Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Schwungrad-Schwingungen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

geschehen ist, so wird für $t = T = \frac{\pi}{\sqrt{m - 2nq}}$, $\varphi = \alpha + \alpha_1$ daher vermöge (13):

$$\alpha + \alpha_1 = 2 \frac{m \alpha - q}{m - 2nq}$$

Hieraus folgt:

$$\alpha_1 = \alpha \frac{m + 2nq}{m - 2nq} - \frac{2q}{m - 2nq}$$

oder weil $2nq$ eine gegen m sehr kleine Grösse ist

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{4nq}{m} \alpha - \frac{2q}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

n, q, α sind sehr kleine Grössen, $\frac{4nq}{m} \alpha$ ist deshalb bedeutend kleiner als $\frac{2q}{m}$, α_1 ist daher kleiner als α. Das Pendel ist daher am Ende des ersten Schwunges nicht so weit von der Vertikalen entfernt als am Anfang dieses Schwunges.

Bezeichnet man nun mit $\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Winkel, welche das Pendel nach dem zweiten, dritten .... Schwung mit der Vertikalen bildet, so hat man wegen (15):

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{4nq}{m} \alpha_1 - \frac{2q}{m}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{4nq}{m} \alpha_2 - \frac{2q}{m}$$

Diese Winkel nehmen also fort und fort ab, bis zuletzt ein Stillstand eintritt.

Schwungrad-Schwingungen.

Bei Taschenuhren, Reiseuhren und überhaupt bei solchen Uhren, die eine feste Aufstellung nicht haben können, wird als schwingender Körper ein Schwungrad gebraucht. Um dasselbe schwingen zu machen, nimmt man eine schraubenförmig oder spiralförmig zusammengewundene Stahlfeder, befestigt das eine der beiden Enden mit der Axe des Schwungrades, das andere Ende hingegen mit irgend einem unbeweglichen Körper, bringt hierauf das Rad aus der Gleichgewichtslage, wobei die Feder entweder mehr auf- oder mehr zusammengewunden wird und überlässt sodann das Schwungrad der Einwirkung der Feder.

Wir haben in der Theorie der Spiralfedern, Seite 116, und in der Theorie der schraubenförmigen Federn, Seite 120, gezeigt, dass das statische Moment der Kraft, mit welcher eine solche Feder in ihre natürliche Form zurückzukehren strebt, wenn sie um einen gewissen Winkel aus dieser natürlichen Lage verwunden wurde, nur dann dem Verwindungswinkel proportional ist, wenn die Feder eine solche Einrichtung hat, dass ihr Schwerpunkt stets in der Drehungsaxe bleibt, während sie ihre Form ändert. Wir setzen in der folgenden Theorie voraus, dass die Feder diese Eigenschaft besitze.

Es sei, Fig. 4, Tafel XXV., A B die Gleichgewichtsposition. $\widehat{BAD} = \alpha$ der Winkel, um welchen anfänglich das Schwungrad aus seiner Gleichgewichtsposition abgelenkt und dann der Einwirkung der Feder überlassen wurde. $\widehat{DAC} = \varphi$ der Winkel, um welchen das Schwungrad während einer gewissen Zeit t zurückgeschwungen ist, so können wir nach obigem Erfahrungssatz annehmen, dass das statische Moment der Federkraft in der Stellung A C durch $\lambda(\alpha - \varphi)$ ausgedrückt wird, wobei λ eine Constante ist, die von der Starrheit der Feder abhängt.

Nennen wir M das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Schwungrades, so erhalten wir als Differenzialgleichung der Bewegung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda(\alpha-\varphi) - b\,\frac{d\varphi}{dt} - c}{M} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wobei angenommen ist, 1) dass der Luftwiderstand der Winkelgeschwindigkeit proportional ist und durch $b\,\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt werden kann; 2) dass die Axenreibung constant ist und durch c bezeichnet wird; 3) dass der Schwerpunkt des Schwungrades in seine Drehungsaxe fällt; 4) dass die Masse der Feder, so wie auch die etwa während der Bewegung eintretenden Aenderungen der Lage ihres Schwerpunktes vernachlässigt werden dürfen.

Unter diesen Voraussetzungen stimmt (der Form nach) die Gleichung (1) ganz mit jener überein, die wir für ein Pendel mit sehr kleinem Schwingungswinkel gefunden haben.

Setzen wir abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\lambda}{2M} \\ n &= \frac{b}{2M} \\ p &= \frac{c}{2M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so wird die Gleichung (1)

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + n \frac{d \varphi}{d t} + m \varphi = m \alpha - p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Versuchen wir dieser Gleichung durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A} e^{k t} + \mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zu genügen. Aus (4) folgt

$$\frac{d \varphi}{d t} = k \mathfrak{A} e^{k t}, \quad \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = k^2 \mathfrak{A} e^{k t}$$

Führt man diese Werthe von φ, $\frac{d \varphi}{d t}$, $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ in (3) ein, so findet man:

$$(k^2 \mathfrak{A} + n k \mathfrak{A} + m \mathfrak{A}) e^{k t} + m \mathfrak{B} = m \alpha - p$$

