_1 für $x_1 = c$. Allein der Werth von M ist für $x = c$ der kleinste und wird am grössten für $x = l$, denn $\frac{d M}{d x} = \frac{1}{2} p - \frac{p x}{2 l} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$

wird gleich Null für $x = l$, die Maximalspannung tritt also bei D ein und ist:

$$P c + \frac{1}{4} p l$$

Es ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P c + \frac{1}{4} p l\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (21)$$

Vierter Fall. Der Stab liegt auf zwei Unterstützungen und ist in einem Punkt, der von diesen Unterstützungen um c und c_1 entfernt ist, mit $2P$ belastet. Das Gewicht des Stabes ist p. Fig. 4, Tafel III.

Setzt man $\overline{Bn} = x$, $mn = y$, $A n_1 = x_1$, $n_1 m_1 = y_1$ das Moment für den Punkt m gleich M, jenes für den Punkt m_1 gleich M_1, so hat man:

Belastung des Punktes B . . . . $= \frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}$

" " " A . . . . $= \frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}$

und man findet nun:

$$\left.\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{2l} x \, \frac{x}{2} \\ M_1 &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{2l} x_1 \, \frac{x_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Die Gleichungen der Kurvenstücke B D und A D sind demnach:

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{4l} x^2 = - \varepsilon E z \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1^2 = - \varepsilon E z \frac{d^2 y_1}{d x_1^2}$$

Die ersten Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} - \varepsilon E z \frac{d y}{d x} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{p}{12l} x^3 + C \\ - \varepsilon E z \frac{d y_1}{d x_1} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12l} x_1^3 + C_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (23)$$

wobei C und C_1 die Constanten der Integration bezeichnen.

Zieht man zum Punkt D eine Berührungslinie und nennt α und α_1 den Winkel, welcher dieselbe mit den positiven Richtungen von x und x_1 bildet, so ist $\alpha + \alpha_1 = \pi$, demnach $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \alpha_1 = o$.

Allein es ist $\operatorname{tang} \alpha$ der Werth von $\frac{d\,y}{d\,x}$ für $x = c$ und $\operatorname{tang} \alpha_1$ der Werth von $\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ für $x = c_1$, demnach wegen der Gleichung (23):

$$o = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c_1}{l}\right)\frac{c^2}{2} - \frac{p\,c^3}{12\,l} + C \\ \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c}{l}\right)\frac{c_1^{\,2}}{2} - \frac{p\,c_1^{\,3}}{12\,l} + C_1 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Integrirt man die Gleichungen (23), so folgt ferner:

$$\left. \begin{array}{l} -\,\varepsilon\,E\,z\,y = \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c_1}{l}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x^4 + C\,x + D \\ -\,\varepsilon\,E\,z\,y_1 = \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c}{l}\right)\frac{x_1^{\,3}}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x_1^{\,4} + C_1\,x_1 + D_1 \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (25)$$

Beide Integrations-Constanten sind jedoch Null, weil für $x = o$ und $x_1 = o$ auch y und y_1 verschieden. Dann ist aber für $x = c$ und $x_1 = c_1$, $y = y_1 = f$. Demnach:

$$\left(\frac{1}{2}p + P\frac{c_1}{l}\right)\frac{c^3}{6} - \frac{p}{48\,l}\,c^4 + C\,c = \left(\frac{1}{2}p + P\frac{c}{l}\right)\frac{c_1^{\,3}}{6} - \frac{p}{48\,l}\,c_1^{\,4} + C_1\,c_1 \quad . \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (24) und (26) findet man für C und C_1 nachstehende Werthe:

$$\left. \begin{array}{l} C = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}p + \frac{P c_1}{l}\right)\frac{c^2}{2}\left(\frac{c}{3} + c_1\right) - \left(\frac{1}{2}p + \frac{P c}{l}\right)\frac{c_1^{\,3}}{3} + \frac{p\,c_1^{\,4}}{16\,l} + \frac{p\,c^3}{12\,l}\left[\frac{c}{4} + c_1\right]}{c + c_1} \\ C_1 = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}p + \frac{P c}{l}\right)\frac{c_1^{\,2}}{2}\left(\frac{c_1}{3} + c\right) - \left(\frac{1}{2}\,p + \frac{P c_1}{l}\right)\frac{c^3}{3} + \frac{p\,c^4}{16\,l} + \frac{p\,c_1^{\,3}}{12\,l}\left[\frac{c_1}{4} + c\right]}{c + c_1} \end{array} \right\} (27)$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichung der Kurve zu setzen, nämlich in

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c_1}{l}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x^4 + C\,x\right] \\ y_1 = -\frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c}{l}\right)\frac{x_1^{\,3}}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x_1^{\,4} + C_1\,x_1\right] \end{array} \right\} \quad . \; . \quad (28)$$

Die Momente M und M_1 wachsen von B und A an bis D hin und erreichen demnach ihr Maximum in D; dieses ist für beide:

$$P\frac{c c_1}{l}+\frac{1}{2}p c\left[1-\frac{c}{2l}\right]=P\frac{c c_1}{l}+\frac{p c c_1}{4l}=\frac{c c_1}{l}\left[P+\frac{p}{4}\right]$$

Es wird demnach:

$$\mathfrak{S}_m E=\frac{c c_1}{l}\left[P+\frac{p}{4}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und bei D ist der gefährliche Querschnitt.

Fünfter Fall. Fig. 5, Tafel III. Der Stab ist bei A befestiget, bei C unterstützt, bei B belastet.

Es sei:

l der Horizontalabstand der Punkte A und C.

c der Horizontalabstand der Punkte B und C.

$\left.\begin{matrix} x = C n \\ y = m n \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen B und C.

$\left.\begin{matrix} x_1 = C n_1 \\ y_1 = m_1 n_1 \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen A und B.

P die Belastung bei B.

X der unbekannte Druck gegen die Stütze C.

α der Winkel, den die zum Punkt B gezogene Berührungslinie mit der Axe C A bildet.

Y = B D die Ordinate des Punktes B.

Setzt man noch zur Abkürzuug:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{X}{\varepsilon E z}=m \\[2ex] \dfrac{P}{\varepsilon E z}=n \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und vernachlässiget das Gewicht des Stabes, so sind die Gleichungen der Kurvenstücke B C und B A:

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=-m x, \quad \frac{d^2 y_1}{d x_1^2}=(n-m) x_1-n c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\frac{d y}{d x}=-\frac{m x^2}{2}+A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$y = -\frac{m\,x^3}{6} + A\,x + B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$\frac{d\,y_1}{d\,x_1} = (n - m)\,\frac{x_1^{\,2}}{2} - n\,c\,x_1 + A_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$y_1 = (n - m)\,\frac{x_1^{\,3}}{6} - n\,c\,\frac{x_1^{\,2}}{2} + A_1\,x + B_1 \quad \ldots \quad (35)$$

wobei $A\ B\ A_1\ B_1$ die Constanten der Integrationen bedeuten;

für $x = o$ soll werden $y = o$, daher hat man wegen (33) . $B = o$

„ $x = c$ „ „ $y = Y$, „ „ „ „ (33)

$$Y = -m\,\frac{c^3}{6} + A\,c$$

„ $x = c$ „ „ $\frac{d\,y}{d\,x} = \text{tang}\,\alpha$, daher hat man wegen (32)

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{m\,c^2}{2} + A$$

„ $x_1 = l$ „ „ $y_1 = o$, daher hat man wegen (35)

$$o = (n - m)\,\frac{l^3}{6} - n\,c\,\frac{l^2}{2} + A_1\,l + B_1$$

„ $x_1 = c$ „ „ $y_1 = Y$, daher hat man wegen (35)

$$Y = (n - m)\,\frac{c^3}{6} - \frac{n\,c^3}{2} + A_1\,c + B_1$$

„ $x_1 = c$ „ „ $\frac{d\,y_1}{d\,x_1} = \text{tang}\,\alpha$, daher hat man wegen (34)

$$\text{tang}\,\alpha = (n - m)\,\frac{c^2}{2} - n\,c^2 + A_1$$

„ $x_1 = l$ „ „ $\frac{d\,y_1}{d\,x_1} = o$, daher hat man wegen (34)

$$o = (n - m)\,\frac{l^2}{2} - n\,c\,l + A_1$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen findet man:

$$m = n\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{c}{l}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{l}\right)^3\right] \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

$$Y = \frac{c^2 l}{2}\,(m + n) - \frac{c^3}{6}\,(m + 3\,n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{2}\,(l - c)\left[m\,(l + c) - n\,(l - c)\right] \quad \ldots \quad (38)$$

$$A = \frac{1}{2} m l^2 - \frac{1}{2} n (l - c)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

$$B = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

$$A_1 = n c l - (n - m) \frac{l^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$B_1 = - \frac{1}{2} n c l^2 + \frac{1}{3} (n - m) l^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Der Ausdruck (36) bestimmt wegen (30) den Druck X, welchen die Unterstützung C erleidet. Substituirt man den Werth von m, welchen (36) darbietet, in die folgenden Ausdrücke, so erhält man alle übrigen Grössen Y $\tan \alpha$ A B A_1 B_1 ausgedrückt durch die gegebenen Grössen der Aufgabe, und die Gleichungen (33) und (35) geben dann die Formen der Kurvenstücke B C und B A.

Nun ist noch die Frage zu beantworten, an welcher Stelle des Stabes das Maximum der Spannungsintensität eintritt. Dieses Maximum tritt an derjenigen Stelle ein, für welche der Krümmungshalbmesser den kleinsten Werth hat, für welchen demnach

$$m x \text{ oder } (m - n) x_1 + n c$$

am grössten wird.

Es sei $m > n$, was wegen (36) der Fall ist, wenn

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c}{l}\right)^3 > \frac{3}{2} \left(\frac{c}{l}\right)$$

oder wenn

$$\left(\frac{c}{l}\right) > \sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Dann wird $(m - n) x_1 + n c$ am grössten für den grössten Werth von x_1, daher für $x_1 = l$ und dieser grösste Werth ist dann:

$$(m - n) l + n c$$

Der grösste Werth von $m x$ ist dagegen $m c$. Die Differenz dieser beiden Maxima ist:

$$m c - [(m - n) l + n c] = - (m - n) (l - c)$$

ist also, weil $m > n$ und $l > c$ ist negativ. Die Maximalspannung tritt demnach, wenn $m > n$ ist, in A ein.

Es sei dagegen $m < n$ oder $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$ dann wird $(m-n)x_1 + nc$ am grössten für den kleinsten Werth von x_1, also für $x_1 = c$ und dieses Maximum wird $(m-n)c + nc = mc$, das Maximum von mx ist aber ebenfalls gleich mc. Die Maximalspannung tritt also, wenn $m < n$ oder $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$ ist, im Punkt B ein.

Biegung durch Zusammendrückung.

Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes. Wenn ein langer stabförmiger Körper Fig. 6, Tafel III. auf eine Unterlage A_2 aufrecht gestellt und dann einem Vertikaldruck P ausgesetzt wird, tritt zunächst eine Zusammendrückung des Stabes ein, kann aber auch gleichzeitig eine bleibende Biegung entstehen. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir untersuchen, wobei wir abermals die Voraussetzungen machen, welche Seite 13 für die gewöhnliche Biegung ausgesprochen wurden.

Es sei $A A_1 A_2$ Fig. 6 und 7, Tafel III. die Schwerpunktsfaser des im Allgemeinen zusammengedrückten und gebogenen Stabes $C B C_2 B_2$.

Zieht man durch irgend einen Punkt m der Schwerpunktsfaser eine Normallinie $m_3 m q$, so wird in derselben irgend ein Punkt m_2 zu finden sein, in welchem weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Da dies von jedem Normalquerschnitt gesagt werden kann, so wird es überhaupt eine stetige Linie $D D_1 D_2$ geben, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammenpressung stattfindet, und diese Linie ist die neutrale Linie. Dieselbe muss aber nicht in den Raum fallen, den der Stab einnimmt, sie kann auch ausserhalb dieses Raumes fallen, und dann ist die Neutrallinie nur ein geometrisches Gebilde, welchem keine Realität entspricht. In der Figur liegt die Neutrallinie theils innerhalb, theils ausserhalb des Stabes. An der linken Seite der Linie herrscht Ausdehnung, an der rechten Zusammenpressung.

Wir nehmen $A A_2$ als Abscissenaxe und nennen

$\left.\begin{array}{l} An = x \\ mn = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Schwerpunktfaser.

$m m_2 = v$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktsfaser. Diese Entfernung gemessen in der Richtung der Normale.

$m m_1 = \zeta$ die Entfernung irgend einer zusammengedrückten Faser von der Schwerpunktsfaser, ebenfalls gemessen wie v.

$\left.\begin{array}{l} m m_3 = z \\ m q = z_1 \end{array}\right\}$ die Entfernungen der Schwerpunktsfaser von den Kantenfasern.

$\mathfrak{P}$ die Intensität der Pressung im Punkte m der Schwerpunktsfaser.

$\widehat{n\,m\,q} = \varphi$ Winkel, den die Normale $m\,q$ mit der Ordinatenrichtung bildet. Es ist vollkommen genau $\tang \varphi = \frac{dy}{dx}$.

Ω den Querschnitt des Stabes.

p die Intensität der Pressung bei m_1.

Dies vorausgesetzt, findet man ganz auf ähnliche Weise, wie in dem Fundamentalproblem der gewöhnlichen Biegung:

$$p = \mathfrak{P} - \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$v = \mathfrak{P} \frac{\varrho}{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\int p\, df = \mathfrak{P}\, \Omega \quad = \text{Summe der Pressungen.}$$

$$\int \zeta p\, df = \frac{\varepsilon}{\varrho} z E = \text{Summe der Momente.}$$

Zerlegt man P in zwei Kräfte, $P \cos \varphi$ und $P \sin \varphi$, so ist es die erstere derselben, welche die Zusammendrückung der Fasern im Querschnitt $m_3\,q$ hervorbringt, und man erhält demnach:

$$\mathfrak{P}\, \Omega = P \cos \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$P\, y = \frac{\varepsilon}{\varrho} z E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Es ist aber auch annähernd:

$$\varrho = - \frac{dx^2}{d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen enthalten die Lösung der Aufgabe.

Eliminirt man aus (1) und (2) $\mathfrak{P}$ und $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ vermittelst (3) und (4) so findet man:

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E\, z} y \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$v = \frac{E\, z \cos \varphi}{\Omega\, y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Aus (4) und (5) folgt aber:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{P}{\varepsilon z E} y = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{P}{\varepsilon z E} = k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

so ist das Integrale von (8):

$$y = \mathfrak{M} \sin k x + \mathfrak{N} \cos k x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die Constanten der Integration bedeuten. Da für $x = o$ auch $y = o$ ist, so muss $\mathfrak{N} = o$ sein. Daher hat man:

$$y = \mathfrak{M} \sin k x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und es bedeutet $\mathfrak{M}$ die grösste Ausbiegung bei A_1 Fig. 6, Tafel III.

