Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Pendelschwingungen mit Rücksicht auf Nebenhindernisse seiner mittleren Position nach links abweicht, als in der anfänglichen Position nach rechts. Das Pendel schwingt in seiner mittleren Position hin und her und entfernt sich dabei um einen Winkel α von seiner mittleren Stellung. Nennt man T die Zeit eines Schwunges d. h. die Zeit, in welcher das Pendel den Winkel $\varphi = 2\alpha$ zurücklegt, so ist:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k}} = \pi \sqrt{\frac{2\,l\,M}{G}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Diese Zeit ist von dem Ablenkungswinkel oder Schwingungswinkel α unabhängig; wir dürfen also den Satz aussprechen, dass die Schwingungszeit eines Pendels von dem Schwingungswinkel nicht abhängt, in so fern derselbe so klein ist, dass er als unendlich kleine Grösse angesehen werden kann, oder auch: so lange der Schwingungswinkel eine kleine Grösse ist, ist die Schwingungszeit von demselben unabhängig. Die Masse M kann auf folgende Weise ausgedrückt werden. Nennt man $\frac{G}{2g} h^2$ das Trägheitsmoment des Pendelkörpers in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht und deren Richtung jener der wirklichen Drehungsaxe parallel ist, so hat man (vermöge Prinzipien, Seite 118, Nr. 66):

$$M\,l^2 = \frac{G}{2g} h^2 + \frac{G}{2g} l^2$$

oder

$$M = \frac{G}{2g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Führt man diesen Werth in (7) ein, so findet man

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Genauere Berechnung der Pendelschwingungen mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse etc.

Suchen wir nun das Gesetz der Pendelschwingungen zu erforschen, indem wir 1) nicht nur das Gewicht des Pendels, sondern auch 2) seinen Gewichtsverlust in der Luft, 3) den Luftwiderstand, 4) den Widerstand der Aufhängung berücksichtigen.

Es sei:

$a\,G$ der constante Gewichtsverlust, welcher gleich ist dem Gewicht einer Luftmenge, deren Volumen gleich ist dem Volumen des Pendels,

$b\frac{d\varphi}{dt}$ der Betrag des Luftwiderstandes, welchen wir der Winkelgeschwindigkeit proportional annehmen dürfen, weil die Geschwindigkeit der Bewegung in allen Fällen der Anwendung klein ist,

c der constante Widerstand der Aufhängung,

dann haben wir folgende Gleichung:

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{G\sin(\alpha-\varphi) - aG - b\frac{d\varphi}{dt} - c}{M} \quad . \; . \; . \; (1)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{G}{2lM}\sin(\alpha-\varphi) - \frac{aG+c}{lM} - \frac{b}{2lM}\frac{d\varphi}{dt} \quad . \; . \; . \; (2)$$

oder wenn wir auch hier wiederum annehmen, dass α so klein ist, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn $\sin(\alpha-\varphi) = \alpha - \varphi$ gesetzt wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\frac{d\varphi}{dt} + m\varphi = m\alpha - p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{G}{2lM} \\ \frac{aG+c}{Ml} &= p \\ n &= \frac{b}{2Ml} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Versuchen wir der Gleichung (3) durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A}e^{kt} + \mathfrak{B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

zu genügen, wobei $\mathfrak{A}$, k, $\mathfrak{B}$ constante Grössen sind. Aus (5) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \mathfrak{A}k^2e^{kt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mathfrak{A}ke^{kt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Die Werthe (5) und (6) in (3) eingeführt, findet man:

$$(\mathfrak{A}k^2 + n\mathfrak{A}k + m\mathfrak{A})e^{kt} + m\mathfrak{B} = m\alpha - p$$

Dieser Gleichung wird für jeden Werth von t entsprochen, wenn man nimmt:

$$k^2 + n\,k + m = 0$$

$$\mathfrak{B} = \alpha - \frac{p}{m}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,\sqrt{-1} \\ \mathfrak{B} &= \alpha - \frac{p}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{n}{2} = \frac{b}{4\,M\,l} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G}{M\,l} - \left(\frac{b}{2\,M\,l}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

so wird:

$$k = -\lambda \pm \varepsilon\sqrt{-1}$$

$$\mathfrak{B} = \alpha - \frac{p}{m}$$

Da wir für k zwei Werthe gefunden haben, so liefert jeder derselben ein partikulares Integrale, und das allgemeine Integrale ist die Summe der beiden partikularen, wir erhalten demnach vermöge (5):

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{A}_1\, e^{\left(-\lambda + \varepsilon\sqrt{-1}\right)t} + \mathfrak{A}_2\, e^{\left(-\lambda - \varepsilon\sqrt{-1}\right)t}$$

oder

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + e^{-\lambda t}\left(\mathfrak{A}_1\, e^{\varepsilon\sqrt{-1}\,t} + \mathfrak{A}_2\, e^{-\varepsilon\sqrt{-1}\,t}\right)$$

oder endlich

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + e^{-\lambda t}\left(\mathfrak{M}\cos\varepsilon\,t + \mathfrak{N}\sin\varepsilon\,t\right) \quad \ldots \quad (9)$$

wobei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei neue Constanten bezeichnen, deren Werthe durch den Initial-Zustand bestimmt werden müssen.