Damit diese Gleichung eine identische wird, muss sein:

$$k^2 + n k + m = 0$$

$$m \mathfrak{B} = m \alpha - p$$

und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1} \\ \mathfrak{B} &= \alpha - \frac{p}{m} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da wir für k zwei Werthe finden, so gibt jeder derselben ein partikulares Integrale, und ist das allgemeine Integrale die Summe der beiden partikularen Integrale. Wir erhalten demnach:

$$\varphi = \mathfrak{C} e^{\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\right) t} + \mathfrak{C} e^{\left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\right) t} + \alpha - \frac{p}{m}$$

Es ist aber

$$e^{\frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\, t} = \cos \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t$$

$$e^{-\frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\, t} = \cos \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t - \sqrt{-1} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t$$

daher findet man

$$\varphi = e^{-\frac{n}{2}t}\, \mathfrak{C}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t + \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t\right)$$

$$+ e^{-\frac{n}{2}t}\, \mathfrak{C}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t - \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t\right)$$

$$+ \alpha - \frac{p}{m}$$

oder wenn man $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} = \mathfrak{M}$, $(\mathfrak{C} - \mathfrak{C})\sqrt{-1} = \mathfrak{N}$ setzt

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m}$$

$$+ e^{-\frac{n}{2}t}\left(\mathfrak{M}\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t + \mathfrak{N}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t\right) \quad (6)$$

Durch Differenziation dieses Ausdruckes folgt, wenn man $\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2} = \mu$ setzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\frac{n}{2}t}\left\{\begin{array}{l}\left(\mathfrak{N}\mu - \mathfrak{M}\frac{n}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t \\ -\left(\mathfrak{M}\mu + \mathfrak{N}\frac{n}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m - n^2}\,t\end{array}\right\} \quad . \ . \ (7)$$

Die Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ werden bestimmt, indem für $t = 0$ sowohl φ als auch $\frac{d\varphi}{dt}$ verschwindet; daher hat man wegen (6) und (7)

$$0 = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{M}$$

$$0 = \mathfrak{N}\mu - \mathfrak{M}\frac{n}{2}$$

oder

$$\mathfrak{M} = -\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{n}{2\mu}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right) = -\frac{n}{\sqrt{4m - n^2}}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)$$

Wir haben demnach schliesslich

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left[1 - e^{-\frac{n}{2}t}\left(\begin{aligned}&\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\\ &+\frac{n}{\sqrt{4m-n^2}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\end{aligned}\right)\right]\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\frac{2m}{\sqrt{4m-n^2}}e^{-\frac{n}{2}t}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Nach jedem Schwung ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, d. h. immer nach Verlauf einer Zeit $\frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}}$

Die Zeit T einer jeden Schwingung ist demnach:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{4m-n^2}} = \pi\frac{\sqrt{\frac{2M}{\lambda}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{8\lambda M}}} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Nebenhindernisse vermögen also nicht zu bewirken, dass die Schwingungszeiten veränderlich werden, dagegen aber verursachen sie auch hier, dass der Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner wird, so dass zuletzt Stillstand eintritt. Setzen wir $0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die Werthe von φ, welche den aufeinanderfolgenden Schwingungen entsprechen, so erhalten wir dieselben, wenn wir in (8) für φ setzen:

$$\varphi = 0,\ \frac{\pi}{\mu},\ 2\frac{\pi}{\mu},\ 3\frac{\pi}{\mu}\ \ldots\ldots\ldots$$

Es ist demnach:

$$\varphi_1 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 - e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\varphi_3 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-3\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun sind aber $\varphi_1 - 0,\ \varphi_1 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_4,\ \varphi_5 - \varphi_4 \ldots\ldots$ die Winkel der aufeinanderfolgenden Schwingungen. Die Werthe dieser Winkel sind demnach:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\[2ex]
\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}} + e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\[2ex]
\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-3\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}} + e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

woraus zu ersehen ist, dass die Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner werden.

Aus (9) sieht man, 1) dass die Zeit einer Schwingung klein ausfällt, wenn λ gross ist, d. h. wenn die Feder starr ist; 2) dass die Schwingungszeit durch den Luftwiderstand vergrössert wird oder dass die Zahl der Schwingungen, die in einer gewissen Zeit geschehen, vermindert wird; 3) dass bei hoher Temperatur die Schwingungszeit grösser ist, als bei niedriger, indem die Wärme das Schwungrad ausdehnt, daher das Trägheitsmoment M desselben vergrössert; 4) dass die Axenreibung auf die Dauer einer Schwingung keinen Einfluss ausübt, wohl aber auf die Grösse der einzelnen Schwingungswinkel (wegen 10).

Einrichtung einer Uhr im Allgemeinen.

Die im Vorhergehenden entwickelte Schwingungstheorie hat uns gelehrt, dass die Schwingungszeit sowohl eines Pendels als auch eines Schwungrades selbst unter der Einwirkung des Luftwiderstandes und anderer Nebenhindernisse constant bleibt, dass jedoch die Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner werden.

Ein Pendel oder ein Schwungrad kann daher ohne sonstige Hilfseinrichtungen als Uhr gebraucht werden, wenn es sich nur um die Messung von kürzeren Zeitabschnitten handelt. Allein in den meisten Fällen der Anwendung verlangen wir von einer Uhr, dass sie längere Zeit, z. B. einen Tag, eine Woche, einen Monat lang einen continuirlich regelmässigen Gang habe, um auch grössere Zeitabschnitte messen zu können, und dies leistet ein Pendel oder