Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Wagen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

SECHSTER ABSCHNITT.

Messinstrumente.

Die Messinstrumente können eingetheilt werden in geometrische und in mechanistische.

Zu den ersteren gehören die Winkel-, Längen-, Flächen-, Körpermessinstrumente. Ihre Theorie gehört in das Gebiet der praktischen Geometrie. Zu den letzteren gehören die Instrumente zur Bestimmung

a) der Gewichte der Körper, Wagen;
b) der Kräfte, Dynamometer, Manometer;
c) der Zeit, Uhren.

Die Theorie dieser mechanistischen Instrumente gehört in das Gebiet der Mechanik, daher wir uns mit einigen derselben befassen wollen.

Theorie der Wagen.

Die Schnellwage, Römische Wage, Krämerwage.

Fig. 12, Tafel XXIV. ABC ist ein Hebel mit einem kurzen Arm AC und einem langen Arm CB. Er dreht sich bei C um eine Schneide, die in einem Gehänge aufliegt und ist bei A mit einer Wagschale versehen, in welche der Körper F gelegt wird, dessen Gewicht bestimmt werden soll. Auf CB ist eine Eintheilung angebracht. Das Abwägen des Körpers geschieht, indem ein Laufgewicht D längs der Eintheilung von CB hinausgeschoben wird, bis es an einen Ort kommt, wo es dem Gewicht des auf die Wagschale gelegten Körpers das Gleichgewicht hält. Diese Position des Laufgewichtes soll dann auf der Skala das Gewicht angeben.

Nennen wir:
Q das zu bestimmende Gewicht des Körpers F,
S das Gewicht der Wagschale,
P das Laufgewicht,
p das Gewicht des Wagebalkens ohne Schale,
a die Entfernung der Punkte A und C,
b die Entfernung des zwischen C und B liegenden Schwerpunktes des Wagebalkens vom Drehungspunkt C,
x die Entfernung des Laufgewichtes vom Drehungspunkt,
so hat man im Gleichgewichtszustand

$$a(Q + S) = p\,b + P\,x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung ist jedoch nur dann richtig, 1) wenn bei C kein Reibungswiderstand vorhanden ist, 2) wenn die Aufhängung der Schale bei A eine vollkommen freie, d. h. eine solche ist, dass die durch diesen Aufhängepunkt gehende Vertikallinie genau durch den Schwerpunkt geht, welcher der Schale und dem darauf liegenden Gewicht entspricht.

Nimmt Q um eine Einheit zu, so muss, um das Gleichgewicht wiederum herzustellen, das Laufgewicht um eine gewisse Länge Δx weiter hinaus geschoben werden, und man hat

$$a(Q + 1 + S) = p\,b + P(x + \Delta x) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Differenz von (2) und (1) gibt:

$$a = P\,\Delta x, \quad \Delta x = \frac{a}{P}$$

Da Δx constant ist, so fallen die Intervalle der Eintheilung auf BC gleich gross aus, und die Eintheilung kann praktisch bestimmt werden, indem man auf die Wagschale nach einander zwei bekannte Gewichte Q_1 und Q_2 legt, jedesmal die Gleichgewichtsposition des Laufgewichtes auf dem Wagebalken bemerkt und den Abstand dieser zwei Positionen in $Q_2 - Q_1$ gleiche Theile theilt und eine von Q_1 bis Q_2 fortgehende Numerirung der Theilstriche anbringt.

Diese Wage ist weder genau noch bequem und wird nur noch selten gebraucht.

Die gleicharmige Wage.

Es sei, Fig. 13, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Wagebalkens, A und D die Anhängepunkte der Wageschalen, E der Schwerpunkt des Wagebalkens. Ist A B = B D und wird auf beide Schalen gleiches Gewicht gelegt, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die Zunge der Wage einspielt, also vertikal steht. Ist jedoch eines der beiden Gewichte, z. B. P_1, etwas grösser als P, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, wobei die Zunge mit der vertikalen Richtung einen gewissen Winkel φ oder sogenannten Ausschlagswinkel bildet. Eine Wage ist empfindlich, wenn bei einer kleinen Differenz von $P_1 - P$ ein merklicher Ausschlagswinkel eintritt.

Wir wollen nun die Grösse dieses Winkels φ berechnen, wollen jedoch der Untersuchung eine Wage mit ganz beliebigen Abmessungen zu Grunde legen, damit wir aus der Theorie erfahren, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um eine richtige Gewichtsbestimmung zu erhalten.