Nun ist

$$\text{für } t = 0,\ \varphi = 0,\ \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

demnach wegen (9):

$$0 = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{M} \text{ oder } \mathfrak{M} = -\left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \quad \ldots \quad (10)$$

Ferner folgt aus (9)

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\lambda t} \varepsilon\,(-\mathfrak{M} \sin \varepsilon t + \mathfrak{N} \cos \varepsilon t) - \lambda\, e^{-\lambda t} (\mathfrak{M} \cos \varepsilon t + \mathfrak{N} \sin \varepsilon t)$$

folglich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = 0 = \varepsilon\,\mathfrak{N} - \lambda\,\mathfrak{M} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{N} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\,\mathfrak{M} \quad . \; . \; . \; (11)$$

Durch (10) und (11) sind nun die Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bestimmt, die Gleichung (9) gibt demnach

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} - e^{-\lambda t}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(\cos \varepsilon t + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin \varepsilon t\right)$$

oder

$$\varphi = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos \varepsilon t + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin \varepsilon t\right)\right] \quad . \; . \; (12)$$

Hiermit ist φ als Funktion von t berechnet. Aus (12) folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(\frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda t} \sin \varepsilon t$$

Nach jedem Schwung ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, daher ist die Zeit T einer Schwingung

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G}{M\,l} - \left(\frac{b}{2\,M\,l}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

und diese ist nun abermals constant, obgleich wir auf die verschiedenen Nebenkräfte Rücksicht genommen haben. Luftwiderstand, Gewichtsverlust, Aufhängungswiderstand vermögen also die Dauer einer Schwingung nicht variabel zu machen. Dagegen werden die Ausschlagwinkel der aufeinanderfolgenden Schwingungen immer kleiner und kleiner.

Nennen wir $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots.$ die Werthe von φ, welche der Position des Pendels am Ende der ersten, zweiten, dritten Schwingung entsprechen, so ergeben sich diese Werthe, wenn wir in (12) der Reihe nach t gleich $\frac{\pi}{\varepsilon}$, $2\frac{\pi}{\varepsilon}$, $3\frac{\pi}{\varepsilon}$ ..... setzen; daher ist

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
\varphi_2 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 - e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
\varphi_3 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-3\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Nun sind aber

$$\varphi_1,\ \varphi_1 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_4,\ \varphi_5 - \varphi_4 \ldots\ldots$$

die numerischen Werthe der Winkel, welche der ersten, zweiten, dritten .... Schwingung entsprechen. Wegen (14) erhalten wir also

$$\left.\begin{aligned}
&\text{erster Schwung:} \\
&\qquad \varphi_1 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\text{zweiter Schwung:} \\
&\qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\text{dritter Schwung:} \\
&\qquad \varphi_3 - \varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-3\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\text{iter Schwung:} \\
&\qquad \varphi_i - \varphi_{i-1} = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-(i-1)\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

woraus man sieht, dass die Schwingungen immer kleiner und kleiner werden und zuletzt ganz aufhören.

Die Bewegung erlahmt in kurzer Zeit, wenn $\frac{p}{m}$ und $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ grosse Werthe haben, d. h. wenn gross ist:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p}{m} = 2\,a + \frac{2\,c}{G} \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{\frac{b}{4\,M\,l}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G}{M\,l} - \left(\frac{b}{2\,l\,M}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8\,G\,M\,l}{b^2} - 1}} \end{array}\right\} \quad . \quad (16)$$

d. h. wenn a, c, b beträchtliche Werthe haben, wenn also die Nebenhindernisse, Reibung, Luftwiderstand, Gewichtsverlust gross sind.

Wir können nun vermöge (13), (15), (16) folgende Sätze aussprechen:

1) Die Schwingungszeit eines Pendels bleibt constant trotz Reibung, Gewichtsverlust und Luftwiderstand.
2) Die Schwingungszeit wird durch den Gewichtsverlust und die Reibung der Aufhängung nicht verändert, sie wird dagegen durch den Luftwiderstand vergrössert, d. h. die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit nimmt ab.
3) Der Schwungwinkel wird theils wegen Reibung und Gewichtsverlust, insbesondere aber wegen des Luftwiderstandes immer kleiner und kleiner und verschwindet zuletzt.

Diese Sätze sind wir aber nur berechtigt auszusprechen, wenn überhaupt der Ausschlagwinkel klein ist, und wenn der Luftwiderstand der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit proportional gesetzt werden darf.

Pendelschwingung mit Reibung und Luftwiderstand.

Wir wollen noch die Schwingungen eines Pendels unter der Voraussetzung berechnen, dass der Luftwiderstand dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

Für diesen Fall ist die Differenzialgleichung der Bewegung, Fig. 3, Tafel XXV.:

$$l\,\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{G\,\sin\,(\alpha - \varphi) - c - c_1\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dabei ist:

G das Gewicht des Pendelkörpers. l Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt. c eine Constante, welche dem Widerstand der Aufhängung entspricht. c_1 eine Constante für den Luftwiderstand. M die auf den Schwerpunkt des Pendels reducirte Masse desselben.

Setzen wir zur Abkürzung: