Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Pendelschwingungen. Annäherungstheorie

urn:nbn:de:bsz:31-270970

übrigen können nur annähernd durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen beachtet werden. Berücksichtigen wir zunächst nur allein das Gewicht, die Form und die Masse des Pendels, und vernachlässigen die unter 2 bis 5 angeführten Nebenumstände, dann erhalten wir folgende

Annäherungstheorie der Pendelschwingungen.

Es sei, Fig. 2, Tafel XXV., A der Drehungspunkt des Pendels. $A x$ eine durch A gehende Vertikallinie, in welcher der Schwerpunkt des Pendelkörpers liegen wird, wenn dasselbe ruht. Dreht man das Pendel aus seiner Ruhelage bis der Schwerpunkt nach B fällt, und überlässt es dann der Einwirkung der Schwere, so schwingt es gegen die Ruheposition hin und es gelangt der Schwerpunkt nach einiger Zeit nach C. Es sei $\widehat{xAB} = \alpha$, $\widehat{CAB} = \varphi$, $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehungspunkt, t die Zeit, welche verflossen ist, während das Pendel um den Winkel φ gedreht wurde. G das Gewicht des Pendelkörpers in Kilogrammen. M die auf den Schwerpunkt reduzirte Masse des Pendels, d. h. M ist eine ideale Masse, welche statt der wirklichen Masse des Pendels, in den Schwerpunkt concentrirt, ein eben so grosses Trägheitsmoment gibt als das wirkliche Pendel. Die drehende Bewegung des Pendels erfolgt genau so, wie wenn im Schwerpunkt eine Masse M concentrirt wäre, auf welche nach vertikaler Richtung eine Kraft gleich dem Gewicht G einwirkt.

Nun ist $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit, $l \frac{d\varphi}{dt}$ die absolute Geschwindigkeit des Punktes C, $d\left(l \frac{d\varphi}{dt}\right) = l \frac{d^2\varphi}{dt}$ die Aenderung dieser Geschwindigkeit im Zeitelemente dt, daher $\frac{l \frac{d^2\varphi}{dt}}{dt} = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ die Beschleunigung von C, demnach [vermöge Gleichung (3), Prinzipien der Mechanik, Seite 53]:

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{G}{M} \sin(\alpha - \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Gleichung lässt sich zwar einmal integriren, wodurch man $\frac{d\varphi}{dt}$ als Funktion von t erhält, allein die zweite Integration, wodurch φ als Funktion von t erhalten wird, führt auf ein elliptisches Integrale. Für Anwendungen der Pendeltheorie auf Uhren darf man sich erlauben α und folglich auch $\alpha - \varphi$ als einen so kleinen Winkel anzusehen, dass $\sin(\alpha - \varphi)$ gleich $(\alpha - \varphi)$ gesetzt werden darf. Dann aber folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = k(\alpha - \varphi) \text{ wobei } k = \frac{G}{2 l M} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Versuchen wir dieser Gleichung zu genügen durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A} + \mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, λ constante Grössen sind.

Aus (3) folgt

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -\lambda^2 (\mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t)$$

Führt man diese Werthe von φ und $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ in (2) ein, so folgt:

$$-\lambda^2 (\mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t) = k\,\alpha - k(\mathfrak{A} + \mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t)$$

Dieser Gleichung wird identisch entsprochen, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = \alpha \\ \lambda = \sqrt{k} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Integrale von (2) ist demnach:

$$\varphi = \alpha + \mathfrak{M} \sin \sqrt{k}\, t + \mathfrak{N} \cos \sqrt{k}\, t \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nun ist für $t = 0$, $\varphi = 0$, $\frac{d \varphi}{d t} = 0$, daher:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha + \mathfrak{N} \\ \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_{t=0} = 0 = \sqrt{k}\, \mathfrak{M} \end{array}\right\} \text{ demnach } \begin{array}{l} \mathfrak{N} = -\alpha \\ \mathfrak{M} = 0 \end{array}$$

folglich erhalten wir:

$$\varphi = \alpha (1 - \cos \sqrt{k}\, t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für $t = 0$, $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, $\frac{4\pi}{\sqrt{k}}$, ... wird $\varphi = 0$, kehrt also das Pendel in seine anfängliche Position zurück.

Für $t = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, $\frac{3\pi}{\sqrt{k}}$, $\frac{5\pi}{\sqrt{k}}$, ... wird $\varphi = 2\alpha$, erreicht also φ seinen grössten Werth, wobei das Pendel um eben so viel von seiner mittleren Position nach links abweicht, als in der anfänglichen Position nach rechts. Das Pendel schwingt in seiner mittleren Position hin und her und entfernt sich dabei um einen Winkel α von seiner mittleren Stellung. Nennt man T die Zeit eines Schwunges d. h. die Zeit, in welcher das Pendel den Winkel $\varphi = 2\alpha$ zurücklegt, so ist:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k}} = \pi \sqrt{\frac{2 l M}{G}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Zeit ist von dem Ablenkungswinkel oder Schwingungswinkel α unabhängig; wir dürfen also den Satz aussprechen, dass die Schwingungszeit eines Pendels von dem Schwingungswinkel nicht abhängt, in so fern derselbe so klein ist, dass er als unendlich kleine Grösse angesehen werden kann, oder auch: so lange der Schwingungswinkel eine kleine Grösse ist, ist die Schwingungszeit von demselben unabhängig. Die Masse M kann auf folgende Weise ausgedrückt werden. Nennt man $\frac{G}{2g} h^2$ das Trägheitsmoment des Pendelkörpers in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht und deren Richtung jener der wirklichen Drehungsaxe parallel ist, so hat man (vermöge Prinzipien, Seite 118, Nr. 66):

$$M l^2 = \frac{G}{2g} h^2 + \frac{G}{2g} l^2$$

oder

$$M = \frac{G}{2g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Führt man diesen Werth in (7) ein, so findet man

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Genauere Berechnung der Pendelschwingungen mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse etc.

Suchen wir nun das Gesetz der Pendelschwingungen zu erforschen, indem wir 1) nicht nur das Gewicht des Pendels, sondern auch 2) seinen Gewichtsverlust in der Luft, 3) den Luftwiderstand, 4) den Widerstand der Aufhängung berücksichtigen.

Es sei:

$a G$ der constante Gewichtsverlust, welcher gleich ist dem Gewicht einer Luftmenge, deren Volumen gleich ist dem Volumen des Pendels,