Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Pendelschwingungen mit Rücksicht auf Nebenhindernisse

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{m} &= 2a + \frac{2c}{G} \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} &= \frac{\frac{b}{4Ml}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2G}{Ml} - \left(\frac{b}{2lM}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8GMl}{b^2} - 1}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)$$

d. h. wenn a, c, b beträchtliche Werthe haben, wenn also die Nebenhindernisse, Reibung, Luftwiderstand, Gewichtsverlust gross sind.

Wir können nun vermöge (13), (15), (16) folgende Sätze aussprechen:

1) Die Schwingungszeit eines Pendels bleibt constant trotz Reibung, Gewichtsverlust und Luftwiderstand.
2) Die Schwingungszeit wird durch den Gewichtsverlust und die Reibung der Aufhängung nicht verändert, sie wird dagegen durch den Luftwiderstand vergrössert, d. h. die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit nimmt ab.
3) Der Schwungwinkel wird theils wegen Reibung und Gewichtsverlust, insbesondere aber wegen des Luftwiderstandes immer kleiner und kleiner und verschwindet zuletzt.

Diese Sätze sind wir aber nur berechtigt auszusprechen, wenn überhaupt der Ausschlagwinkel klein ist, und wenn der Luftwiderstand der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit proportional gesetzt werden darf.

Pendelschwingung mit Reibung und Luftwiderstand.

Wir wollen noch die Schwingungen eines Pendels unter der Voraussetzung berechnen, dass der Luftwiderstand dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

Für diesen Fall ist die Differenzialgleichung der Bewegung, Fig. 3, Tafel XXV.:

$$l \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{1}{2} \frac{G \sin(\alpha - \varphi) - c - c_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dabei ist:

G das Gewicht des Pendelkörpers. l Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt. c eine Constante, welche dem Widerstand der Aufhängung entspricht. c_1 eine Constante für den Luftwiderstand. M die auf den Schwerpunkt des Pendels reducirte Masse desselben.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{G}{2\,l\,M} = m, \quad \frac{c}{2\,l\,M} = q, \quad \frac{c_1}{2\,l\,M} = n \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird die Gleichung (1):

$$\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = m \sin(\alpha - \varphi) - q - n\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} + n\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = m \sin(\alpha - \varphi) - q \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Setzen wir ferner:

$$\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = 2\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so wird

$$\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = \frac{d\,y}{d\,\varphi}$$

demnach wird aus Gleichung (4):

$$\frac{d\,y}{d\,\varphi} + 2\,n\,y = m \sin(\alpha - \varphi) - q \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$y = \mathfrak{A}\,e^{-2n\varphi} + \frac{m}{4\,n^2+1}\left[2\,n \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi)\right] - \frac{q}{2\,n} \quad (7)$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Constante der Integration bedeutet. Für $\varphi = 0$ ist $\frac{d\,\varphi}{d\,t} = 0$ und $y = 0$, demnach:

$$0 = \mathfrak{A} + \frac{m}{4\,n^2+1}(2\,n \sin\alpha + \cos\alpha) - \frac{q}{2\,n} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Aus (7) und (8) $\mathfrak{A}$ eliminirt und für y seinen Werth aus (5) gesetzt, erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = \frac{q}{2\,n}\left(e^{-2n\varphi} - 1\right) + \frac{m}{4\,n^2+1}\left\{\begin{array}{l} 2\,n \sin(\alpha - \quad) + \cos(\alpha - \varphi) \\ -\,e^{-2n\varphi}(2\,n \sin\alpha + \cos\alpha) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Betrachtet man α und $\alpha - \varphi$ als kleine Winkel, deren dritte und höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so findet man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{q}{2n}(1 - 2n\varphi + 2n^2\varphi^2 - 1)$$

$$+\frac{m}{4n^2+1}\left\{\begin{array}{l} 2n(\alpha-\varphi) + 1 - \frac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2 \\ -(1-2n\varphi+2n^2\varphi^2)\left(2n\alpha+1-\frac{\alpha^2}{2}\right) \end{array}\right\}$$

oder

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (m\alpha - q)\varphi - \left(\frac{1}{2}m - nq\right)\varphi^2 \quad . \ . \ . \ (10)$$