Setzt man $\overline{A\,A_2} = c$, so ist für $x = c$, $y = o$ demnach:

$$\sin k c = o,$$

Der kleinste von o verschiedene Winkel, für welchen das Sinus gleich Null wird, ist π, wir erhalten daher:

$$k c = \pi, \quad k = \frac{\pi}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Setzt man in (6) $\zeta = o$, so gibt dieser Ausdruck die im Punkte m der Schwerpunktfaser herrschende Spannungsintensität, und diese ist $\frac{P \cos \varphi}{\Omega}$.

Betrachtet man φ als eine unendlich kleine Grösse, von welcher die zweiten und höheren Potenzen vernachlässiget werden dürfen, so kann man $\cos \varphi = 1$ setzen und dann wird die Pressungsintensität in der Axenfaser constant gleich $\frac{P}{\Omega}$. Nennt man l die Länge des Stabes im natürlichen Zustand, so ist:

$$l \left(1 - \frac{P}{\Omega} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

die Länge der gebogenen und zusammengedrückten Axenfaser. Diese Länge ist aber auch:

$$2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1+\mathfrak{M}^2\, k^2\, \mathrm{Cos}^2\, k\, x}$$

Man hat daher die Gleichung:

$$1\left(1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1+\mathfrak{M}^2\, k^2 \cos^2 k\, x} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Allein wenn φ unendlich klein ist, ist es auch $\mathfrak{M}$. Man kann daher schreiber:

$$\sqrt{1+\mathfrak{M}^2\, k^2 \cos^2 k\, x} = 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 k^2 \cos^2 k\, x$$

demnach:

$$\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1+\mathfrak{M}^2\, k^2 \cos^2 k\, x} = \int_0^{\frac{c}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2\, k^2 \cos^2 k\, x\right] d\, x$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2\, k^2 \int_0^{\frac{c}{2}} \cos^2 k\, x\, dx$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2\, k\, \frac{k\, c}{4} = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{1}{4}k^2\, \mathfrak{M}^2\right]$$

die Gleichung (14) wird demnach:

$$1\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] = c\left[1 + \frac{1}{4}k^2\, \mathfrak{M}^2\right]$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{1}{c}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1}$$

oder wenn man für c seinen Werth $c = \frac{\pi}{k}$ aus (12) einführt:

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{1k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Hiermit ist nun die grösste Ausbiegung des Stabes berechnet. Allein dieser Ausdruck gibt nicht immer reelle Werthe, denn wenn P klein ist, ist auch vermöge (9) k klein. Im Gleichgewichtszustand kann also nur dann eine Biegung vorhanden sein, wenn P oder k so gross ist, dass der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck positiv ist, d. h. wenn

$$\frac{l\,k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] > 1$$

Nennt man Q denjenigen Werth von P, welcher den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null macht, so ist Q die grösste Belastung, welche der Stab gerade aufrecht stehend tragen kann, ohne eine Biegung anzunehmen. Mit Berücksichtigung von (9) ist für diesen Werth von Q

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\, z\, E}}\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right] = 1$$

oder auch wenn man $\frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}$ gegen die Einheit vernachlässiget:

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\, z\, E}} = 1$$

demnach:

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Diese Gleichung (16) kann auch direkt aus (12), nämlich aus $k = \frac{\pi}{c}$ erschlossen werden. Es ist nämlich wegen (9) $k^2 = \frac{P}{\varepsilon\, z\, E}$ demnach:

$$\frac{P}{\varepsilon\, z\, E} = \frac{\pi^2}{c^2}$$

$$P = \pi^2\,\frac{1}{c^2}\,\varepsilon\, z\, E$$

Diese Gleichung bestimmt also die Belastung, für welche eine gewisse Zusammenbiegung eintritt. Setzt man für c seinen grössten Werth, so erhält man diejenige Belastung, welche die kleinste Zusammenbiegung bewirkt. c wird aber am grössten und wird unendlich nahe gleich $l\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]$ wenn die Biegung verschwindet. Setzt man demnach in obige Gleichung für $c = l \left[1 - \frac{Q}{\Omega \varepsilon} \right]$ und $= Q$ so erhält man:

$$Q = \frac{\pi^2 \varepsilon z E}{l^2 \left[1 - \frac{Q}{\Omega \varepsilon} \right]^2}$$

oder auch weil $\frac{Q}{\Omega \varepsilon}$ gegen 1 vernachlässiget werden kann:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2}$$

Allein diese kleinste Belastung Q, welche im Stande ist eine Biegung hervorzubringen, ist gleich der grössten Belastung, die der Körper ohne sich zu biegen, also aufrecht stehend, tragen kann.

Fassen wir nun alle Ergebnisse unserer Untersuchung zusammen, so erhalten wir Folgendes:

1) Der Stab ist im Gleichgewichtszustand nur zusammengedrückt und nicht gebogen, so lange die Belastung P gleich oder kleiner ist, als:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

2) Die grösste Belastung, welche ein Stab aufrecht stehend zu tragen vermag, ist:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

3) Ist die Belastung P grösser als dieser Werth von Q, so ist der Stab im Gleichgewichtszustand nicht nur comprimirt, sondern auch gebogen. Die grösste Ausbiegung $\mathfrak{M}$ ist, wegen (15)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l k}{\pi} \left[1 - \frac{P}{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \right] - 1} \\ \text{wobei} \qquad k &= \sqrt{\frac{P}{\varepsilon z E}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

4) Im gebogenen Zustand ist die Gleichung der Schwerpunktfaser vermöge (11)

$$y = \mathfrak{M} \sin k x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

5) Die Intensität p der Pressung in irgend einem Punkte des gebogenen Stabes ist vermöge (6):

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

6) Die Entfernung v der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser ist vermöge (7)

$$v = \frac{E z \cos \varphi}{\Omega y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

7) Zur Bestimmung des Winkels φ hat man die Gleichung:

$$\tan \varphi = \frac{d y}{d x} = \mathfrak{M} k \cos k x$$

Vermittelst der Gleichung (22) kann die Gestalt der Neutralfaser bestimmt werden, wenn vorerst die Axenfaser vermittelst (20) ermittelt ist.

Biegung eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, den Gleichgewichtszustand zu bestimmen, der in einem ursprünglich krummen Stab eintritt, wenn auf denselben äussere Kräfte einwirken; beschränken uns jedoch auf den Fall, dass die Axenlinie des Stabes im ursprünglichen Zustande eine ebene Kurve ist, und dass die Angriffspunkte und die Richtungen aller äusseren Kräfte in der Ebene der Axenkurve liegen. Wir können uns zu diesen Untersuchungen der Figuren 7 und 8, Tafel I., bedienen, wenn wir uns so benehmen, wie wenn die Axenlinie $l_1\, n_1\, m_1\, k_1$ krumm gezeichnet, und $e_1\, g_1$ $f_1\, h_1$ die zu den Punkten m_1 und n_1 gehörigen Normalen wären.

Nennen wir für den natürlichen Zustand des Stabes, Fig. 7, Tafel I.:

ds_0 die Länge des Bogenelements $m_1\, n_1$.

ϱ_0 den Krümmungshalbmesser des Bogenelements $m_1\, n_1$.

$d\,\Theta_0$ den unendlich kleinen Winkel, unter welchem sich die Normalen $e_1\, g_1$ $f_1\, h_1$ im Krümmungsmittelpunkt schneiden.

$n_1\, v_1 = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens $u_1\, v_1$ von der Schwerpunktfaser.

$n_1\, f_1 = z$, $n_1\, h_1 = z_1$ die Entfernungen der obersten und der untersten Faser von der Schwerpunktfaser.

Nennen wir ferner für den durch die äusseren Kräfte deformirten Stab, Fig. 8, Tafel I.:

ϱ den Krümmungshalbmesser des Bogenelements mn.

$d\Theta$ den unendlich kleinen Winkel $m\,O\,n$, den die Richtungen der zu m und n gezogenen Normalen einschliessen.

Ω den Querschnitt des Stabes.

$\left.\begin{array}{l} nv = \zeta \\ nf = z \\ nh = z_1 \end{array}\right\}$ wie im natürlichen Zustand des Stabes.

s die im Faserelement mn herrschende Spannungsintensität.

Für den Fall, dass mn nicht ausgedehnt, sondern zusammengedrückt ist, ist s eine Pressung und daher negativ in Rechnung zu bringen.

$\overline{nq} = \nu$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser.

σ die im Faserelement uv herrschende Spannungsintensität.

$x\;y$ die Coordinaten eines Punktes n der Schwerpunktfaser in Bezug auf ein durch einen beliebigen Punkt k gelegtes rechtwinkeliges Coordinatensystem.

φ den Winkel, den die zum Punkt n gezogene Berührungslinie mit der x-Axe bildet. Dann ist genau $\tang \varphi = \frac{dy}{dx}$

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht.

M die Summe der statischen Momente aller äusseren auf das Stabstück nk in dem Sinne einwirkenden Kräfte, dass dieselben eine Biegung hervorrufen, wodurch eine Zunahme der Krümmung entsteht, oder ϱ kleiner als ϱ_0 wird. Diese Momente sind zu nehmen in Bezug auf eine durch n gehende, auf der Ebene der Axenlinie senkrechte Drehungsaxe.

K die algebraische Summe aller äusseren auf das Stabstück nk einwirkenden Kräfte, deren Richtungen parallel sind zu der zum Punkt n der Axenlinie gehörenden Tangente. Diese Kräfte sind also die zur Tangente an n parallelen Componenten, welche durch Zerlegung der wirklich einwirkenden äusseren Kräfte erhalten werden, und sie sind positiv oder negativ in Rechnung zu bringen, je nachdem sie eine Ausdehnung oder eine Zusammendrückung der zwischen $e\,g$ und $f\,h$ enthaltenen Faserstückchen hervorzubringen streben.

Dies vorausgesetzt hat man nun:

$$\overline{m_1 n_1} = ds_0 = \varrho_0\, d\Theta_0, \qquad \overline{u_1 v_1} = (\varrho_0 + \zeta)\, d\Theta_0,$$

$$\overline{mn} = \varrho\, d\Theta = ds_0 \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) \qquad \overline{uv} = (\varrho + \zeta)\, d\Theta$$

Hieraus folgt: $\overline{u\,v} - \overline{u_1\,v_1} = (\varrho + \zeta)\, d\,\Theta - (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 =$

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \varrho\, d\,\Theta - \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \varrho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) ds_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) - \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0$$

$\overline{u\,v} = \overline{u_1\,v_1}$ ist aber die Ausdehnung der Faser, deren natürliche Länge gleich $\overline{u_1\,v_1} = (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \varrho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) ds_0$ war, und da die bei v wirkende Spannungsintensität σ ist, so hat man auch $\overline{u\,v} - \overline{u_1\,v_1} = \overline{u_1\,v_1}\, \frac{\sigma}{\varepsilon}$, wir erhalten daher:

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) - \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0\, \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

oder:

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right)\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$$

In allen Fällen der Anwendung sind $\frac{\zeta}{\varrho}$ $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ $\frac{S}{\varepsilon}$ $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen, deren Produkte vernachlässiget werden können. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der letzten Gleichung:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hierdurch ist nun die Spannungsintensität in einer Entfernung ζ oberhalb der Axenfaser berechnet. Setzen wir in diesen Ausdruck $\zeta = -\,v$, so muss σ gleich Null werden, denn die Neutralfaser ist ja diejenige Faser, in welcher weder Spannungen noch Pressungen vorkommen. Wir erhalten demnach aus (1):

$$v = \frac{S}{\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für den Fall, dass S eine Pressung ist, muss dieselbe negativ in Rechnung gebracht werden, fällt also auch v negativ aus und liegt dann die Neutralfaser oberhalb der Axenfaser.

Theilen wir den Querschnitt f h, Fig. 8., durch Linien, die zur Ebene der Figur senkrecht sind, in unendlich viele unendlich schmale Streifen und nennen d f den Flächeninhalt des bei w befindlichen Streifens, so ist σ d f die Kraft, welche die Fasern dieses Querschnittes d f spannt, ferner $\int \sigma \, df$ die Summe aller spannenden Kräfte, endlich $\int \sigma \, \zeta \, df$ die Summe der Momente derselben. Setzen wir in diese Integrale für σ den Ausdruck (1), so folgt

$$\int \sigma \, df = \int \left[S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] df$$

$$\int \zeta \, \sigma \, df = \int \left[S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] \zeta \, df$$

wobei die Integrationen auf den ganzen Querschnitt f h auszudehnen sind. Da sich diese Integrationen auf ζ und nicht auf ϱ beziehen und der Voraussetzung gemäss n der Schwerpunkt des Querschnittes ist, so hat man $\int \zeta \, df = 0$ und ist $\int \zeta^2 \, df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes. Bezeichnen wir dasselbe mit μ, so werden obige Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma \, df &= S \, \Omega \\ \int \sigma \, \zeta \, df &= \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Gleichgewichtszustand erfordert aber 1) dass die Summe K der äusseren auf Spannung wirkenden Kräften gleich ist der Summe aller im Querschnitt f h vorkommenden inneren Spannungen; 2) dass die Summe der Momente M aller äusseren Kräfte gleich ist der Summe der Momente aller im Querschnitt f h vorkommenden Spannungen.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind demnach:

$$\left. \begin{aligned} S \, \Omega &= K \\ \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu &= M \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Führt man den Werth von S und von $\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)$, welche sich aus diesen Ausdrücken ergeben in (1) und (2) ein, so erhält man:

$$\sigma = \frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu}\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$v = \frac{K}{\Omega}\frac{\mu}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichungen (4), (5), (6) enthalten die Lösung unserer Aufgabe. Die erste der Gleichungen (4) bestimmt die im Allgemeinen variable Spannungsintensität, welche in einem beliebigen Punkt der Schwerpunktfaser herrscht. Die zweite der Gleichungen bestimmt die Gestalt der Axenfaser im gebogenen Zustande des Stabes. Die Gleichung (6) bestimmt die Gestalt der Neutralfaser; endlich die Gleichung (5) die Spannungsintensität in irgend einem Punkt im Innern des Stabes.

Wir wollen noch die Wirkungsgrösse berechnen, die erforderlich ist, um irgend eine Biegung des Stabes zu bewirken.