Es seien, Fig. 14, Tafel XXIV., A und A_1 die Aufhängepunkte der Schalen. Wir nehmen an, diese Aufhängung sei eine vollständig freie, d. h. eine solche, dass wenn man durch diese Punkte Vertikallinien zieht, sie durch die Schwerpunkte der angehängten Körper (Schale und Gewicht) gehen. Es sei ferner C der Drehungspunkt des Wagebalkens und E sein Schwerpunkt. Da wir uns so benehmen wollen, wie wenn wir erst durch die Theorie belehrt werden müssten, wie die Wage angeordnet sein soll, so nehmen wir an, dass die Richtung von C E gegen $A A_1$ irgend einen Winkel $C D A_1 = \beta$ bildet und dass die Längen A D und $D A_1$ nicht gleich gross, sondern dass die erstere a, die letztere a_1 sei. Die Zungenrichtung C G wird möglicher Weise gegen C E einen Winkel bilden. Wir setzen $\widehat{HCG} = \gamma$, ferner $CD = b$, $CE = c$. Das Gewicht der Schale mit den Anhängeketten oder Schnüren wird auch ungleich sein können, wir nennen dieselben S und S_1 und das Gewicht des Hebels p und fragen nun wie gross der Ausschlagwinkel ψ sein wird, wenn auf die eine Schale ein Körper gelegt wird, dessen wahres Gewicht P und auf die andere Schale ein Gewicht P_1 gelegt wird, das von P verschieden ist.

Wie Fig. 14, Tafel XXIV. zeigt, sind $\overline{CB}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{CL}$ die Längen der Perpendikel, welche vom Drehungspunkt aus auf die vertikalen Richtungen der Kräfte $S + P$, $S_1 + P_1$, p gefällt werden können, und es ist:

$$\overline{CB} = a \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

oder:

$$\overline{CB} = a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

Die Gleichgewichtsgleichung ist demnach:

$$(S_1 + P_1)\,[a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)] = (S + P)\,[a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)] + p\,c \sin(\psi - \gamma)$$

oder

$$(S_1 + P_1)\,[a_1 \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a_1 \cos(\psi - \gamma) \sin\beta - b \sin(\psi - \gamma)] =$$
$$(S + P)\,[a \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a \cos(\psi - \gamma) \sin\beta + b \sin(\psi - \gamma)] + p\,c \sin(\psi - \gamma)$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\cos(\psi - \gamma)$ und sucht hierauf $\operatorname{tang}(\psi - \gamma)$, so findet man:

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \frac{(P_1 a_1 - P a) + (S_1 a_1 - S a)}{(S + S_1 + P + P_1) b + p c - \cos\beta\,(P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a)} \sin\beta \quad (1)$$

oder

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \sin\beta \, \frac{1}{\dfrac{(S + S_1 + P + P_1)\, b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta} \quad . \; (2)$$

oder

$$\operatorname{cotg}(\psi - \gamma) = \frac{1}{\sin\beta} \left[\frac{(S + S_1 + P + P_1)\, b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta \right] \quad (3)$$

Der Winkel γ ist bei jeder Wage äusserst klein, denn er ist ja nur ein kleiner Fehler der Construktion oder Ausführung, und ψ ist der sehr kleine Ausschlagwinkel, wenn P_1 sehr wenig von P verschieden ist. Wir dürfen daher setzen:

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \psi - \gamma, \quad \operatorname{cotg}(\psi - \gamma) = \frac{1}{\psi - \gamma}$$

und erhalten demnach

$$\frac{1}{\psi - \gamma} = \frac{1}{\sin\beta} \left[\frac{(S + S_1 + P + P_1)\, b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta \right] \quad . \; . \; (4)$$

Die Wagen werden immer so adjustirt, dass die Zunge einspielt, wenn die Schalen unbelastet sind.

Für eine in solcher Weise adjustirte Wage ist demnach für $P = P_1 = 0$, $\psi = 0$, daher:

$$\frac{1}{-\gamma} = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{(S + S_1)\,b + p\,c}{S_1\,a_1 - S\,a} - \cos\beta\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Durch Elimination von γ aus (4) und (5) folgt:

$$\psi = \sin\beta\left[\frac{P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)} - \frac{S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1) + p\,c - \cos\beta\,(S_1\,a_1 - S\,a)}\right]$$

oder wenn man die Brüche auf gleiche Nenner bringt:

