Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Gleicharmige Wage

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Nennen wir:
Q das zu bestimmende Gewicht des Körpers F,
S das Gewicht der Wagschale,
P das Laufgewicht,
p das Gewicht des Wagebalkens ohne Schale,
a die Entfernung der Punkte A und C,
b die Entfernung des zwischen C und B liegenden Schwerpunktes des Wagebalkens vom Drehungspunkt C,
x die Entfernung des Laufgewichtes vom Drehungspunkt,
so hat man im Gleichgewichtszustand

$$a (Q + S) = p\, b + P\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Gleichung ist jedoch nur dann richtig, 1) wenn bei C kein Reibungswiderstand vorhanden ist, 2) wenn die Aufhängung der Schale bei A eine vollkommen freie, d. h. eine solche ist, dass die durch diesen Aufhängepunkt gehende Vertikallinie genau durch den Schwerpunkt geht, welcher der Schale und dem darauf liegenden Gewicht entspricht.

Nimmt Q um eine Einheit zu, so muss, um das Gleichgewicht wiederum herzustellen, das Laufgewicht um eine gewisse Länge Δx weiter hinaus geschoben werden, und man hat

$$a (Q + 1 + S) = p\, b + P (x + \Delta x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Differenz von (2) und (1) gibt:

$$a = P \Delta x, \quad \Delta x = \frac{a}{P}$$

Da Δx constant ist, so fallen die Intervalle der Eintheilung auf BC gleich gross aus, und die Eintheilung kann praktisch bestimmt werden, indem man auf die Wagschale nach einander zwei bekannte Gewichte Q_1 und Q_2 legt, jedesmal die Gleichgewichtsposition des Laufgewichtes auf dem Wagebalken bemerkt und den Abstand dieser zwei Positionen in $Q_2 - Q_1$ gleiche Theile theilt und eine von Q_1 bis Q_2 fortgehende Numerirung der Theilstriche anbringt.

Diese Wage ist weder genau noch bequem und wird nur noch selten gebraucht.

Die gleicharmige Wage.

Es sei, Fig. 13, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Wagebalkens, A und D die Anhängepunkte der Wageschalen, E der Schwerpunkt des Wagebalkens. Ist $AB = BD$ und wird auf beide Schalen gleiches Gewicht gelegt, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die Zunge der Wage einspielt, also vertikal steht. Ist jedoch eines der beiden Gewichte, z. B. P_1, etwas grösser als P, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, wobei die Zunge mit der vertikalen Richtung einen gewissen Winkel φ oder sogenannten Ausschlagswinkel bildet. Eine Wage ist empfindlich, wenn bei einer kleinen Differenz von $P_1 - P$ ein merklicher Ausschlagswinkel eintritt.

Wir wollen nun die Grösse dieses Winkels φ berechnen, wollen jedoch der Untersuchung eine Wage mit ganz beliebigen Abmessungen zu Grunde legen, damit wir aus der Theorie erfahren, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um eine richtige Gewichtsbestimmung zu erhalten.

Es seien, Fig. 14, Tafel XXIV., A und A_1 die Aufhängepunkte der Schalen. Wir nehmen an, diese Aufhängung sei eine vollständig freie, d. h. eine solche, dass wenn man durch diese Punkte Vertikallinien zieht, sie durch die Schwerpunkte der angehängten Körper (Schale und Gewicht) gehen. Es sei ferner C der Drehungspunkt des Wagebalkens und E sein Schwerpunkt. Da wir uns so benehmen wollen, wie wenn wir erst durch die Theorie belehrt werden müssten, wie die Wage angeordnet sein soll, so nehmen wir an, dass die Richtung von CE gegen AA_1 irgend einen Winkel $CDA_1 = \beta$ bildet und dass die Längen AD und DA_1 nicht gleich gross, sondern dass die erstere a, die letztere a_1 sei. Die Zungenrichtung CG wird möglicher Weise gegen CE einen Winkel bilden. Wir setzen $\widehat{HCG} = \gamma$, ferner $CD = b$, $CE = c$. Das Gewicht der Schale mit den Anhängeketten oder Schnüren wird auch ungleich sein können, wir nennen dieselben S und S_1 und das Gewicht des Hebels p und fragen nun wie gross der Ausschlagwinkel ψ sein wird, wenn auf die eine Schale ein Körper gelegt wird, dessen wahres Gewicht P und auf die andere Schale ein Gewicht P_1 gelegt wird, das von P verschieden ist.