Wenn die Biegung beginnt, ist die Spannungsintensität im Faserstückchen $\overline{u_1 v_1}$ gleich Null; wenn die Biegung geschehen ist, beträgt diese Spannungsintensität σ. In irgend einem Augenblick während des Vorganges der Biegung hat die Spannungsintensität im Faserelement $\overline{u_1 v_1}$ einen gewissen Werth σ_1 und in diesem Moment ist die Ausdehnung desselben $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{\sigma_1}{\varepsilon}$. Schreitet die Biegung im nächsten Zeitelement weiter fort, so nimmt die Spannungsintensität um $d\sigma_1$ zu und wächst die Ausdehnung um $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d\sigma_1}{\varepsilon}$. Die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um alle Faserstückchen des Querschnittes $d f$ um $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d\sigma_1}{\varepsilon}$ auszudehnen, ist daher $\sigma_1 \, d f \, d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d\sigma_1}{\varepsilon}$. Integrirt man diesen Ausdruck in Bezug auf σ_1 von $\sigma_1 = 0$ bis $\sigma_1 = \sigma$, so erhält man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um das Faserprisma, dessen Länge $d s_0$ und Querschnitt $d f$ ist, aus dem natürlichen Zustand in denjenigen zu versetzen, in welchem eine Spannungsintensität σ eintritt und der Krümmungshalbmesser von $\overline{m n}$ gleich ϱ wird. Diese Wirkung ist demnach:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \sigma^2$$

oder wenn man für σ aus (5) seinen Werth setzt:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu}\zeta\right)^2$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach ζ und dehnt das Integrale über den ganzen Querschnitt aus, so erhält man die Wirkung, welche erforderlich ist, um die zwischen den Ebenen $e_1 g_1$ $f_1 h_1$, Fig. 7, eingeschlossene Parthie des Stabes aus dem ursprünglichen Zustand in denjenigen zu versetzen, in welchem der Krümmungshalbmesser ϱ eintritt. Dieses Integrale ist:

$$ds_0 \frac{1}{2\varepsilon} \int \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu}\zeta\right)^2 df$$

Erlauben wir uns $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, so begehen wir in allen Fällen der Anwendung keinen merklichen Fehler, gelangen aber hierdurch zu einem viel einfacheren Endresultat. Unter dieser Voraussetzung wird das obige Integrale:

$$\frac{ds_0}{2\varepsilon} \int \left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 + 2\frac{K}{\Omega}\frac{M}{\mu}\zeta + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \zeta^2\right] df$$

Es ist aber $\int df = \Omega$, $\int \zeta \, df = 0$, $\int \zeta^2 \, df = \mu$. Demnach erhalten wir:

$$\frac{ds_0}{2\varepsilon}\left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 \Omega + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \mu\right] = \frac{ds_0}{2\varepsilon}\left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right)$$

Integriren wir endlich nach s_0 innerhalb derjenigen Punkte der Axenfaser, die das Bogenstück bestimmen, für welches die Wirkungsgrösse berechnet werden soll, so erhalten wir endlich für die totale Wirkung W, welche erforderlich ist, um ein bestimmtes Bogenstück des ursprünglich krummen Stabes zu biegen, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int \left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right) ds_0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

In diesem Ausdruck sind aber K^2 und M Funktionen von s_0.

Setzt man für M den Werth. der aus der zweiten der Gleichungen (4) folgt, so erhält man auch:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int \left[\frac{K^2}{\Omega} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \mu\right] ds_0 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Die folgenden einfachen Beispiele werden die Anwendung dieser Resultate verständlich machen.

1) Ein im natürlichen Zustande gerader Stab, Fig. 1, Tafel III., sei einerseits eingespannt, andererseits mit P belastet. Es tritt eine Biegung ein, und man soll die Wirkung berechnen, welche dieser Biegung entspricht. Nennen wir $O\,n = x \quad m\,n = y$ die Coordinaten eines Punktes m der Axenlinie, so ist $P\,x = M$ das Biegungsmoment für den Punkt m. Ist die Biegung sehr schwach, so dürfen wir K vernachlässigen, weil in diesem Fall die Axenfaser keine merkliche Ausdehnung erleidet. Setzen wir in (7) $M = P\,x$, $K = o$, $\mu = E\,z$, und erlauben uns wegen der vorausgesetzten schwachen Biegung $d\,s_0 = d\,x$ zu setzen, so erhalten wir:

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int_0^l \frac{P^2\,x^2}{E\,z}\,d\,x = \frac{P^2}{6\,\varepsilon\,E\,z}\,l^3 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Heissen wir $\mathfrak{S}_m$ die Maximalspannung, welche bei a eintritt, so ist $\mathfrak{S}_m\,E = P\,l$. Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von P in (9) ein, so folgt auch:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{S}_m^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

2) Ein ursprünglich gerader Stab von einer Länge l werde um einen Cylinder vom Halbmesser R herumgewickelt. Die Wirkungsgrösse, welche diesem Vorgang entspricht, soll berechnet werden.

Da in diesem Fall die Axenfaser nicht gedehnt wird, so ist zunächst $K = o$ zu setzen. Da ferner der Stab ursprünglich gerade war, so ist $\frac{1}{\varrho_0} = o$ und weil der Stab kreisförmig gebogen wird, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}$ eine Constante. Wir erhalten daher vermöge (8):

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int \frac{\varepsilon^2\,\mu}{R^2}\,d\,s_0 = \frac{\varepsilon\,\mu\,l}{2\,R^2}$$

Verwindung oder Torsion eines Stabes.

Erklärungen. Denken wir uns, ein stabförmiger Körper werde am einen Ende festgehalten und am anderen durch ein drehend wirkendes Kräftepaar angegriffen, so entsteht in dem ganzen Stabe eine Verwindung, bis die inneren Kräfte mit dem Kräftepaar ins Gleichgewicht gekommen sind.

Nennen wir auch hier wiederum eine Reihenfolge von Atomen, die in einer zur Richtung des Stabes parallelen geraden Linie liegen, eine Faser, so können wir uns denken, der Stab bestehe in seinem natürlichen Zustande aus einem Bündel von geradlinigen, neben einander liegenden und unter einander verbundenen Fasern, dagegen in verwundenem Zustande aus einem Bündel von um einander gewundenen aber unter einander verbundenen Fasern.

Der Gleichgewichtszustand des Stabes wäre vollkommen bekannt, wenn man im Stande wäre anzugeben: 1) die Gestalt jeder einzelnen Faser; 2) die Kräfte, welche jedes Faserstückchen in seiner Gleichgewichtslage erhalten. Allein diese genaue Ermittelung des Gleichgewichtes ist mit so vielen Schwierigkeiten verbunden, dass wir uns mit einer Annäherung begnügen müssen, und diese erhalten wir dadurch, dass wir über den Zustand der verwundenen Fasern folgende naturgemäss scheinende Annahmen machen.

Wir nehmen an: 1) die Atome, welche ursprünglich in einem und demselben Querschnitt lagen, ändern ihre relative Gegeneinanderlagerung während der Verwindung nicht; 2) jede Faser erhält durch die Verwindung die Gestalt einer Schraubenlinie. Nehmen wir überdies an, der Querschnitt des Stabes sei so beschaffen, dass er durch zwei auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Linien in vier congruente Theile getheilt wird, so folgt aus obigen Annahmen, dass die Axen- oder Schwerpunktfaser durch das Verwinden des Stabes keine Krümmung erhält und dass die übrigen Fasern Schraubenlinien bilden, deren Steilheit mit ihrer Entfernung von der Axe fort und fort wächst.

Daraus folgt aber ferner, dass die Länge der Fasern mit ihrer Entfernung von der Axenfaser wächst; allein da die äusseren Kräfte der Voraussetzung gemäss nur drehend wirken, so können die verwundenen Fasern weder alle ausgedehnt, noch alle zusammengedrückt sein, sondern es muss ein Theil derselben ausgedehnt, ein anderer Theil zusammengedrückt sein, und da die Axenfaser am kürzesten, die peripherischen Fasern am längsten sind, so muss in der Axenfaser selbst und von ihr an bis auf eine gewisse Entfernung Zusammendrückung, von da an bis zur Oberfläche hinaus dagegen Ausdehnung herrschen, und somit gibt es eine cylindrische Schicht, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Diese Schicht zu bestimmen, ist für einen cylindrischen Stab nicht schwierig, wir wollen jedoch ihre Bestimmung unterlassen, weil ihre Kenntniss für praktische Zwecke von keiner Wichtigkeit ist.

Denkt man sich durch den Stab, senkrecht auf seine Axe eine Ebene gelegt, und richtet seine Aufmerksamkeit auf die Art und Weise, wie die diesseits und jenseits dieser Ebene liegenden Atome während der Verwindung des Stabes ihre Lage gegeneinander verändern, so wird man erkennen, dass der Vorgang eine Gegeneinanderverschiebung ist, die an der Axe beginnt und von da an mit der Entfernung fort und fort wächst. Diese den Verschiebungen entsprechenden Kräfte liegen in der Querschnittsebene, stehen senkrecht auf den Radien und es ist naturgemäss anzunehmen, dass ihre Intensitäten der Grösse der Verschiebungen proportional sind.

Beweis des Satzes, daß die Schwerpunktfaser eines Stabes bei einer Drehung desselben gerade bleibt. Es sei Fig. 9, Tafel III., A der seiner Lage nach noch nicht bekannte Punkt, um welchen die Drehung eines Querschnittes erfolgt. m der von A entfernteste Punkt der Peripherie des Querschnittes. T die Intensität der Verschiebungskraft bei m. t die Intensität der Verschiebungskraft an einem Punkt n, dessen Entfernung von A gleich x ist. So hat man, wenn $\overline{Am} = k$ gesetzt wird:

$$t = \frac{T}{k} x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nimmt man bei n ein unendlich kleines Flächentheilchen df an, so ist $t\,df$ die auf An senkrecht wirkende Verschiebungskraft dieses Flächentheilchens. Zerlegt man diese Kraft in eine horizontale und in eine vertikale, so ist erstere $t\,df \sin\varphi$, letztere $t\,df \cos\varphi$. Nennt man $\overline{Ap} = \xi$ $\overline{mp} = v$ die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf das Axensystem $A\,\xi$ und $A\,v$, so ist $\cos\varphi = \frac{\xi}{x}$ $\sin\varphi = \frac{v}{x}$, demnach wird:

$$t\,df \sin\varphi = t\,df \frac{v}{x}, \qquad t\,df \cos\varphi = t\,df \frac{\xi}{x}$$

oder wenn man für t seinen Werth aus (1) einführt:

$$t\,df \sin\varphi = \frac{T}{k} v\,df \qquad t\,df \cos\varphi = \frac{T}{k} \xi\,df$$

Es sind demnach die Summen aller Horizontalkräfte und aller Vertikalkräfte sämmtlicher Verschiebungskräfte eines Querschnittes:

$$\frac{T}{k} \int v\,df \qquad \frac{T}{k} \int \xi\,df$$

Allein für den Gleichgewichtszustand müssen diese Summen verschwinden, weil der Vorausetzung gemäss nur eine Torsion stattfindet. Man hat daher, weil $\frac{T}{k}$ nicht verschwindet:

$$\int \xi \, df = 0 \quad \int v \, df = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Diese Gleichungen drücken aber aus, dass der Punkt A, um welchen die Drehung erfolgt, mit dem Schwerpunkt des Querschnittes zusammenfällt; denn nennt man X und Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Querschnittes in Bezug auf das Axensystem $A\xi$ und Av, so hat man nach den bekannten Regeln, die zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche dienen

$$X = \frac{\int \xi \, df}{\int df} \qquad Y = \frac{\int v \, df}{\int df}, \ldots \ldots \quad (3)$$

wenn also $\int \xi \, df = 0$ und $\int v \, df = 0$ ist, so hat man $X = 0 \quad Y = 0$, d. h. der Schwerpunkt fällt in den Anfangspunkt der Coordinaten, was zu beweisen war.

Berechnung der Torsionsfestigkeit. Es sei in Fig. 9, Tafel III., df ein kleines Flächentheilchen des Querschnittes, $An = x$ die Entfernung desselben von der Axe; T die Intensität der Verschiebungskraft in dem von der Axe entferntesten Punkte m des Querschnittes; k die Entfernung dieser Stelle von der Axe, so ist die Intensität der Verschiebungskraft im Punkt n gleich $T\frac{x}{k}$; ist ferner die Verschiebungskraft für den Querschnitt df gleich $T\frac{x}{k}\,df$, ist sodann das Moment dieser Kraft $\frac{T}{k}\,x^2\,df$ und ist endlich die Summe der Momente aller im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräfte $\int \frac{T}{k}\,x^2\,df = \frac{T}{k}\int x^2\,df$. Da das äussere Kräftepaar, welches das Verwinden des Stabes bewirkt, mit den in jedem Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften im Gleichgewicht ist, so hat man, wenn das Moment der äusseren Kräfte mit M bezeichnet wird:

$$M = \frac{T}{k}\int x^2\,df \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Es ist $\int x^2\,df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, auf der Ebene des Querschnittes senkrechte Axe. Bezeichnet man dieses Moment mit μ, setzt also

$$\int x^2\,df = \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

so wird der Ausdruck (1):

$$M = \frac{T}{k}\,\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Da wir in diesem Abschnitt über die Elastizität und Festigkeit alle Längen in Centimetern und die Kräfte in Kilogrammen ausdrücken, so ist T die auf einen Quadratcentimeter bezogene Verschiebungskraft in der von der Axe entferntesten Faser, und ist ferner M das in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückte Torsionsmoment der äusseren den Stab verwindenden Kraft.

Wenden wir obige Gleichung auf einige spezielle Fälle an.

Für einen cylindrischen Stab von einem Durchmesser d ist das Trägheitsmoment:

$$\mu = \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \; 2\,x\,\pi\,d\,x = \frac{\pi}{32}\,d^4 \text{ und } k = \frac{d}{2}$$

demnach

$$M = \frac{T\,\pi}{16}\,d^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Für einen quadratischen Stab hat man, wenn b die Seite des Quadrates bezeichnet:

$$\mu = \frac{1}{6}\,b^4 \text{ und } k = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

demnach wird:

$$M = T\,\frac{b^3}{3\sqrt{2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Für einen Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, findet man, wenn die Seiten des Rechteckes mit b und h bezeichnet werden:

$$\mu = \frac{1}{12}\,b\,h\left(b^2 + h^2\right)$$

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + h^2}$$

demnach:

$$M = \frac{T}{6}\,b\,h\sqrt{b^2 + h^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Diese Theorie der Torsion ist so unvollkommen, dass man den Ergebnissen derselben nicht unbedingtes Vertrauen schenken kann; es ist daher angemessen, dieselbe durch Versuche zu prüfen. Derlei Versuche sind schon viele gemacht worden, und sie haben in der

That die Richtigkeit der Resultate so weit bestätiget, als dieses durch Versuche möglich ist.

Nimmt man an, dass die Resultate nicht nur für schwache Verwindungen, sondern auch noch für die allerstärksten, also selbst für diejenigen Verwindungen gelten, bei welchen der Molekularzusammenhang aufgelöst wird, so kann die Gleichung (3) zur Bestimmung desjenigen Werthes von T benutzt werden, welcher der Torsionsfestigkeit entspricht. Wenn man nämlich durch einen wirklichen Verwindungsversuch das Torsionsmoment M bestimmt, welches die Auflösung des Zusammenhanges bewirkt, sodann diesen Werth, sowie auch die Werthe von μ und k in die Gleichung (3) einführt und daraus T sucht, so ist dies der Festigkeitscoeffizient für Torsion und für das Material, aus welchem der Stab besteht. Ist die Gleichung (3) in dieser Ausdehnung richtig, so muss man bei einerlei Material für T immer den gleichen Werth finden, welches auch die Dimensionen des Stabes sind. Dies haben auch annähernd die Versuche gezeigt und die mit T überschriebene Columne der Tafel Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau enthält den Torsionsfestigkeits-Coeffizienten für verschiedene Materialien.