$$\psi = \sin\beta\,\frac{(P_1\,a_1 - P\,a)\,[b\,(S + S_1) + p\,c] - (S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1)}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(P + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)] \\ \times\,[b\,(S + S_1) + p\,c - \cos\beta\,(S_1\,a_1 - S\,a)]\end{array}\right\}} \quad (6)$$

oder auch:

$$\psi = \sin\beta\,\frac{(P_1 - P)\,a + P_1\,(a_1 - a) - \dfrac{(S_1\,a_1 - S\,a)\,b\,(P + P_1)}{b\,(S + S_1) + p\,c}}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c - \cos\beta\,(P_1\,a_1 - P\,a + S_1\,a_1 - S\,a)] \\ \times\left[1 - \cos\beta\,\dfrac{S_1\,a_1 - S\,a}{b\,(S + S_1) + p\,c}\right]\end{array}\right\}} \quad (7)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes lernen wir nun die Bedingungen der Empfindlichkeit einer gleicharmigen Wage kennen. Wir haben hierbei unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise nur auf das Glied $(P_1 - P)\,a$ des Zählers und auf die Glieder $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c$ des Nenners zu richten, denn die übrigen Glieder haben bei jeder wirklichen Wage verschwindend kleine Werthe. Es sind nämlich bei jeder nur einigermassen genauen Wage 1) die Arme a und a_1 beinahe gleich gross, 2) die Gewichte der Wagschalen gleich gross, 3) ist ferner der Winkel β beinahe $= 90°$, also $\cos\beta$ beinahe $= 0$. Wenn wir nur allein die Glieder $(P_1 - P)\,a$ und $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\,c$ berücksichtigen, so ergeben sich aus (7) nachstehende Folgerungen: ψ fällt gross aus, d. h. die Wage wird empfindlich,

1) wenn a gross ist, d. h. wenn die Arme lang sind,
2) wenn b und c klein sind, d. h. wenn die Entfernung des Drehpunktes c von der Armlinie $A\,A_1$ klein ist und wenn ferner der

Schwerpunkt des Wagebalkens nur wenig unter seinem Drehungspunkt liegt,

3) wenn die Schalengewichte s und s_1 klein sind, also leichte Schalen genommen werden,
4) wenn das zu bestimmende Gewicht nicht zu gross ist,
5) wenn p klein ist, d. h. wenn der Wagebalken ein geringes Gewicht hat.

Durch die Gewichte $P + S$, $P_1 + S_1$ kann der Wagebalken, wenn er zu leicht gebaut wird, leicht etwas deformirt werden, was zur Folge hat, dass sich die Armlängen a und a_1 ändern und dass b wie c grösser wird, wodurch die Verlässlichkeit und Empfindlichkeit der Wage leidet. Es soll daher der Wagebalken nicht nur leicht, sondern gleichzeitig auch sehr fest gebaut werden.

Die empfindlichen Wagen der chemischen und physikalischen Laboratorien entsprechen den so eben aufgefundenen Bedingungen sehr wohl.

Vermittelst der Gleichung (6) können wir einen praktisch sehr wichtigen Satz nachweisen, dass mit einer Wage, welche den Bedingungen der Empfindlichkeit entspricht, eine genaue Gewichtsbestimmung auch dann möglich ist, wenn a nicht gleich a_1, S nicht gleich S_1, γ nicht Null und β nicht 90° ist. Diese richtige Bestimmung geschieht durch zweimaliges Abwiegen auf folgende Weise.

Man bringt den Körper, dessen Gewicht P bestimmt werden soll, auf die Schale A und legt auf die andere Schale A_1 Gewichte P_1 auf, bis die Wage einspielt, d. h. bis $\psi = 0$ ist. Hierauf legt man den Körper auf A_1 und auf die Schale A so viele Gewichte P_2, bis die Wage wiederum einspielt.

Die Bedingungen dieser zwei Gleichgewichtszustände erhalten wir aus (6), wenn wir den Zähler gleich Null setzen, hierauf P_1 mit P und P mit P_2 vertauschen und dann den Zähler nochmals $= 0$ setzen. Diese Bedingungen sind demnach:

$$(P_1 a_1 - P a) [b (S + S_1) + p c] - (S_1 a_1 - S a) b (P + P_1) = 0$$

$$(P a_1 - P_2 a) [b (S + S_1) + p c] - (S_1 a_1 - S a) b (P_2 + P) = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P_1 a_1 - P a}{P a_1 - P_2 a} = \frac{P + P_1}{P + P_2}$$

und dieser Ausdruck gibt:

$$P = \sqrt{P_1 P_2}$$

Das wahre Gewicht ist also die Quadratwurzel aus dem Prodrukt der Gewichte, die durch das zweimalige Abwägen gefunden wurden und es ist in der That interessant, dass diese Regel auch dann zur Wahrheit führt, wenn die Wage gar nicht adjustirt ist, d. h. wenn $a \gtrless a_1$, $S \gtrless S_1$, $\gamma \lessgtr 0$, $\beta \gtrless \frac{\pi}{2}$.