Wie Fig. 14, Tafel XXIV. zeigt, sind $\overline{CB}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{CL}$ die Längen der Perpendikel, welche vom Drehungspunkt aus auf die vertikalen Richtungen der Kräfte $S + P$, $S_1 + P_1$, p gefällt werden können, und es ist:

$$\overline{CB} = a \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

oder:

$$\overline{CB} = a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

Die Gleichgewichtsgleichung ist demnach:

$$(S_1 + P_1)\,[a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)] = (S + P)\,[a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)] + p\,c \sin(\psi - \gamma)$$

oder

$$(S_1 + P_1)\,[a_1 \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a_1 \cos(\psi - \gamma) \sin\beta - b \sin(\psi - \gamma)] =$$
$$(S + P)\,[a \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a \cos(\psi - \gamma) \sin\beta + b \sin(\psi - \gamma)] + p\,c \sin(\psi - \gamma)$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\cos(\psi - \gamma)$ und sucht hierauf $\tan(\psi - \gamma)$, so findet man:

$$\tan(\psi - \gamma) = \frac{(P_1 a_1 - P a) + (S_1 a_1 - S a)}{(S + S_1 + P + P_1) b + p c - \cos\beta\,(P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a)} \sin\beta \quad (1)$$

oder

$$\tan(\psi - \gamma) = \sin\beta \frac{1}{\dfrac{(S + S_1 + P + P_1)\,b + p\,c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta} \quad . \ (2)$$

oder

$$\cot(\psi - \gamma) = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{(S + S_1 + P + P_1)\,b + p\,c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta\right] \quad (3)$$

Der Winkel γ ist bei jeder Wage äusserst klein, denn er ist ja nur ein kleiner Fehler der Construktion oder Ausführung, und ψ ist der sehr kleine Ausschlagwinkel, wenn P_1 sehr wenig von P verschieden ist. Wir dürfen daher setzen:

$$\tan(\psi - \gamma) = \psi - \gamma, \quad \cot(\psi - \gamma) = \frac{1}{\psi - \gamma}$$

und erhalten demnach

$$\frac{1}{\psi - \gamma} = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{(S + S_1 + P + P_1)\,b + p\,c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta\right] \quad . \ . \ (4)$$

Die Wagen werden immer so adjustirt, dass die Zunge einspielt, wenn die Schalen unbelastet sind.

Für eine in solcher Weise adjustirte Wage ist demnach für $P = P_1 = 0, \ \psi = 0$, daher:

$$\frac{1}{-\gamma} = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{(S + S_1)\,b + p\,c}{S_1\,a_1 - S\,a} - \cos\beta\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Durch Elimination von γ aus (4) und (5) folgt:

$$\psi = \sin\beta\left[\frac{P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)} - \frac{S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1) + p\,c - \cos\beta\,(S_1\,a_1 - S\,a)}\right]$$

oder wenn man die Brüche auf gleiche Nenner bringt:

$$\psi = \sin\beta\,\frac{(P_1\,a_1 - P\,a)\,[b\,(S + S_1) + p\,c] - (S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1)}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(P + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)] \\ \times\,[b\,(S + S_1) + p\,c - \cos\beta\,(S_1\,a_1 - S\,a)]\end{array}\right\}} \quad (6)$$

oder auch:

$$\psi = \sin\beta\,\frac{(P_1 - P)\,a + P_1\,(a_1 - a) - \dfrac{(S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1)}{b\,(S + S_1) + p\,c}}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)] \\ \times\left[1 - \cos\beta\,\dfrac{S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1) + p\,c}\right]\end{array}\right\}} \quad (7)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes lernen wir nun die Bedingungen der Empfindlichkeit einer gleicharmigen Wage kennen. Wir haben hierbei unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise nur auf das Glied $(P_1 - P)\,a$ des Zählers und auf die Glieder $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c$ des Nenners zu richten, denn die übrigen Glieder haben bei jeder wirklichen Wage verschwindend kleine Werthe. Es sind nämlich bei jeder nur einigermassen genauen Wage 1) die Arme a und a_1 beinahe gleich gross, 2) die Gewichte der Wagschalen gleich gross, 3) ist ferner der Winkel β beinahe $= 90°$, also $\cos\beta$ beinahe $= 0$. Wenn wir nur allein die Glieder $(P_1 - P)\,a$ und $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c$ berücksichtigen, so ergeben sich aus (7) nachstehende Folgerungen: ψ fällt gross aus, d. h. die Wage wird empfindlich,

1) wenn a gross ist, d. h. wenn die Arme lang sind,
2) wenn b und c klein sind, d. h. wenn die Entfernung des Drehpunktes c von der Armlinie $A\,A_1$ klein ist und wenn ferner der

Schwerpunkt des Wagebalkens nur wenig unter seinem Drehungspunkt liegt,

3) wenn die Schalengewichte S und S_1 klein sind, also leichte Schalen genommen werden,

4) wenn das zu bestimmende Gewicht nicht zu gross ist,

5) wenn p klein ist, d. h. wenn der Wagebalken ein geringes Gewicht hat.