Da in der Gleichung (3) die Länge des Stabes nicht erscheint, so ist die Intensität der Verschiebungskraft und ist auch die Torsionsfestigkeit von der Länge des Stabes nicht abhängig. Aus Gleichung (4) sieht man, dass für einen cylindrischen Stab das einer bestimmten Torsionsintensität entsprechende Torsionsmoment dem Kubus des Durchmessers des Cylinders proportional ist. Will man den Durchmesser berechnen, den ein cylindrischer Stab erhalten muss, damit er einem gegebenen Torsionsmoment mit Sicherheit zu widerstehen vermag, so darf man in der Gleichung (4) für T nur einen aliquoten Theil des Torsionscoeffizienten in Rechnung bringen und findet dann:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,M}{T\,\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wir werden in der Folge erfahren, dass die Maschinenaxen so construirt werden, dass unter der Einwirkung der Kraft die Verschiebungsintensität bei Schmiedeeisen nur 210, bei Gusseisen nur 90 beträgt. Da nun die Torsionscoeffizienten für diese Materiale nach Tafel 36 der Resultate des Maschinenbaues für Schmiedeeisen 7000 für Gusseisen 3000 betragen, so sind diese Wellen nur bis auf $\frac{210}{7000} = \frac{1}{33}$ und $\frac{90}{3000} = \frac{1}{33}$ ihrer Torsionsfestigkeit angestrengt.

Berechnung des Torsionswinkels. Es erübrigt uns nun noch, den Torsionswinkel Θ, Fig. 10, Tafel III., d. h. den Winkel zu berechnen, um welchen der von den Torsionskräften ergriffene Querschnitt des Stabes gegen das festgehaltene Ende verdreht wird. Zu diesem Zweck machen wir die wahrscheinliche Hypothese, dass der Winkel α, den die Faser, in welcher die Verschiebungskraft T herrscht, mit der Axe des Stabes bildet, dem Werth von T proportional sei; setzen also:

$$\alpha = \frac{\text{T}}{\text{G}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

wobei G eine nur von der Natur des Materials abhängige Grösse bedeutet, und wobei α in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden soll. Denkt man sich den Cylinder, in welchem die Faser liegend gedacht werden kann, in eine Ebene ausgebreitet, so ergibt sich ein Dreieck ABC, Fig. 10, Tafel III., in welchem AC die Länge l des Stabes $\sphericalangle \text{BAC} = \alpha$ und $\text{BC} = \text{k}\,\Theta$ ist, wobei Θ den in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkel bedeutet. Man hat daher:

$$\frac{\text{k}\,\Theta}{\text{l}} = \operatorname{tang}\alpha \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

oder auch annähernd, weil jederzeit α sehr klein ist, also für $\operatorname{tang}\alpha$ auch α gesetzt werden kann:

$$\frac{\text{k}\,\Theta}{\text{l}} = \alpha \quad \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Aus (8) und (10) folgt:

$$\frac{\text{T}}{\text{G}} = \frac{\text{k}\,\Theta}{\text{l}}$$

mithin

$$\Theta = \frac{\text{T}\,\text{l}}{\text{k}\,\text{G}}$$

Führen wir hier den aus (3) für T folgenden Werth ein, so ergibt sich:

$$\Theta = \frac{\text{M}\,\text{l}}{\text{G}\,\mu} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

Will man den Torsionswinkel Θ nach Graden ausdrücken, und bezeichnet diese mit Θ°, so hat man:

$$\Theta^{\circ} = \frac{\text{M}\,\text{l}}{\text{G}\,\mu}\,\frac{360}{2\,\pi} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Für einen cylindrischen Stab von einem Durchmesser d ist: $\mu = \frac{\pi}{32} d^4$, demnach wird:

$$\Theta^0 = 16 \frac{M}{G} l \frac{360}{d^4 \pi^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Diese Resultate (11), (12), (13) sind nur als hypothetische anzusehen, weil dieselben auf der Annahme (8) beruhen, dass der Winkel α dem Werth von T proportional sei. Zahlreiche Versuche über die Torsion von Stäben haben aber gezeigt, dass diese Resultate wenigstens für nicht zu starke Verwindungen annähernd richtig sind.

Setzt man in (13) $\frac{d^2 \pi}{4} = 1$, $l = 1$, $\Theta^0 = 360$, so folgt aus denselben:

$$G = M,$$

d. h. die Grösse G, welche man den Modulus der Elastizität für Torsion zu nennen pflegt, drückt das Torsionsmoment aus, welches erforderlich wird, um einen Stab, dessen Querschnitt und Länge gleich der Einheit ist, um 360° zu verwinden, vorausgesetzt, dass das durch (13) ausgedrückte Gesetz selbst für eine so starke Verwindung richtig wäre.

Die Resultate des Maschinenbaues geben Seite 36 die für verschiedene Materialien durch Versuche gefundenen Werthe des Modulus der Elastizität G für Torsion.

Festigkeit der Gefäße.

Cylindrische Gefäße. Man denke sich, ein cylindrisches Gefäss Fig. 1, Tafel IV., enthalte eine eingepresste Flüssigkeit, die auf jeden Quadratcentimeter der innern Umfangsfläche einen gewissen sehr starken Druck ausübt. Das Gefäss sei aber auch aussen von einer Flüssigkeit umgeben, die auf jeden Quadratcentimeter der äussern Oberfläche mit einem jedoch schwächeren Druck wirkt. Da wir annehmen, der innere Druck sei beträchtlich stärker als der äussere, so muss in dem Gefäss durch die Wirkung der Kräfte eine Ausweitung entstehen, welche zur Folge hat, dass in jedem kleinen Volumtheilchen im Innern der Gefässwand nach radialer Richtung O r, Fig. 1, Tafel IV., eine Zusammenpressung, nach einer auf die Axe des Gefässes senkrechten Richtung $t\,t_1$ eine Materialausdehnung entsteht, und es ist für die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes vor allem andern nothwendig, diese Spannungen und Pressungen zu bestimmen.

Es sei für den natürlichen Zustand des Gefässes, wenn nämlich keine Kräfte wirken, r_0 der innere, r_1 der äussere Halbmesser des Cylinders, x der Halbmesser eines Kreises, der zwischen dem innern und äussern Begrenzungskreis des Cylinders liegt. Nennen wir ferner p_0 die innere, p_1 die äussere Pressung auf einen Quadratcentimeter. Durch die Einwirkung dieser Pressungen wird der Cylinder ausgeweitet bis ein Gleichgewichtszustand zwischen diesen Pressungen und den Molekularkräften eintritt, was zur Folge hat, dass die Halbmesser r_0 r_1 x in ϱ_0 ϱ_1 ξ übergehen. Nennen wir nun für dieses erzwungene Gleichgewicht y die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in der Entfernung ξ nach tangentialer Richtung stattfindet, z die auf einen Quadratcentimeter bezogene nach radialer Richtung in der Entfernung ξ stattfindende Pressung, und erlauben uns die Annahme, dass jede der Kräfte y und z so wirke, wie wenn die andern nicht vorhanden wären, so können wir diese Ausdehnungen und Pressungen nach unserem Erfahrungsgesetze Seite 3 berechnen. Das Material, welches ursprünglich zwischen den Cylindern, deren Halbmesser x und $x + dx$ eingeschlossen war, befindet sich nach erfolgter Ausweitung zwischen zwei Cylindern, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind. Es ist demnach

$$2\pi\xi - 2\pi x = 2\pi(\xi - x)$$

die Ausdehnung, $dx - d\xi$ die Zusammendrückung dieses Materials.

Nennen wir ε den Modulus der Elastizität des Materials, so können wir nach dem oben erwähnten Erfahrungsgesetz schreiben:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi(\xi - x) &= 2\pi x \frac{y}{\varepsilon} \\ dx - d\xi &= dx \frac{z}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Nennt man df die Aenderung, welche in der Fläche

$$(x + dx)^2 \pi - x^2 \pi$$

durch die Wirkung der Pressungen eintritt, so ist:

$$d\,f = \left[(\xi + d\,\xi)^2\,\pi - \xi^2\,\pi\right] - \left[(x + d\,x)^2\,\pi - x^2\,\pi\right]$$

oder weil $d\,x$ und $d\,\xi$ Differenziale sind:

$$d\,f = 2\,\pi\,(\xi\,d\,\xi - x\,d\,x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Führt man für ξ und $d\,\xi$ die obigen Werthe (2) ein, so findet man:

$$\frac{d\,f}{2\,\pi\,x\,d\,x} = \frac{1}{\varepsilon}\,(y - z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Verhältniss linker Hand des Gleichheitszeichens ist die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenänderung, welche in der Entfernung x eintritt, oder es ist die verhältnissmässige Flächenausdehnung.

Lamé hat in seinem Werke Théorie de l'élasticité nachgewiesen, dass diese verhältnissmässige Ausdehnung in jedem Punkt der Cylinderwand einen und denselben constanten Werth hat. Den analytischen Weg, durch welchen dieser Satz gewonnen wurde, können wir hier nicht betreten, müsssen uns also begnügen, denselben, ohne ihn selbst zu beweisen, als eine Wahrheit anzunehmen. Unter der Voraussetzung, dass $\frac{1}{\varepsilon}\,(y - z)$ eine Constante ist, können wir ihren Werth leicht finden, denn es ist für $x = r_0\; z = p_0$ und wird y gleich einem bestimmten Werth $\mathfrak{A}$, nämlich gleich der Tangentialspannung am innern Umfang des Cylinders. Jene Constante kann daher ausgedrückt werden durch $\frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)$. Weil also

$$\frac{1}{\varepsilon}\,(y - z) = \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)$$

ist, so erhält man statt (4):

$$\frac{d\,f}{2\,\pi\,x\,d\,x} = \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)\,2\,\pi\,\frac{x^2}{2} + \text{Const}$$

oder wenn man dieses Integrale innerhalb der Grenze $x = r_0$ bis $x = x$ nimmt:

$$f = \frac{\pi}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0) \quad (x^2 - r_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (5)$$

Dieses f ist aber die Ausdehnung, die in dem Material von r_0 bis x eintritt. Es ist demnach auch:

$$f = (\xi^2 - \varrho_0^2) \, \pi - (x^2 - r_0^2) \, \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man hat daher vermöge (5) und (6):

$$(\xi^2 - \varrho_0^2) - (x^2 - r_0^2) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0) (x^2 - r_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man in die erste der Gleichungen (2) $x = r_0 \quad y = \mathfrak{A} \quad \xi = \varrho_0$, so muss dieselbe erfüllt werden; man hat daher $\varrho_0 = r_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$

Führt man diesen Werth von ϱ_0, so wie den Werth von ξ den die erste der Gleichungen (2) darbietet in (7) ein, so gibt dieselbe nach einigen einfachen Reduktionen und wenn man die zweiten Potenzen von $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$ vernachlässiget

$$y = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2} \frac{r_0^2}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Führt man diesen Werth von y in die Gleichung $\frac{1}{\varepsilon} (y - z) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)$ ein, so findet man auch noch

$$z = \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2} \frac{x_0^2}{x^2} - \frac{1}{2} (\mathfrak{A} - p_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Somit ist nun die Tangentialspannung y, als auch die radiale Presung z in der Entfernung x bestimmt.

Nun ist $2 \int_{r_0}^{r_1} y \, dx$ die Summe aller Spannungen in zwei diametral gegenüberstehenden Wanddicken; sind ferner $2 \, r_0 \, p_0$ und $2 \, r_1 \, p_1$ die inneren und äusseren Pressungen der Flüssigkeit, wodurch jene Materialspannungen hervorgerufen werden; man hat daher:

$$2 \int_{r_0}^{r_1} y \, dx = 2 \, (r_0 \, p_0 - r_1 \, p_1)$$

Setzt man für y seinen Werth aus (7) und verrichtet die Integration, so ergibt sich ein Ausdruck, aus welchem durch ganz gewöhnliche Reduktionen gefunden wird:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Bezeichnet man durch D den inneren Durchmesser des Cylinders und durch δ die Wanddicke, setzt also $r_1 - r_0 = \delta$. $2\,r_0 = D$, so folgt aus (10):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1\right) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

In der Regel sind p_0 und p_1 sehr klein gegen $\mathfrak{A}$ und dann kann man auch statt (11) einen Annäherungswerth aufstellen. Es ist nämlich ganz genau:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1 = \left(1 + 2\,\frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

ist dagegen annähernd:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1 = \frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}$$

demnach ist annähernd:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Formel (10) hat zuerst Lamé aufgefunden, ohne von irgend einer Hypothese auszugehen.

Setzt man in (11) oder in (12) für $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials, aus welchem der Cylinder besteht, so geben diese Gleichungen diejenige Wanddicke, bei welcher der Cylinder unter der Einwirkung der Kräfte p_0 und p_1 berstet. Nimmt man diese Pressungen p_0 und p_1 so an, dass $\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0 = 0$ wird, nimmt also

$$p_0 = \mathfrak{A} + 2\,p_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

so wird δ unendlich, d. h. ein Cylinder, wie dick auch seine Wand genommen werden mag, wird unter der Einwirkung eines inneren

Druckes von der Grösse (13) zum Bersten gebracht. Gewöhnlich ist der äussere Druck p_1 der Druck der Atmosphäre, ist also im Verhältniss zum Werth der Festigkeitscoeffizienten sehr klein, so dass $2 p_1$ gegen $\mathfrak{A}$ beinahe vernachlässiget werden kann, man also sagen kann: wenn der Druck der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter so gross wird, als die absolute Festigkeit des Materials per ein Quadratcentimeter, so muss der Cylinder bersten, wie gross auch seine Wanddicke sein mag. Es ist für

	Gusseisen	Schmiedeeisen	Kanonenmetall	Stahl
$\mathfrak{A}$	1300	4000	2600	10000

Da der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter nahe 1 Kilogramm beträgt, so sind diese Zahlen die in Atmosphären ausgedrückten inneren Pressungen, welche cylindrische Gefässe aus jenen Metallarten auszuhalten vermögen. In einem gusseisernen Cylinder kann man also Luft nicht bis zu 2000 Atmosphären comprimiren, wohl aber in einem Cylinder aus den übrigen der oben genannten Metalle.

Bei hydraulischen Pressen ist gewöhnlich die Wanddicke des Presscylinders gleich dem Halbmesser des inneren Cylinders, oder $\delta = \frac{D}{2}$. Gusseisen kann man höchstens bis zur Hälfte seiner absoluten Festigkeit in Anspruch nehmen, es darf also $\mathfrak{A}$ höchstens $\frac{1300}{2} = 650$ werden. Der äussere Druck p_1 der Atmosphäre ist sehr nahe $= 1$ Kilogramm. Setzen wir in (12) $\delta = \frac{D}{2}$, $\mathfrak{A} = 650$, $p_1 = 1$, so folgt $p_0 = \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + 3 p_1) = 326$. Die innere Pressung des Wassers darf also bei solchen Construktionsverhältnissen und bei ganz gutem Guss nicht mehr als 326 Atmosphären betragen, damit das Material nicht über die Hälfte seiner Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Kugelförmige Gefäße. Es sei auch hier für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Halbmesser der Kugelwand. Im ausgedehnten Zustande des Gefässes seien diese Halbmesser ϱ_0 ϱ_1 ξ. Die in einer Entfernung ξ herrschende Tangentialspannung sei y, die daselbst herrschende radiale Pressung gleich z.

Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + d x$ sind, enthalten war, befindet sich nach erfolgter Ausdehnung innerhalb der Kugelflächen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind. Die lineare Zusammenpressung nach radialer Richtung ist demnach $dx - d\xi$, die lineare Ausdehnung einer Kreisperipherielänge $2\pi x$ ist $2\pi(\xi - x)$. Man hat daher auch hier:

$$2\pi(\xi - x) = 2\pi x \frac{y}{\varepsilon}$$

$$dx - d\xi = dx \frac{z}{\varepsilon}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ε den Modulus der Elastizität bezeichnet.

Nennen wir $d\mathfrak{V}$ die Volumenänderung, welche in dem Materiale eintritt, das zwischen den Kugelflächen enthalten ist, deren Halbmesser x und $x + dx$ sind, so ist

$$d\mathfrak{V} = \frac{4}{3}\pi\left[(\xi + d\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3}\pi\left[(x + dx)^3 - x^3\right]$$

oder weil $d\xi$ und dx Differenziale sind:

$$d\mathfrak{V} = 4\pi\left(\xi^2 d\xi - x^2 dx\right)$$

setzt man für ξ und $d\xi$ die Werthe (1), so folgt:

$$d\mathfrak{V} = 4\pi x^2 dx\left[\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) - 1\right]$$

Da in allen Anwendungen $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{z}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen sind, so kann man die Quadrate und Produkte und höheren Potenzen derselben vernachlässigen, und dann folgt aus disem Ausdruck:

$$\frac{d\mathfrak{V}}{4\pi x^2 dx} = \frac{(2y - z)}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Quotient ist die verhältnissmässige Volumsänderung in der Entfernung x.

Wir machen auch hier die hypothetische Annahme, dass die verhältnissmässige Volumsänderung für jeden Ort der Wanddicke den gleichen Werth habe, dass mithin $\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$ eine constante Grösse sei. Nennen wir p_0 die innere, p_1 die äussere Pressung, per Quadratcentimeter, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität an der inneren Kugelfläche, so ist für $y = \mathfrak{A}$, $z = p_0$, demnach:

$$\frac{2\,y - z}{\varepsilon} = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} = \text{Const}$$

die Gleichung (2) wird demnach:

$$\frac{d\,\mathfrak{B}}{4\,\pi\,x^2\,d\,x} = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}$$

Durch Integration folgt:

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\,\pi\,x^3\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} + \text{Const}$$

Nimmt man das Integrale von $x = r_0$ bis $x = x$, so erhält man $\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3)$ und dieses ist die Volumenänderung, welche in dem Raum von $x = r_0$ bis $x = x$ entstanden ist. Dieses $\mathfrak{B}$ ist aber auch:

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\,\pi\,(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r_0^3)$$

Demnach hat man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von $\mathfrak{B}$ und Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{4}{3}\,\pi$:

$$(\xi^3 - \varrho_0^3) - (x^3 - r_0^3) = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3) \quad . \; . \; . \; (3)$$

Nun ist aber wegen (1):

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man diese Werthe in (3) ein, entwickelt und vernachlässiget dabei die zweite und höhere Potenz von $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$, so folgt:

$$y = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\frac{r_0^3}{x^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Hiermit ist wiederum die in der Entfernung x eintretende Spannungsintensität bestimmt.

Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes zwischen den Flüssigkeitspressungen und den Materialspannungen ergibt sich nun wiederum auf folgende Weise: Legen wir durch den Mittelpunkt des Kugelgefässes eine Ebene, welche dasselbe in zwei Hälften theilt, so werden diese durch die innere Pressung mit einer Kraft $r_0^2 \pi p_0$ auseinander, durch die äussere Pressung mit einer Kraft $r_1^2 \pi p_1$ gegeneinander gedrückt; die Differenz ist $\pi (r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1)$ und muss gleich sein der Summe aller Materialspannungen, die in dem Schnitt des sphärischen Gefässes mit jener Ebene vorkommen.

Man hat daher:

$$\int_{r_0}^{r_1} 2 \pi x \, d x \, y = \pi (r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1)$$

Führt man für y seinen Werth aus (4) ein, verrichtet die Integration und sucht hierauf den Werth von $\frac{r_1}{r_0}$, so findet man:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A} + p_0)}{2\mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Auch für diesen Ausdruck kann ein Annäherungswerth aufgefunden werden.

Es ist genau:

$$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A} + p_0)}{2\mathfrak{A} + 2 p_1 - p_0}} = \left(1 + 3 \frac{p_0 - p_1}{2\mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Angenommen, dass der in der Klammer enthaltene Bruch eine sehr kleine Grösse ist, hat man annähernd:

$$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A} + p_0)}{2\mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}} = 1 + \frac{p_0 - p_1}{2\mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}$$

und nun findet man, wenn man die Wanddicke mit δ und den innern Durchmesser mit D bezeichnet, mithin $r_1 - r_0 = \delta \quad 2 r_0 = D$ setzt:

$$\delta = \frac{D}{2} \frac{p_0 - p_1}{2\mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Formel (5) bestimmt genau, die Formel (6) annähernd die Wanddicke, die ein sphärisches Gefäss erhalten muss, wenn unter der Einwirkung der äusseren und inneren Kräfte die Materialspannung $\mathfrak{A}$ an der inneren Fläche einen gewissen Werth haben soll. Setzt man für $\mathfrak{A}$ den Werth der absoluten Festigkeit des Materials, so geben die Formeln diejenige Wanddicke, bei der unter der Einwirkung der Pressungen p_0 und p_1 das Zerreissen des Materials eintritt. Diese Wanddicke wird unendlich für $2\mathfrak{A} + 3p_1 - p_0 = 0$, oder für

$$p_0 = 2\mathfrak{A} + 3p_1 \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

d. h. ein sphärisches Gefäss platzt bei jeder Wanddicke, wenn die Spannung im Innern zweimal so gross wird, als die Festigkeit des Materials, vorausgesetzt, dass der äussere Druck p_1 vernachlässiget werden darf. Dieses Ergebniss verglichen mit dem Seite 65 für cylindrische Gefässe gefundenen, so sieht man, dass ein kugelförmiges Gefäss im Maximum einen doppelt so grossen Druck aushält, als ein cylindrisches.

Wir haben uns bei Herleitung der Gleichung für δ so benommen, wie wenn die innere Pressung grösser wäre als die äussere. Die für δ gefundenen Ausdrücke gelten aber auch im umgekehrten Fall, wenn nämlich die äussere Pressung grösser ist als die innere, nur verwandelt sich dann $\mathfrak{A}$ in eine Pressung und ist negativ zu nehmen.

Bei ganz gleicher Wanddicke und gleicher Dichte eines Materials würde bei einem cylindrischen oder sphärischen Gefässe durch einen äusseren Druck nicht leicht eine Zerdrückung entstehen, allein so wie die Wand an einer Stelle schwächer ist, wird sie daselbst leicht durch einen äusseren Druck eingebogen, wodurch eine vollständige Verdrückung entstehen kann. Diese Rundgefässe haben daher gegen einen inneren Druck eine grössere Stabilität als gegen einen äusseren.

Nicht cylindrische oder sphärische Gefäße. Ist die Form einer Gefässwand weder cylindrisch noch sphärisch, so wird eine solche Form unter der Einwirkung von pressenden Flüssigkeiten nicht nur ausgeweitet oder zusammengedrückt, sondern in den meisten Fällen in der Weise deformirt, dass Formen entstehen, die mit den ursprünglichen nicht mehr geometrisch ähnlich sind. Dieses ist z. B. der Fall bei Gefässen mit flachen Wänden. Die Festigkeitstheorie dieser Gefässe erfordert sehr weitläufige und schwierige Rechnungen, die hier nicht am Platze wären. Diese nicht cylindrischen und nicht sphärischen Gefässe sind bei starken Pressungen möglichst zu vermeiden.

Berechnung der Wirkungsgrößen, welche zur Ausdehnung, Zusammendrückung, Verwindung und Biegung von Stäben nothwendig sind.

Ausdehnung. Es sei ε der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem ein Stab besteht; l seine Länge; a sein Querschnitt; K die Kraft, welche den Stab um x zu verlängern vermag, so haben wir nach dem Ausdehnungsgesetz:

$$K = \frac{a\,\varepsilon}{l}\,x \qquad \ldots \qquad (1)$$

Die Wirkung, welche nothwendig ist, um den Stab von $x = 0$ bis $x = \lambda$ auszudehnen, ist: $\int_0^\lambda K\,dx = W$. Wir erhalten daher vermöge (1):

$$W = \frac{a\,\varepsilon}{l}\int_0^\lambda x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,\lambda^2 \qquad \ldots \qquad (2)$$

Nennen wir die der Ausdehnung λ entsprechende Zugkraft P, so haben wir vermöge (1):

$$P = \frac{a\,\varepsilon}{l}\,\lambda \qquad \ldots \qquad (3)$$

Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von λ in (2) ein, so erhält man einen Ausdruck, der leicht in folgende Form gebracht werden kann:

$$W = \frac{1}{2}\,a\,l\,\frac{\left(\frac{P}{a}\right)^2}{\varepsilon} \qquad \ldots \qquad (4)$$

Nun ist aber $a\,l$ das Volumen des Stabes $\frac{P}{a}$ die Spannungsintensität nach erfolgter Ausdehnung. Setzt man abkürzend $a\,l = \mathfrak{V}$, $\frac{P}{a} = \mathfrak{S}$, so erhält man auch:

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{V} \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon} \quad . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Die Ausdehnung eines Stabes erfordert demnach eine Wirkungsgrösse, die dem Volumen des Stabes und ferner noch einem Quotienten proportional ist, den man erhält, wenn man das Quadrat der Spannungsintensität am Ende der Ausdehnung durch den Modulus der Elastizität dividirt. Nimmt man an, das Ausdehnungsgesetz (1) gelte selbst bis zum Riss des Stabes, so ist für den Moment des Risses $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$ gleich der absoluten Festigkeit des Materials, und die Wirkung, welche das Abreissen durch Ausdehnung erfordert, wird:

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{V} \frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$$

Allein $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ hat für jedes Material einen besonderen Werth, den man Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau angegeben findet. Nennen wir den Quotienten $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ (Quadrat der absoluten Festigkeit, dividirt durch den Modulus der Elastizität) den Arbeitsmodulus für Ausdehnung, so kann man sagen, die Wirkung, welche das Abreissen eines Stabes erfordert, ist dem Volumen des Stabes und dem Arbeitsmodulus proportional.

Die Werthe von $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ sind für Gusseisen, Eichenholz, Schmiedeeisen, Kanonenmetall, Gussstahl beziehungsweise:

1 bis 1·7, 4·3, 7·4, 10, 40

während sich die absoluten Festigkeiten dieser Materiale verhalten wie:

1 bis 1·3, 0·7, 4, 2 6, 10

Die Verhältnisse der zum Abreissen erforderlichen Wirkungsgrössen sind also sehr verschieden von den Verhältnissen der absoluten Festigkeiten.

Wenn das Abreissen eines Stabes durch die lebendige Kraft einer Masse bewerkstelligt werden soll, muss dieselbe offenbar gleich sein jener Wirkungsgrösse. Diese drückt also auch die Widerstandsleistung gegen die Einwirkung lebendiger Kräfte aus. Man sieht aus obigen Zahlen, wie unvortheilhaft das Gusseisen ist, wenn es sich darum handelt, eine Konstruktion so herzustellen, dass sie der Einwirkung von gewissen lebendigen Kräften widerstehen soll; dass dagegen Eichenholz und Schmiedeeisen, vorzugsweise aber Kanonenmetall und Gussstahl Vorzügliches leisten. Wenn nicht die Materialpreise so hoch wären, würde man gut thun, solche Maschinen, die der Einwirkung von lebendigen Kräften zu widerstehen haben, aus Kanonenmetall oder Gussstahl herzustellen. Indessen schon das Schmiedeeisen ist sieben mal besser als Gusseisen, daher es kommt, dass auch in der Praxis die Anwendung des Gusseisens so sehr eingeschränkt, dagegen die Benutzung des Schmiedeeisens so sehr ausgedehnt wird.

Biegung eines Stabes. Nehmen wir an, ein Stab sei an dem einen Ende befestiget und werde durch eine auf das andere Ende wirkende Kraft gebogen. Die Kraft K, welche auf das freie Ende drücken muss, wenn sich dasselbe um ξ senken soll, beträgt nach Gleichung (7), Seite 31, wenn $p = 0$ gesetzt wird:

$$K = \frac{3 \varepsilon E z}{l^3} \xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft entwickeln muss, damit die Senkung bis λ fortschreitet, ist:

$$W = \int_0^\lambda K \, d\xi = \frac{3 \varepsilon E z}{l^3} \int_0^\lambda \xi \, d\xi = \frac{3 \varepsilon E z}{2 l^3} \lambda^2 \quad \ldots \quad (2)$$

Nennt man P die der Senkung λ entsprechende Kraft, so ist wegen (1):

$$P = \frac{3 \varepsilon E z}{l^3} \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Eliminirt man aus (2) und (3) λ, so findet man:

$$W = \frac{P^2 l^3}{6 \varepsilon E z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Nennt man $\mathfrak{S}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Maximalspannung, die an der Befestigungsstelle durch die Einwirkung von P entsteht, so ist:

$$\mathfrak{S} E = P l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Durch Elimination von P folgt:

$$W = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon} \frac{E l}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Es ist} \ . & \dfrac{E\,l}{z} & \text{demnach} & W \\
\text{für einen rechteckigen Stab} \ . & \dfrac{1}{3}\,\mathfrak{V} \ \ldots & & \dfrac{1}{18}\,\dfrac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V} \\
\text{„ „ cylindrischen Stab} \ . & \dfrac{1}{4}\,\mathfrak{V} \ \ldots & & \dfrac{1}{24}\,\dfrac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V} \\
\text{„ „ ellyptischen Stab} \ . \ . & \dfrac{1}{5}\,\mathfrak{V} \ \ldots & & \dfrac{1}{24}\,\dfrac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}
\end{array} \Bigg\} \ . \quad (7)$$

wobei $\mathfrak{V}$ das Volumen des Stabes bezeichnet.

Die gleichen Resultate findet man auch dann, wenn man annimmt, dass der Stab auf zwei Stützen gelegt und durch eine in seiner Mitte wirkende Kraft gebogen wird, bis eine Maximalspannung $\mathfrak{S}$ eintritt. Nimmt man auch hier wiederum an, dass das Gesetz (1) bis zum Bruch richtig ist und setzt für $\mathfrak{S}$ den Bruchcoefficienten $\mathfrak{B}$, so drücken die Formeln (6) und (7) die Wirkungen aus, welche erforderlich sind, um stabförmige Körper durch Biegung zu brechen. Diese Bruchwirkung ist jedoch nur für ganz einfache, nicht ausgehöhlte Formen dem Volumen proportional; für einen Hohlcylinder wird z. B. $\frac{E}{z} = \frac{\pi}{16}\,\frac{d^4 - d_1^{\,4}}{d^2}$, und demnach:

$$W = \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}\left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$$

woraus man sieht, dass die Bruchwirkung nicht jederzeit dem Volumen proportional ausfällt.

Drehung eines Stabes. Wird ein Stab an einem Ende befestiget und am anderen Ende durch ein Kraftmoment M gedreht, so entsteht in dem Stabe eine Verwindung, wobei der Querschnitt, an welchem das Kraftmoment wirkt, gegen den befestigten Querschnitt um einen (in Theilen des Halbmessers $= 1$ ausgedrückten) Bogen Θ verdreht wird, der nach Gleichung (11), Seite 59, beträgt:

$$\Theta = \frac{M\,l}{G\,\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Stab aus seinem natürlichen Zustand um einen Bogen α zu verwinden ist:

$$W = \int_0^{\alpha} M \, d\,\Theta$$

demnach, wenn man für M seinen Werth aus (1) einführt:

$$W = \int_0^\alpha \frac{G\ \mu\ \Theta}{l}\ d\ \Theta = \frac{1}{2}\ \frac{G\ \mu}{l}\ \alpha^2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Heisst man M_1 das Moment, welches dem Winkel α entspricht, so hat man wegen (1):

$$\alpha = \frac{M_1\ l}{G\ \mu}$$

Führt man diesen Werth in (2) ein, so wird:

$$W = \frac{1}{2}\ \frac{M_1{}^2\ l}{G\ \mu}$$

Nennt man T die Intensität der Verschiebungskraft in der von der Axe entferntesten Faser, so ist nach (3), Seite 57

$$M_1 = \frac{T\ \mu}{k}$$

daher wird

$$W = \frac{1}{2}\ \frac{T^2}{G} \left(\frac{l\ \mu}{k^2}\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Für einen massiven cylindrirchen Stab von einem Durchmesser d ist das Trägheitsmoment μ des Querschnittes gleich $\frac{\pi}{32}\ d^4$ und ist $k = \frac{d}{2}$ und dann wird aus (2):

$$W = \frac{1}{4}\ \frac{T^2}{G}\ \mathfrak{B} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

wobei $\mathfrak{B}$ das Volumen des Stabes bedeutet.

Für einen Stab mit quadratischem Querschnitt ist $\mu = \frac{1}{6}\ b^4$, $k = \frac{b}{\sqrt{2}}$ wobei b die Seite des Quadrates bezeichnet, und es folgt aus (2):

$$W = \frac{1}{6}\ \frac{T^2}{G}\ \mathfrak{B} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Für einen Hohlcylinder ist: $\mu = \frac{\pi}{32}\ (d^4 - d_1{}^4)$, wobei d der äussere, d_1 der innere Durchmesser, und $k = \frac{d}{2}$, demnach wird:

$$W = \frac{1}{4}\ \frac{T^2}{G}\ \mathfrak{B} \left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right] \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Setzt man in diesen Formeln für T die Coeffizienten der Torsionsfestigkeit, so erhält man die Wirkungsgrössen, welche dem Abwinden entsprechen. Die Tafel Seite 36 (der Resultate) gibt für verschiedene Materialien den Werth von $\frac{T^2}{G}$ für das Abwinden.

Wenn wir die Resultate vergleichen, welche wir für die Wirkungsgrössen gefunden haben, die dem Ausdehnen, Biegen und Drehen entsprechen, so ersieht man, dass in allen Fällen diese Wirkungsgrösse dem Arbeitsmodulus (Quadrat des Festigkeitscoeffizienten, dividirt durch den Modulus der Elastizität), und bei einfachen nicht ausgehöhlten Formen dem Volumen des Stabs proportional ist.

Körper von gleicher Festigkeit.

Es gibt Körperformen, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Einwirkungen von äusseren Kräften in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen zu werden. Man nennt solche Körperformen Körper von gleicher Festigkeit, weil bei denselben die Wahrscheinlichkeit, dass eine Trennung der Atome eintritt, für jeden Querschnitt gleich gross ist. Derlei Formen sollen nun bestimmt werden.

Absolute Festigkeit. Wenn ein aus einem homogenen Material bestehender Stab nach horizontaler Richtung eingespannt und gedehnt wird, treten in dem ganzen Stab gleich grosse Spannungen ein, wenn alle Querschnitte des Stabes gleich gross sind und stetig in einander übergehen.

Ist dagegen ein sehr langer stabförmiger Körper in vertikaler Richtung am oberen Ende festgehalten, am unteren Ende belastet, so werden die Querschnitte eines solchen Stabes von unten nach oben hin nach einem gewissen Gesetze zunehmen müssen, wenn in allen Querschnitten gleich grosse Spannungen eintreten sollen.

Nennt man P die an dem Stab hängende Last, Fig. 2, Tafel IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem der Stab besteht; $\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in jedem Quadratcentimenter jedes Querschnittes eintreten soll; Ω den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb des untersten Punktes. G das Gewicht des Stabtheiles von der Länge x, so ist: $G + P$ die den Querschnitt Ω spannende Kraft und $\frac{G+P}{\Omega} = \mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in diesem Querschnitt. Geht man zu einem nächsten Querschnitt über, der vom unteren Ende um $x + d\,x$ entfernt ist, so beträgt das Gewicht des Stabtheils von der Länge dx $\gamma \Omega dx$, ist demnach die spannende Kraft in diesem nächsten Querschnitt $G + \gamma \Omega dx + P$, der Querschnitt selbst ist aber an dieser Stelle $\Omega + d\Omega$, demnach die Spannungsintensität $\frac{G + \gamma \Omega dx + P}{\Omega + d\Omega} = \mathfrak{A}$. Aus diesen zwei Werthen von $\mathfrak{A}$ folgt:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}} dx$$

Demnach durch Integration:

$$\Omega = \mathfrak{C} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei $e = 2{\cdot}718$ die Basis der natürlichen Logarithmen und $\mathfrak{C}$ die Integrationsconstante bedeutet. Nun ist für den untersten Querschnitt $x = o$ und $\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}}$, demnach $\mathfrak{C} = \frac{P}{\mathfrak{A}}$, daher

$$\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Regel ist von keinem praktischen Werth, denn es würde zu schwierig und zu kostspielig sein, sehr lange Stäbe oder Stangen, z. B. Schachtgestänge nach dieser komplizirten Form herzustellen, welche der Gleichung (2) entspricht.

Wenn vertikale Gestänge von so beträchtlicher Länge hergestellt werden sollen, dass ihr Gewicht gegen die angehängte Last nicht vernachlässigt werden kann, begnügt man sich in der Praxis mit einer Annäherung, die darin besteht, dass man das ganze Gestänge aus einzelnen Stangen herstellt, von denen jede in allen ihren Theilen gleich grosse Querschnitte hat, und den Querschnitt der aufeinander folgenden Stangen so bestimmt, dass die Spannungsintensitäten in den obersten Querschnitten der einzelnen Stangen des ganzen Gestängs gleich gross ausfallen.

Diese Querschnitte werden auf folgende Weise bestimmt:

Es seien a_1 a_2 a_3 die Querschnitte, l_1 l_2 l_3 die Längen der von unten nach aufwärts gezählten Stangen des ganzen Gestänges, Fig. 3, Taf. IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem die Stangen bestehen, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in dem obersten Querschnitt jeder einzelnen Stange. Q die unten am Gestänge hängende Last.

Dies vorausgesetzt hat man:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a_1}(Q + a_1\, l_1\, \gamma) = \frac{1}{a_2}(Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma)$$
$$= \frac{1}{a_3}(Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma + a_3\, l_3\, \gamma) = \;.\;.\;.\;.\;.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1\,\gamma} \\ a_2 &= \frac{Q + a_1\, l_1\,\gamma}{\mathfrak{A} - l_2\,\gamma} \\ a_3 &= \frac{Q + a_1\, l_1\,\gamma + a_2\, l_2\,\gamma}{\mathfrak{A} - l_3\,\gamma} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

woraus die Querschnitte der einzelnen Stangen berechnet werden können. Durch successive Substitutionen der Werthe von a_1 in a_2, von a_1 und a_2 in a_3 und so fort findet man auch:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1\,\gamma} \\ a_2 &= \frac{Q\,\mathfrak{A}}{(\mathfrak{A} - l_1\,\gamma)\,(\mathfrak{A} - l_2\,\gamma)} \\ a_3 &= \frac{Q\,\mathfrak{A}^2}{(\mathfrak{A} - l_1\,\gamma)\,(\mathfrak{A} - l_2\,\gamma)\,(\mathfrak{A} - l_3\,\gamma)} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Bruchfestigkeit. Wird ein Stab, der überall gleiche Querschnitte hat, durch eine äussere Kraft gebogen, so entsteht in einem bestimmten Punkt der Oberfläche eine grösste Spannungsintensität; der Stab ist demnach in diesem Querschnitt schwächer als in jedem andern, und ist demnach keine Form von gleicher Festigkeit, sondern eine solche Form erfordert veränderliche Querschnitte.

Nennt man M das Moment der äusseren Kräfte, welches die in einem bestimmten Querschnitt eintretenden Spannungen und Pressungen hervorruft, $\mathfrak{S}$ die in diesem Querschnitt vorkommende grösste Spannungsintensität, so hat man: $M = \mathfrak{S}\,E$, wobei der Werth von E aus Tafel V. der Resultate des Maschinenbaues zu nehmen ist. Drückt man E durch die Querschnittsdimensionen und M theils durch die äusseren Kräfte, theils durch die Position des Querschnitts aus und betrachtet $\mathfrak{S}$ als eine constante Grösse, so bestimmt obige Gleichung eine Form von gleicher Festigkeit. Wir wollen mehrere Beispiele behandeln.

Erstes Beispiel. Ein stabförmiger Körper wird am einen Ende festgehalten, am andern belastet, Fig. 4., Tafel IV., seine Breite oder Dicke

sei unveränderlich b, seine Höhe hingegen veränderlich. An der Befestigungsstelle sei die Höhe gleich h, in einer Entfernung x vom freien Ende gleich y. Nun sind für die Querschnitte A B und $A_1 B_1$
die Werthe von M gleich . . . . P l „ P x
die Werthe von E . . . . $\frac{1}{6}$ b h² „ $\frac{1}{6}$ b y²

Soll nun der Körper überall gleiche Festigkeit gewähren, so muss der Werth von $\mathfrak{S}$ für alle Punkte von A bis C unveränderlich bleiben, wir haben daher vermöge $M = \mathfrak{S} E$:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2 \qquad P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Vermittelst der ersten dieser Gleichungen bestimmt man die Querschnittsdimension von A B. Durch Division dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in C liegt. Ein stabförmiger Körper von gleicher Dicke muss also ein parabolisches Längenprofil erhalten, wenn derselbe überall einerlei Festigkeit gewähren soll.

Diese parabolische Form ist für gusseiserne Körper von grösseren Dimensionen ganz zweckmässig, denn sie ist in Gusseisen leicht herzustellen, und erfordert nicht viel Material. Allein für Körper aus Holz oder aus Schmiedeisen ist diese Form nicht geeignet, weil ihre Herstellung verhältnissmässig viele Arbeit verursacht, und überdies bei Holz die Abfälle beinahe werthlos sind. Für diese beiden Materialien ist es in der Regel angemessen, eine ebenflächige Form zu wählen, die von der parabolischen nicht viel abweicht. Eine solche Annäherungsform erhält man auf folgende Weise. Nimmt man $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$, so wird vermöge (2) $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ oder für $x = \frac{1}{4}\,l$ muss $y = \frac{1}{2}\,h$ gemacht werden, um einen Punkt der Parabel zu finden.

Nimmt man also Fig. 5, Tafel IV., $C A_1 = \frac{1}{4} C A = \frac{1}{4}\,l$, $A_1 B_1 = \frac{1}{2}\,A B = \frac{1}{2}\,h$, so ist B_1 ein Punkt der Parabel, die der gleichen Festigkeit entspricht. Verbindet man B mit B_1 durch eine gerade Linie, verlängert dieselbe und zieht C D parallel mit A B, so erhält man ein Trapez A C B D, und dies ist offenbar eine Form, welche annähernd gleiche Festigkeit gewährt. Von A bis A_1 ist der parabolische, von

A_1 bis C der trapezförmige Körper fester, bei $A\,B$ und $A_1\,B_1$ sind beide gleich fest.

Zweites Beispiel. Constante Höhe, veränderliche Dicke. Lassen wir die Höhe constant, und nehmen die Dicke veränderlich, so erhalten wir mit Berücksichtigung von Fig. 6, Tafel IV., $P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2$ $P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,z\,h^2$. Die erste dieser Gleichungen bestimmt wiederum den Querschnitt an der Befestigungsstelle, und durch Division dieser zwei Gleichungen ergibt sich zur Bestimmung des Horizontalschnittes die Gleichung: $\frac{x}{l} = \frac{z}{b}$, woraus hervorgeht, dass dieser Horizontalschnitt ein geradliniges Dreieck ist.

Drittes Beispiel. Geometrisch-ähnliche Querschnitte. Stellen wir die Forderung, dass alle Querschnitte des Körpers geometrisch-ähnliche Rechtecke sein sollen, dann haben wir mit Berücksichtigung von Fig. 7, Tafel IV.:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2, \quad P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,z\,y^2,$$

Die erste Gleichung bestimmt die Dimensionen an der Befestigungsstelle. Durch Division dieser Gleichungen folgt: $\frac{l}{x} = \frac{b\,h^2}{z\,y^2}$ oder auch:

$$\frac{l}{x} = \frac{h^3}{y^3}\,\frac{\frac{b}{h}}{\frac{z}{y}}$$

Allein weil wir die Forderung stellen, dass alle Querschnitte geometrisch-ähnliche Rechtecke sein sollen, so ist $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$, demnach folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wegen $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$ ist aber $\frac{y}{h} = \frac{z}{b}$, demnach:

$$\frac{z}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Jede dieser zwei Gleichungen (1) und (2) entspricht einer kubischen Parabel. Der Stab müsste also im Grundriss und in der

Ansicht nach kubischen Parabeln verjüngt werden, um überall die gleiche Festigkeit darzubieten. Diese Form empfiehlt sich aber nicht für die Ausführung, denn ihre Herstellung verursacht sehr viele Arbeit, und überdies ist auch diese Form sehr unschön. Man thut auch hier am besten, eine Annäherungsform zu wählen. Setzt man in (1) und (2) $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$ so findet man $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ $\frac{z}{b} = \frac{1}{2}$.

Macht man Fig. 8, Tafel IV., $C\,A_1 = \frac{1}{8}\,C\,A$, $\overline{A_1\,B_1} = \frac{1}{2}\,\overline{A\,B}$ $E_1\,F_1 = \frac{1}{2}\,E\,F$ und verzeichnet die Trapeze A C B D, E F G H, so bestimmen diese eine geeignete Annäherungsform, die leicht ausgeführt werden kann, beinahe gleiche Festigkeit darbietet und auch beinahe nicht mehr Material erfordert, als die komplizirte Form mit zwei kubischen Parabeln.