Die nach den aufgefundenen Regeln angeordneten und sorgfältig ausgeführten gleicharmigen Wagen geben die genauesten Gewichtsbestimmungen. Auch sind diese Wagen bequem zu gebrauchen, wenn überhaupt nur leichte oder doch nicht schwere Körper abgewogen werden sollen. Zum Abwägen von schweren Körpern sind sie jedoch nicht bequem, theils wegen der vielen zum Abwägen erforderlichen Gewichte, theils auch, weil es umständlich und unbequem ist, die Gegenstände auf die an Ketten hängenden Wagschalen zu bringen. Für kaufmännische Zwecke wird deshalb die sogenannte Dezimalwage gebraucht.

Erste Dezimalwage.

Fig. 15, Tafel XXIV., stellt eine solche Dezimalwage vor, mit Hinweglassung der construktiven Details. Das Gestell der Wage besteht aus einem dreieckigen Rahmen, der bei M breit, bei L schmal ist und einem vertikalen Brette N L, welches oben das Lager für den Wagbalken trägt. F H ist ein dreieckiger Hebel, der bei H mit Schneiden versehen ist und damit auf Metallplatten aufliegt, bei F aber vermittelst einer Stange F D an den Wagbalken A D gehängt ist. E J ist ein zweites Hebelwerk, das bei G mit Schneiden auf dem ersten Hebelwerk F H aufliegt, es ist mit Bedielung J K versehen, auf welche die abzuwägenden Gegenstände gestellt werden, und vermittelst einer Stange E C an den Wagebalken A D gehängt. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustand einspielt, d. h. dass die Hebel A D, E J, F H horizontal schweben. Das Abwägen geschieht, indem man den Körper auf die Bedielung bringt und in die Schale Gewichte legt, bis die Wage wiederum einspielt.

Nennen wir Q das Gewicht des Körpers, P das Gewicht, das auf die Wagschale gelegt werden muss, um dem Gewicht des Körpers das Gleichgewicht zu halten, und setzen $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{GH} = a_1$, $\overline{HF} = b_1$, $\overline{AB} = c$, Q_1 die aus dem Gewicht Q entstehende Pressung der Schneide bei G, Q_2 den Zug bei E, so ist, welche Lage auch der Körper haben mag:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Für das Gleichgewicht zwischen Q und P ist aber auch

$$P c = Q_1 \frac{a_1}{b_1} b + Q_2 a$$

oder wegen (1)

$$P c = Q_1 \frac{a_1}{b_1} b + (Q - Q_1) a$$

oder auch

$$P c = Q_1 \left(\frac{a_1}{b_1} b - a\right) + Q a$$

Damit nun stets das gleiche Gewicht gefunden wird, wo man auch den Körper hinlegen mag, muss offenbar $\frac{a_1}{b_1} b - a = 0$ oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ sein, und dann wird:

$$P = Q \frac{a}{c}$$

Richtet man also die Hebelarme so ein, dass $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ und dass $\frac{a}{c} = \frac{1}{10}$ ist, so wird $P = \frac{Q}{10}$, d. h. das Gewicht des Körpers ist dann zehnmal so gross, als das auf die Wagschale gelegte Gewicht.

Die Bedingung $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ drückt nichts anderes aus, als dass die Ebene der Bedielung stets eine horizontale bleiben soll, wenn die Wagschale auf und nieder schwankt, d. h. der Mechanismus ist ein Parallelmechanismus.

Zweite Dezimalwage.

Auf dieser Grundeigenschaft beruht auch folgende Dezimalwage. Fig. 16, Tafel XXIV. ABC, $A_1 B_1 C_1$ sind zwei steife Winkelhebel, der erstere ist durch zwei Stängelchen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ mit dem letzteren zusammen gegliedert, so dass AB gegen DE parallel bleiben muss. FGH ist ein Wagebalken, der bei G seinen Drehungspunkt hat, bei H mit einer Wageschale verbunden ist und an welchen bei F der Winkelhebel ABC gehängt wird. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustande einspielt. Der abzuwägende Körper wird auf BC gelegt und das Abwägen geschieht, indem man ein Gewicht P auf die Wagschale legt, bis die Wage einspielt.