Hieraus folgt

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2(m\alpha - q)\varphi - (m - 2nq)\varphi^2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{m - 2nq}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,sin}\left(1 - \frac{m - 2nq}{m\alpha - q}\varphi\right)\right] \quad . \ . \ (12)$$

oder

$$\varphi = \frac{m\alpha - q}{m - 2nq}\left(1 - \cos\sqrt{m - 2nq}\,t\right). \quad . \ . \ . \ . \ (13)$$

Nennt man T die Zeit eines einfachen Pendelschwunges, so ist diese vermöge (13):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{m - 2nq}} = \pi\sqrt{\frac{2lm}{G}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{cc_1}{lMG}}}$$

oder annähernd, weil $\frac{cc_1}{lMG}$ eine sehr kleine Grösse ist:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2lM}{G}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{cc_1}{lMG}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

Dieser Ausdruck ist von dem anfänglichen Ausschlagwinkel α unabhängig. Wenn also dieser Winkel α so klein ist, dass man die dritten und höheren Potenzen desselben vernachlässigen darf, so ist die Schwingungszeit unabhängig von dem Ausschlagwinkel. Die Schwingungszeit fällt jedoch wegen des Aufhängewiderstandes c und wegen des Luftwiderstandes c_1 kleiner aus, als sie in dem Falle wäre, wenn diese Widerstände nicht vorhanden wären.

Aber obgleich die Schwingungszeit von α nicht abhängt, so werden dennoch die Schwingungswinkel allmählig kleiner und kleiner, wie sogleich bewiesen werden soll.

Nennen wir α_1 den Winkel A_1CB, um welchen die Pendelstange links von der Vertikalen BC abweicht, nachdem der erste Schwung geschehen ist, so wird für $t = T = \frac{\pi}{\sqrt{m - 2nq}}$, $\varphi = \alpha + \alpha_1$ daher vermöge (13):

$$\alpha + \alpha_1 = 2\,\frac{m\,\alpha - q}{m - 2\,n\,q}$$

Hieraus folgt:

$$\alpha_1 = \alpha\,\frac{m + 2\,n\,q}{m - 2\,n\,q} - \frac{2\,q}{m - 2\,n\,q}$$

oder weil $2\,n\,q$ eine gegen m sehr kleine Grösse ist

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{4\,n\,q}{m}\,\alpha - \frac{2\,q}{m} \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

n, q, α sind sehr kleine Grössen, $\frac{4\,n\,q}{m}\,\alpha$ ist deshalb bedeutend kleiner als $\frac{2\,q}{m}$, α_1 ist daher kleiner als α. Das Pendel ist daher am Ende des ersten Schwunges nicht so weit von der Vertikalen entfernt als am Anfang dieses Schwunges.

Bezeichnet man nun mit α_2, α_3 .... die Winkel, welche das Pendel nach dem zweiten, dritten .... Schwung mit der Vertikalen bildet, so hat man wegen (15):

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{4\,n\,q}{m}\,\alpha_1 - \frac{2\,q}{m}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{4\,n\,q}{m}\,\alpha_2 - \frac{2\,q}{m}$$

Diese Winkel nehmen also fort und fort ab, bis zuletzt ein Stillstand eintritt.

Schwungrad-Schwingungen.

Bei Taschenuhren, Reiseuhren und überhaupt bei solchen Uhren, die eine feste Aufstellung nicht haben können, wird als schwingender Körper ein Schwungrad gebraucht. Um dasselbe schwingen zu machen, nimmt man eine schraubenförmig oder spiralförmig zusammengewundene Stahlfeder, befestigt das eine der beiden Enden mit der Axe des Schwungrades, das andere Ende hingegen mit irgend einem unbeweglichen Körper, bringt hierauf das Rad aus der Gleichgewichtslage, wobei die Feder entweder mehr auf- oder mehr zusammengewunden wird und überlässt sodann das Schwungrad der Einwirkung der Feder.

Wir haben in der Theorie der Spiralfedern, Seite 116, und in der Theorie der schraubenförmigen Federn, Seite 120, gezeigt, dass