Viertes Beispiel. Rotationsfläche von gleicher Festigkeit. Für eine Rotationsfläche, Fig. 9, Tafel IV., hat man:

$$\left.\begin{aligned} P\,l &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\,d^3 \\ P\,x &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\,y^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die erste dieser Gleichungen gibt $d = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{S}\pi}\,P\,l}$. Durch Division der beiden Gleichungen findet man:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist abermals eine kubische Parabel, also eine sehr schwierig auszuführende und sehr hässliche Form.

$$\text{Für } \frac{x}{l} = \frac{1}{8} \text{ wird } \frac{y}{d} = \frac{1}{2}.$$

Bildet man also einen abgestumpften Kegel, Fig. 10, Tafel IV., der in einer Entfernung $\frac{1}{8}\,l$ vom dünnen Ende halb so dick ist, als an der Basis, so ist dies eine Annäherungsform an die kubische Parabel.

Körperformen von gleicher Festigkeit gegen Biegung durch Zusammendrückung.

Für einen Stab, der durch eine Kraft, welche nach der Richtung der Axe wirkt, zusammengedrückt und gebogen wird, haben wir nach Seite 42 und 43 folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \\ \frac{d^2 y}{d x^2} &+ \frac{P}{\varepsilon z E} y = o \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Bedeutung der einzelnen Grössen ist Seite 41 angegeben. Nennt man Π die Intensität der Pressung, welche in dem Punkt q herrscht, Fig. 6 und 7, Tafel III., und setzt $m\,q = z_1$, so muss der ersten der Gleichungen (1) entsprochen werden, wenn man p gleich Π und ζ gleich $-z_1$ setzt. Man erhält daher:

$$\Pi = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} + \frac{P}{E} \frac{z_1}{z} y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Ist die Biegung sehr schwach, so darf man sich erlauben, $\cos \varphi$ gleich 1 zu setzen, und dann wird:

$$\Pi = \frac{P}{\Omega} + P \frac{z_1}{z} \frac{y}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Wenn wir nun die Bedingung stellen, dass der Körper in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen sein soll, so muss Π für jeden Punkt der Linie $B\,B_1\,B_2$ ein und denselben Werth haben. Verlangen wir überdies, dass alle Querschnitte des Körpers geometrisch-ähnliche Figuren sind, so ist $\frac{z_1}{z}$ für alle Querschnitte constant. Der Werth von Π fällt also in diesem Falle wegen (3) constant aus, wenn $\frac{y}{E}$ für jeden Querschnitt ein und denselben Werth $\left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{P z_1}$ hat.

Setzen wir:

$$\frac{1}{P}\left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{z_1} = \frac{y}{E} = k \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

so wird die zweite der Gleichungen (1):

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{P k}{\varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

In dieser Gleichung ist aber in unserem Falle z eine Funktion von x. Weil wir voraussetzen, dass alle Querschnitte geometrisch-ähnliche Figuren sind, so können wir der Grösse E die Form geben:

$$E = m z^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und es ist dann m eine von der Grösse des Querschnittes unabhängige Grösse, oder eine Grösse, die für *alle* Querschnitte des Stabes einerlei Werth hat. Wir erhalten nunmehr wegen (4):

$$y = k E = k m z^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wäre die Gleichung der Axenfaser schon bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes diejenige Begrenzungslinie des Stabes finden, welche einer durchaus gleichen Festigkeit entspricht. Allein die Gleichung der Axenfaser ist noch nicht bekannt, und ist selbst von der Begrenzungslinie des Stabes abhängig, man muss demnach beide Linien direkt zu bestimmen suchen. Dies geschieht auf folgende Weise. Aus (7) folgt durch Differenziation:

$$d y = k m 3 z^2 d z, \quad d^2 y = 3 k m (z^2 d^2 z + 2 z d z^2)$$

Führt man diesen Werth in (5) ein, so folgt:

$$3 k m \frac{z^2 d^2 z + 2 z d z^2}{d x^2} = -\frac{P k}{\varepsilon z}$$

oder:

$$z^3 \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 z^2 \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = -\frac{P}{3 m \varepsilon}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{P}{3 m \varepsilon} = \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

so wird:

$$z^3 \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 z^2 \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = -\lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Das Integrale dieser Gleichung gibt die Begrenzungslinie, welche einer gleichen Festigkeit entspricht.

Setzt man, um die Integration zu bewerkstelligen:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

so wird:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{1}{2} \frac{d u}{d z}$$

und die Gleichung (9) wird:

$$\frac{1}{2} z^2 \frac{d u}{d z} + 2 z^2 u = - \lambda^2$$

oder:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{z^2 d u}{\lambda^2 + 2 u z^2} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Setzt man hier weiter:

$$\lambda^2 + 2 u z^2 = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

demnach:

$$d v = 2 z^2 d u + 4 u z d z, \quad z^2 d u = \frac{d v - 4 u z d z}{2}$$

so wird die Gleichung (11):

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v - 4 u z d z}{2 v} = o$$

oder wenn für u sein Werth aus (12) eingeführt wird, findet man nach einigen einfachen Reduktionen:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v}{v + \lambda^2} = o$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$\text{lognat } z + \text{lognat } (v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Const}$$

oder:

$$z = \frac{A}{(v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

wobei A die Constante der Integration bedeutet.

Setzt man für v seinen Werth aus (12), so wird:

$$z^2 = \frac{A^2}{2 (\lambda^2 + u z^2)}$$

und hieraus folgt:

$$u = \frac{1}{z^4} \left(\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2 \right)$$

oder wegen (10):

$$\frac{d z}{d x} = \frac{\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2}}{z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 14)$$

Nennt man 2 l die ganze Länge des Stabes, r den Werth von z für $x = l$, so ist für $z = r \quad \frac{d z}{d x} = o$, demnach:

$$\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 r^2} = o \quad \text{oder} \quad \frac{A^2}{2} = \lambda^2 r^2$$

folglich:

$$\frac{dz}{dx} = \lambda \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{z^2}, \text{ oder } dx = \frac{1}{\lambda} \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$x = \frac{1}{\lambda} \left(- \frac{z \sqrt{r^2 - z^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \text{ Arc sin } \frac{z}{r} \right) + \text{Const}$$

oder weil für $x = o$ $z = o$ wird, so ist $\text{Const} = o$, demnach

$$x = \frac{r^2}{2 \lambda} \left[\text{Arc sin } \frac{z}{r} - \frac{z}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r} \right)^2} \right] \quad \ldots \quad (15)$$

für $x = l$ wird $z = r$, demnach

$$l = \frac{r^2}{2 \lambda} \text{ Arc sin } 1 = \frac{r^2}{2 \lambda} \frac{\pi}{2} = \frac{r^2 \pi}{4 \lambda} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Durch Division von (15) und (16) folgt:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi} \left[\text{Arc sin} \frac{z}{r} - \frac{z}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r} \right)^2} \right] \quad \ldots \quad (17)$$

Die Gleichung (16) gibt endlich, wenn man für λ seinen Werth aus (8) einführt:

$$16 \, l^2 \frac{P}{3 \, m \, \varepsilon} = r^4 \pi^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Nennt man E_1 den Werth von E, welcher dem mittleren Ouerschnitt des Stabes entspricht, so ist wegen (6) $m = \frac{E_1}{r^3}$, demnach wird (18):

$$P = \frac{3}{16} \pi^2 \varepsilon \frac{r \, E_1}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Diese Gleichung bestimmt das Tragungsvermögen des Stabes, oder bestimmt, wenn P gegeben ist, den mittleren Querschnitt des Stabes. Für einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt ist:

$$E_1 = \frac{\pi}{32} (2 \, r)^3 = \frac{\pi \, r^3}{4}$$

und dann findet man:

$$P = \frac{3}{64} \pi^2 \varepsilon \frac{r^4}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Nennt man d den Durchmesser des Stabes in der Mitte, $L = 2\,l$ die totale Länge des Stabes, so wird:

$$P = \frac{3}{4} \frac{\pi^3}{64} \varepsilon \frac{d^4}{L^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Vergleicht man diesen Werth von P mit jenem, der für einen cylindrischen Stab gefunden wurde, so sieht man, dass das Tragungsvermögen des Stabes von gleicher Festigkeit gleich ist $\frac{3}{4}$ von jenem eines cylindrischen von gleicher Dicke.

Aus (7) folgt $z = \sqrt[3]{\frac{y}{k\,m}}$. Führt man diesen Werth von z in (17) ein, so ergibt sich eine Beziehung zwischen x und y und dies ist die Gleichung der gebogenen Axenfaser.

Die Gleichung (17) gibt:

$$\text{für} \quad \frac{z}{r} = 0{\cdot}75 \qquad 0{\cdot}50 \qquad 0{\cdot}25$$

$$\frac{x}{l} = 0{\cdot}224 \qquad 0{\cdot}058 \qquad 0{\cdot}0106$$

Hieraus erkennt man, dass man eine Stabform findet, welche annähernd einerlei Festigkeit darbietet, wenn man an den Enden des Stabes Querschnitte annimmt, welche dem mittleren Querschnitt geometrisch ähnlich, aber linear halb so gross sind und diese Endquerschnitte mit dem mittleren durch gerade Linien verbindet. Es ist nämlich für $\frac{z}{r} = 0{\cdot}5$, $\frac{x}{l} = 0{\cdot}058$, also x beinahe gleich Null.

Aequivalenz der Querschnitte.

Wir sagen, zwei Querschnitte seien äquivalent (gleichwerthig), wenn dieselben unter gleichen Umständen einerlei Festigkeit gewähren.

Hinsichtlich der absoluten Festigkeit sind alle Querschnitte von gleicher Grösse äquivalent.

Hinsichtlich der Bruchfestigkeit sind zwei Querschnitte äquivalent, wenn für dieselben die E-Funktionen (Tafel V. der Resultate für den Maschinenbau) gleichen Werth haben.

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt sind demnach hinsichtlich des Bruches äquivalent, wenn:

$$\frac{1}{6} \, b \, h^2 = \frac{\pi}{32} \, d^3$$

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} \, 6 \left(\frac{h}{b}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Diese Regel ist bequem, wenn für einen runden Querschnitt ein äquivalenter rechteckiger gesucht werden soll. Es sei z. B. für einen Cylinder von 10 Centimeter Durchmesser ein Rechtecht zu suchen, in welchem sich die Höhe h zur Breite b wie 2:1 verhält. Dann hat man $d = 10$, $\frac{h}{b} = 2$ und die Gleichung (1), so wie die Tabelle Seite 30 der Resultate des Maschinenbaues gibt:

$$\frac{h}{d} = 1\cdot056, \quad h = 10\cdot56 \text{ und } b = \frac{10\cdot56}{2} = 5\cdot28$$

Ein runder und ein ellyptischer Querschnitt haben einerlei relative Festigkeit, wenn:

$$\frac{\pi}{32} \, d^3 = \frac{\pi}{32} \, b \, h^2$$

wobei h die mit der biegenden Kraft parallele Axe des ellyptischen Querschnittes bezeichnet.

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\left(\frac{h}{b}\right)}$$

Die Last Q, welche ein Stab aufrecht stehend zu tragen vermag, ist Seite 46 gefunden worden:

$$Q = \varepsilon \, \pi^2 \, E \, \frac{z}{l^2}$$

Zwei Stäbe aus einerlei Material und von gleicher Länge werden also gleich sicher tragen, wenn für dieselben die Werthe von $z \, E$ übereinstimmen, d. h. wenn die Trägheitsmomente der Querschnitte gleich gross sind.

Ein runder und ein rechtekiger Querschnitt haben daher einerlei Tragfähigkeit, wenn:

$$\frac{\pi}{32} \, d^3 \, \frac{d}{2} = \frac{1}{6} \, b \, h^2 \, \frac{h}{2}$$

wobei h die kleinere von den Dimensionen des Rechteckes bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

Ein runder und ein elliptischer Querschnitt geben gleiche Tragkraft wenn:

$$\frac{\pi}{32}\, d^3\, \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32}\, b\, h^3\, \frac{h}{2}$$

woraus folgt: $\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$ wobei b die kleinere Axe des elliptischen Querschnittes bedeutet.

Allgemeinster Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Betrachten wir nun den allgemeinsten Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande gekrümmten Stabes, indem wir annehmen: 1) die Axenlinie des Stabes sei im natürlichen Zustande desselben eine Linie von doppelter Krümmung; 2) die äusseren, auf den Stab einwirkenden Kräfte seien in beliebiger Anzahl vorhanden, und ihre Angriffspunkte befinden sich an beliebigen Orten.

Es sei Fig. 1, Tafel V., A M B ein Stück der Axenlinie des Stabes im natürlichen Zustande desselben, M, N, P drei unendlich wenig von einander entfernte Punkte der Axenlinie. Denken wir uns durch diese drei Punkte eine Ebene F gelegt, so ist dieselbe die Krümmungsebene des Bogenstückes M N P. Legen wir durch die Punkte M und N Normalebenen $E\, E_1$ (d. h. Ebenen, die in den Punkten M und N senkrecht stehen, auf den Berührungslinien, welche in diesen Punkten an die Axenlinie gezogen werden können), so schneiden sich dieselben in einer auf der Krümmungsebene senkrecht stehenden Linie H O K, und die Entfernung des Durchschnittspunktes O dieser Linie mit der Krümmungsebene F von M oder N bestimmt den Krümmungshalbmesser des Kurvenstückes M N. Nennt man diesen Krümmungshalbmesser ϱ_0, so ist $\varrho_0 = O\,M = O\,N$.

Es sei Fig. 2, Tafel V., der Querschnitt des Stabes durch die durch M gelegte Normalebene E, O M z die Linie, in welcher die Ebene E dieses Querschnittes durch die Krümmungsebene F geschnitten wird; M x eine auf M z senkrechte Linie, die also parallel ist zur Durchschnittslinie H O K der durch M und N gelegten Normalebenen $E\, E_1$.

Wir nehmen auch bei dieser Aufgabe an, dass durch die Formveränderungen, welche die äusseren Kräfte veranlassen, die relative Lage aller Atome eines und desselben Querschnittes nicht verändert werde, und dass alle Atome, welche im natürlichen Zustande des Stabes in einer durch das Atom M gelegten Normalebene liegen, auch nach erfolgter Formänderung in einer Ebene liegen, die gefunden wird, wenn man durch das gleiche Atom M eine Normalebene zum deformirten Axenelement legt.

Nehmen wir einstweilen an, dass durch die Einwirkung der äusseren Kräfte weder eine Ausdehnung oder Zusammenpressung der Axenfaser, noch eineTorsion der durch M und N gehenden Querschnitte, sondern nur allein eine Biegung eintritt, in Folge deren die Durchschnittslinie H O K der durch M und N gehenden Normalebenen E E_1 nach H_1 O_1 K_1 rückt, so ist die auf diese Linie senkrechte z_1 M O_1, die Linie, in welcher die Krümmungsebene des gebogenen Axenelementes die durch das Atom M gehende Normalebene E scheidet. Ziehen wir M x_1 senkrecht auf M z_1, nennen den Winkel x M $x_1 = \beta$ und M $p = \xi$ m $p = \zeta$ M $p_1 = \xi_1$ m $p_1 = \zeta_1$ die Coordinaten irgend eines Atoms m des durch M gehenden Normalquerschnitts des Stabes, ϱ den Krümmungshalbmesser des gebogenen Axenelementes M N und d φ den Winkel, den im gebogenen Zustande die durch M und N gehenden Normalebenen miteinander bilden, endlich d s_0 die ursprüngliche Länge des Faserelementes M N.