Durch die Gewichte $P + S$, $P_1 + S_1$ kann der Wagebalken, wenn er zu leicht gebaut wird, leicht etwas deformirt werden, was zur Folge hat, dass sich die Armlängen a und a_1 ändern und dass b wie c grösser wird, wodurch die Verlässlichkeit und Empfindlichkeit der Wage leidet. Es soll daher der Wagebalken nicht nur leicht, sondern gleichzeitig auch sehr fest gebaut werden.

Die empfindlichen Wagen der chemischen und physikalischen Laboratorien entsprechen den so eben aufgefundenen Bedingungen sehr wohl.

Vermittelst der Gleichung (6) können wir einen praktisch sehr wichtigen Satz nachweisen, dass mit einer Wage, welche den Bedingungen der Empfindlichkeit entspricht, eine genaue Gewichtsbestimmung auch dann möglich ist, wenn a nicht gleich a_1, S nicht gleich S_1, γ nicht Null und β nicht 90° ist. Diese richtige Bestimmung geschieht durch zweimaliges Abwiegen auf folgende Weise.

Man bringt den Körper, dessen Gewicht P bestimmt werden soll, auf die Schale A und legt auf die andere Schale A_1 Gewichte P_1 auf, bis die Wage einspielt, d. h. bis $\psi = 0$ ist. Hierauf legt man den Körper auf A_1 und auf die Schale A so viele Gewichte P_2, bis die Wage wiederum einspielt.

Die Bedingungen dieser zwei Gleichgewichtszustände erhalten wir aus (6), wenn wir den Zähler gleich Null setzen, hierauf P_1 mit P und P mit P_2 vertauschen und dann den Zähler nochmals $= 0$ setzen. Diese Bedingungen sind demnach:

$$(P_1\,a_1 - P\,a)\,[b\,(S + S_1) + p\,c] - (S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1) = 0$$

$$(P\,a_1 - P_2\,a)\,[b\,(S + S_1) + p\,c] - (S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P_2 + P) = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P_1\,a_1 - P\,a}{P\,a_1 - P_2\,a} = \frac{P + P_1}{P + P_2}$$

und dieser Ausdruck gibt:

$$P = \sqrt{P_1\,P_2}$$

Das wahre Gewicht ist also die Quadratwurzel aus dem Prodrukt der Gewichte, die durch das zweimalige Abwägen gefunden wurden und es ist in der That interessant, dass diese Regel auch dann zur Wahrheit führt, wenn die Wage gar nicht adjustirt ist, d. h. wenn $a \gtrless a_1$, $S \gtrless S_1$, $\gamma \lessgtr 0$, $\beta \gtrless \frac{\pi}{2}$.

Die nach den aufgefundenen Regeln angeordneten und sorgfältig ausgeführten gleicharmigen Wagen geben die genauesten Gewichtsbestimmungen. Auch sind diese Wagen bequem zu gebrauchen, wenn überhaupt nur leichte oder doch nicht schwere Körper abgewogen werden sollen. Zum Abwägen von schweren Körpern sind sie jedoch nicht bequem, theils wegen der vielen zum Abwägen erforderlichen Gewichte, theils auch, weil es umständlich und unbequem ist, die Gegenstände auf die an Ketten hängenden Wagschalen zu bringen. Für kaufmännische Zwecke wird deshalb die sogenannte Dezimalwage gebraucht.

Erste Dezimalwage.

Fig. 15, Tafel XXIV., stellt eine solche Dezimalwage vor, mit Hinweglassung der constructiven Details. Das Gestell der Wage besteht aus einem dreieckigen Rahmen, der bei M breit, bei L schmal ist und einem vertikalen Brette N L, welches oben das Lager für den Wagbalken trägt. F H ist ein dreieckiger Hebel, der bei H mit Schneiden versehen ist und damit auf Metallplatten aufliegt, bei F aber vermittelst einer Stange F D an den Wagbalken A D gehängt ist. E J ist ein zweites Hebelwerk, das bei G mit Schneiden auf dem ersten Hebelwerk F H aufliegt, es ist mit Bedielung J K versehen, auf welche die abzuwägenden Gegenstände gestellt werden, und vermittelst einer Stange E C an den Wagebalken A D. gehängt. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustand einspielt, d. h. dass die Hebel A D, E J, F H horizontal schweben. Das Abwägen geschieht, indem man den Körper auf die Bedielung bringt und in die Schale Gewichte legt, bis die Wage wiederum einspielt.

Nennen wir Q das Gewicht des Körpers, P das Gewicht, das auf die Wagschale gelegt werden muss, um dem Gewicht des Körpers das Gleichgewicht zu halten, und setzen $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{GH} = a_1$, $\overline{HF} = b_1$, $\overline{AB} = c$, Q_1 die aus dem Gewicht Q entstehende Pressung der Schneide bei G, Q_2 den Zug bei E, so ist, welche Lage auch der Körper haben mag:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$