Dies vorausgesetzt ist:

$$d\,s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

die ursprüngliche Länge des durch den Punkt m gehenden, zwischen den Normalebenen enthaltenen Faserelementes.

$$d\,s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right)$$

die Länge des gleichen Faserelementes nach erfolgter Biegung.

Demnach:

$$d\,s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right) - d\,s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) = d\,s_0 \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

die in Folge der Biegung in dem Faserelement eingetretene Verlängerung. Nennen wir σ die Spannungsintensität, welche diese Ausdehnung in dem Faserelement, dessen ursprüngliche Länge

$$d\,s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

war, hervorgebracht hat, ε den Modulus der Elastizität des Materials, so ist nach dem Stabausdehnungsgesetz:

$$d\, s_0 \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) = d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

In allen Fällen der Anwendung sind die Querschnittsdimensionen eines Stabes gegen die Krümmungshalbmesser sehr klein, kann man demnach $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ gegen die Einheit vernachlässigen und dann folgt aus obigem Ausdruck:

$$\sigma = \varepsilon \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Bisher haben wir angenommen, dass die äusseren Kräfte nur eine Biegung, nicht aber eine Dehnung des Axenelementes M N veranlassen. Findet auch eine Dehnung statt und beträgt die Intensität der dehnenden Kraft S, so ist die Spannungsintensität des Faserelementes bei m:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zwischen den Coordinaten $\zeta\ \xi$ und $\zeta_1\ \xi_1$ bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_1 = \zeta \cos \beta + \xi \sin \beta \\ \xi_1 = \xi \cos \beta - \zeta \sin \beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Führt man diesen Werth von ζ_1 in (2) ein, so folgt:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{\zeta \cos \beta + \xi \sin \beta}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

oder

$$\sigma = S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) + \xi \frac{\sin \beta}{\varrho} \right] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Nennt man d f den unendlich kleinen Querschnitt eines bei m befindlichen Faserelementes, so ist $\int \sigma\, d f$ die Summe aller Spannungen und sind $\int \sigma\, d f\, \xi$, $\int \sigma\, d f\, \zeta$ die Summen der Momente aller Spannungen, in Bezug auf die Axen M x und M z und wir erhalten:

$$\int \sigma\, d f = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos \beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) + \xi \frac{\sin \beta}{\varrho} \right] \right\} d f$$

$$\int \sigma\, \xi\, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} \xi\, df$$

$$\int \sigma\, \zeta\, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} \zeta\, df$$

Berücksichtiget man 1) dass für diese Integrationen nur allein ζ und ξ variabel, ϱ und ϱ_0 dagegen constant sind; 2) dass der Voraussetzung gemäss M der Schwerpunkt des Querschnittes ist, nennt Ω diesen Querschnitt und setzt zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \int \zeta^2\, df &= \binom{m}{\zeta} \\ \int \xi^2\, df &= \binom{m}{\xi} \\ \int \zeta\, \xi\, df &= \binom{m}{\xi\zeta} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so werden obige Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma\, df &= S\, \Omega \\ \int \sigma\, \xi\, df &= \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \binom{m}{\xi\zeta} + \frac{\sin\beta}{\varrho} \binom{m}{\xi} \right] \\ \int \sigma\, \zeta\, df &= \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \binom{m}{\zeta} + \frac{\sin\beta}{\varrho} \binom{m}{\xi\zeta} \right] \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Zerlegen wir jede von den äusseren Kräften, welche auf das bei M beginnende und bis an sein Ende B fortgehende Stabstük einwirken, in drei Seitenkräfte X Y Z und zwar so, dass die Richtungen von X und Z parallel sind mit den Coordinatenaxen M x M z und dass Y parallel wirkt mit der zum Punkt M des Axenelementes gezogenen Berührungslinie; nennen ferner x y z die Coordinaten des Angriffspunktes einer dieser Kräfte, so sind $\Sigma\,(Yz - Zy)$ $\Sigma\,(Yx - Xy)$ die Summen der Momente dieser äusseren Kräfte in Bezug auf die Axen M x und M z, und zwar sind diese Momente so berechnet, dass sie bei m eine Dehnung hervorzubruingen streben. Endlich ist $\Sigma\,(Xz - Zx)$ die Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf die Axe M y (die mit der Tangente an den Punkt M zusammenfällt).

Für den Fall, dass das Ende des Stabstückes, dessen Gleichgewichtszustand wir untersuchen, nicht ganz frei, sondern festgehalten oder eingespannt wäre, so kann man das Stabende doch so behandeln, wie wenn es vollkommen frei wäre, vorausgesetzt, dass man am Stabende gewisse Kräfte $\mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$ und Momente $\binom{M}{x}\binom{M}{y}\binom{M}{z}$

einwirken lässt, und zwar die Kräfte nach Richtungen, die mit den Axen $M x$ $M y$ $M z$ parallel sind, die Momente in Bezug auf Axen, die durch den Schwerpunkt der Endfläche des Stabes parallel zu $M x$ $M y$ $M z$ gelegt sind.

Um die Gleichgewichtsgleichungen aufstellen zu können, haben wir noch die Torsion des Stabes zu berücksichtigen. Durch die Torsion des Stabes wird bewirkt, dass das zwischen den Normalebenen E und E_1 enthaltene, bei m befindliche Faserelement eine schwache Verlängerung und dass seine Richtung gegen die Normalebene E eine Neigung erhält. Allein wenn wir annehmen, dass alle Formänderungen sehr schwach sind, so wird der Einfluss der Torsion auf die Spannnung σ verschwindend klein, kann man also die Ausdrücke (6) auch noch gelten lassen, wenn eine schwache Torsion vorhanden ist. Die aus der Torsion entstehenden Abschiebungskräfte müssen jedoch in Rechnung gebracht werden, denn sie sind es, welche den auf die Drehung um die Axe $M y$ wirkenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten.

Nennen wir $\left(\frac{m}{y}\right)$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf die Axe y, G den Modulus der Elastizität für Torsion, $d\Theta$ den Winkel, um welchen die Normalebene E_1 gegen die Normalebene E gedreht wird, so ist nach Gleichung (11), Seite 59 der Torsionstheorie:

$$G\left(\frac{m}{y}\right)\frac{d\Theta}{ds} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

das Torsionsmoment, welches allen im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften entspricht.

Da nun die zwischen den Ebenen E und E_1 herrschenden Spannungen und die in der Ebene von E wirkenden Abschiebungskräfte im Gleichgewicht sein müssen mit allen äusseren Kräften, die auf das Stabstück einwirken, das bei M beginnt und bis ans Ende fortgeht, so hat man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma Y = \Omega S \\
&\Sigma (Y z - Z y) = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi\zeta}\right)\right] \\
&\Sigma (Y x - X y) = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\xi\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi}\right)\right] \\
&\Sigma (X z - Z x) = G\left(\frac{m}{y}\right)\frac{d\Theta}{ds}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dabei sind aber in der Summe Σ auch die Kräfte $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ und Momente $\left(\begin{smallmatrix}M\\x\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}M\\y\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}M\\z\end{smallmatrix}\right)$ mit eingeschlossen.

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Spannungsintensität S des Axenfaserelementes M N, die zweite und dritte dieser Gleichungen bestimmen den Winkel β und den Krümmungshalbmesser ϱ.

Sind diese Grössen bestimmt, so kann man vermittelst Gleichung (4) die Spannungsintensität σ für einen beliebigen Punkt m des Querschnittes bei M bestimmen; die vierte der Gleichungen bestimmt endlich den Torsionswinkel.

Um die Gestalt der deformirten Axenfaser zu finden, müssen allerdings auch noch die Differenzialausdrücke für den Krümmungshalbmesser in Rechnung gebracht werden, was in vielen Fällen zu äusserst verwickelten Rechnungen führt, in manchen Fällen geben aber schon die Gleichungen (8) die Lösung der Aufgabe. Bevor wir jedoch zu den Anwendungen übergehen, wollen wir noch mehrere Punkte des Problems erklären.

Betrachtet man in (4) σ als eine Constante, so ist diese Gleichung in Bezug auf ξ und ζ eine Gleichung des ersten Grades, woraus man sieht, dass alle Punkte eines und desselben Querschnittes, in welchem einerlei Spannung herrscht, eine gerade Linie bilden. Nennt man α den Winkel $x\,M\,x_3$, den eine durch M zu dieser geraden Linie von gleicher Spannung parallel gezogene Gerade mit der Axe M x bildet, so ist:

$$\operatorname{tang}(\pi - \alpha) = -\frac{\frac{\sin\beta}{\varrho}}{\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}} = -\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \frac{\varrho}{\varrho_0}}$$

oder:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - \frac{\varrho}{\varrho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Suchen wir eine in der Ebene des Normalschnittes, also in der Ebene der x z liegende Linie, welche eine solche Richtung hat, dass sich die statischen Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf diese Linie als Drehungsaxe genommen aufheben. Nennen wir γ den Winkel, den diese Linie mit der Richtung M z bildet, und legen durch M ein Coordinatensystem $M x_2$ $M y_2$ $M z_2$, so dass $M y_2$ mit $M y$ $M z_2$ mit obiger Linie übereinstimmt, die mit M z einen Winkel γ bildet, so hat man zunächst zur Bestimmung der Coordinaten x_2 y_2 z_2 eines Punktes in Bezug auf dieses System:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x \cos\gamma - z \sin\gamma \\ y_2 &= y \\ z_2 &= z \cos\gamma + x \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Zerlegen wir ferner die Kräfte X Y Z nach dieser neuen Coordinatenaxe, so ist:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X \cos\gamma - Z \sin\gamma \\ Y_2 &= Y \\ Z_2 &= Z \cos\gamma + X \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hieraus findet man für die Summe der Momente in Bezug auf die Axe $O\ z_2$:

$$\Sigma\,(Y_2\,x_2 - X_2\,y_2) = \Sigma\,[Y\,(x \cos\gamma - z \sin\gamma) - (X \cos\gamma - Z \sin\gamma)\,y]$$

oder:

$$\Sigma\,(Y_2\,x_2 - X_2\,y_2) = \cos\gamma\,\Sigma\,(Y\,x - X\,y) - \sin\gamma\,\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)$$

Diese Summe verschwindet, wenn:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Vermöge der zweiten und dritten der Gleichungen (8) ist nun auch:

$$\frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} = \frac{\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)}$$

Berücksichtiget man den Ausdruck (9), so wird:

$$\frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} = \frac{\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)} \quad \ldots\ldots, \quad (13)$$

Wegen (12) und (13) wird:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Wenn der Querschnitt so geformt ist, dass er durch vier unter 45° gegeneinander geneigte Ebenen in acht congruente Parthien getheilt werden kann und wenn ferner die initiale Krümmung des Stabes von der Art ist, dass die Krümmungsebene des Stabes mit einer Hauptaxe der Figur übereinstimmt, so ist $\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) = o$ und $\left(\frac{m}{\xi}\right) = \left(\frac{m}{\zeta}\right)$ und dann wird vermöge (14):

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha$$

d. h. unter diesen beiden Voraussetzungen steht die Richtung der Linie in Bezug auf welche sich die Momente der äusseren Kräfte aufheben, senkrecht auf der Linie, in welcher einerlei Spannung herrscht.

Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.

Die folgende Tabelle enthält die Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität derjenigen Materialien, welche im Maschinenbau vorzugsweise verwendet werden.

Columne $\mathfrak{A}$ Coeffizienten für die absolute Festigkeit per 1 Quadrat-Centimeter.

Columne $\mathfrak{B}$ Brechungs-Coeffizienten per 1 Quadrat-Centimeter.

Columne T Coeffizienten für den Bruch durch Abwinden.

Columne ε Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Ausdehnung, Zusammenpressung und Biegung der Körper.

Columne G Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Torsion von Stäben.

Columne $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abreissen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abbrechen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{T^2}{G}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abwinden von Stäben erforderlich sind.

Die Coeffizienten sind sämmtlich die mittleren Werthe der zahlreichen Versuchsresultate über die Festigkeit der Materialien.

Zusammenstellung der Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.

Material.	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	T	ε	G	$\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$	$\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$	$\frac{T^2}{G}$
Eichenholz . .	720	700	280	120000	48000	4·3	4	1·6
Eschenholz . .	1195	900	478	112000	44800	13	7·2	5·1
Tannenholz . .	854	600	240	100000	40000	7·2	3·6	1·44
Buchenholz . .	803	720	321	93000	37200	6·9	5·6	2·8
Schmiedeeisen (dünn)	4350	7000	7000	2500000	1000000	7·4	20	47
Schmiedeeisen, dickere Stäbe	3300	4000	4500	1500000	600000	7·2	10·6	33.7
Eisendrath . .	7000	—	—	1800000	720000	27	—	—
Gusseisen . . .	1000 1300	3000	3000	1000000	400000	1·0 1·7	9	22·5
Gussstahl . . .	10000	16000	10000	2000000	960000	40	128	104
Stahl, mittlere Qualität . . .	7500	—	7500	3000000	1200000	18	—	46·8
Stahl, ordinäre Qualität . . .	3600	—	3600	2000000	800000	6	—	16
Kanonenmetall	2600	—	2300	700000	360000	10	—	14·7
Kupfer, gehämmert	2500	—	—	1310000	—	5	—	—
Kupfer, gegossen	1300	—	2000	—	—	—	—	—
Messing	1300	2270	2100	645000	258000	2·6	7·9	17·1
Zinn	333	—	658	320000	—	—	—	—
Blei	128	—	458	540000	—	0·03	—	—
Zink	199	—	—	—	—	—	—	—
Glas	248	—	—	9000	—	7·0	—	—
Kalbleder . . .	129	—	—	391	—	43	—	—
Gegerbtes Schafleder . .	110	—	—	381	—	32	—	—
Weisses Rossleder	272	—	—	748	—	99	—	—
Dünnes Rossleder	218	—	—	476	—	100	—	—
Corduan Rossleder	114	—	—	252	—	51	—	—
Kuhleder . . .	271	—	—	683	—	108	—	—
Hanfseile . . .	510	—	—	—	—	—	—	—

Erfahrungsresultate über die Elastizitätsgrenze.

Nennt man:

$\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit,

$\mathfrak{R}$ die rückwirkende Festigkeit,

$\mathfrak{A}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannungskraft an der Elastizitätsgrenze der Ausdehnung,

$\mathfrak{R}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Zusammendrückungskraft an der Elastizitätsgrenze,

a_1 die lineare Ausdehnung eines Stabes an der Elastizitätsgrenze,

r_1 die lineare Zusammendrückung eines Stabes an der Elastizitätsgrenze,

so hat man der Erfahrung zufolge annähernd nachstehende Resultate:

Material.	$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$	$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}$	$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{A}}$	a_1	r_1
Schmiedeeisen	$\frac{4}{5}$	0·4	0·4	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Eisenblech	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Eisendraht	$\frac{4}{5}$	0·4	0·4	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Gusseisen	5·5	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Tannenholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Fichtenholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Kiefernholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Lerchenholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Eichenholz	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$