Setzt man $GH = c$, $GF = a$ und macht $\frac{c}{a} = 10$, so ist für das Gleichgewicht

$$P c = Q a, \quad \frac{P}{Q} = \frac{a}{c} = \frac{1}{10}$$

Brückenwagen für schwere Lasten.

Diese Wagen dienen vorzugsweise zur Gewichtsbestimmung von beladenen Lastwagen, und ist das Gewicht in der Schale in der Regel $=\frac{1}{100}$ von dem Gewicht der Last.

Die Zeigerwage und die Garnwage.

Die Zeigerwage ist in der Weise eingerichtet, dass sie durch die Stellung eines Zeigers das Gewicht eines Körpers angibt. Sie wird theils zur Abwägung der Briefgewichte, insbesondere aber in den Baumwollspinnereien zum Sortiren der Garne gebraucht. Wir wollen uns mit der Theorie dieser Garnwage beschäftigen. Aus dem gesponnenen Garne werden sogenannte Strehne gebildet, von denen jeder nach der französischen Garnnummerirung eine Fadenlänge von 1000 Meter enthält. Die Feinheit des Garns wird gemessen, indem man die Anzahl der Strehne angibt die zusammen $\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegen. Nennt man also allgemein n die Feinheits-Nummer eines Garnes, q das Gewicht eines Strehnes in Kilogrammen von 1000 Meter Fadenlänge, so ist

$$q = \frac{1}{2\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und es ist auch n die Anzahl der Strehne, die zusammen $\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegen.

Diese Garnwage besteht aus einem um eine horizontale Axe möglichst beweglichen Winkelhebel, dessen Schwerpunkt nicht in der Drehungsaxe liegt. Einer der Arme ist mit einem Zeiger versehen, der auf eine eingetheilte Bogenskala zeigt, das Ende des Armes ist mit einem leichten Häkchen versehen, an welches der Strehn gehängt wird, dessen Nummer bestimmt werden soll. Wird ein Strehn angehängt, so nimmt der Winkelhebel eine Stellung an, bei welcher das Gewicht des Strehnes mit dem Gewichte des Winkelhebels im Gleichgewicht ist, der Zeiger weist dann auf eine bestimmte Stelle der Bogentheilung, und wenn diese in angemessener Weise angeordnet ist, so wird durch die Stellung des Zeigers das Gewicht des Strehnes angegeben.

Es sei, Fig. 17, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Winkelhebels, B der Anhängepunkt des Strehnes, A der Schwerpunkt des Winkelhebels,

p das Gewicht des Winkelhebels in Kilogrammen,

$q = \frac{1}{2\,n}$ das Gewicht des Strehnes von Nummer n,

$\alpha = \widehat{A\,C\,B}$ der Winkel, den die Verbindungslinie des Drehungspunktes C mit dem Schwerpunkt A und mit dem Aufhängepunkt B zusammen bilden,

φ der Winkel, welchen der Zeigerarm $A\,C$ mit einer durch C gezogenen Horizontallinie bildet, wenn der Strehn mit dem Gewicht des Armes im Gleichgewicht ist,

$\left.\begin{matrix} C\,A = a \\ C\,B = b \end{matrix}\right\}$ die Entfernungen der Punkte A und B von C,

so ist die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes:

$$p\;a\;\cos\varphi = q\;b\;\cos\left[\pi - (\alpha + \varphi)\right]$$

oder

$$p\;a\;\cos\varphi = -\,b\;q\;\cos(\alpha + \varphi) = b\;q\;(\sin\alpha\,\sin\varphi - \cos\alpha\,\cos\varphi)$$

hieraus folgt:

$$\text{tang}\,\varphi = \text{cotg}\,\alpha + \frac{p\,a}{b\,q\,\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

oder wenn man q durch n ausdrückt:

$$\text{tang}\,\varphi = \text{cotg}\,\alpha + 2\,\frac{p\,a}{b}\,\frac{n}{\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Diese Gleichung bestimmt die Gleichgewichtslage des Winkelhebels. Hängt man an die Wage statt des Strehnes von Nr. n einen leichteren Strehn von Nr. $n+1$, so tritt nun eine Gleichgewichtslage ein, in welcher der Zeiger $A\,C$ mit der horizontalen Richtung einen Winkel φ_1 bildet. Zur Bestimmung dieses Winkels erhält man aus (3), wenn man in derselben $n+1$ statt n, und φ_1 statt φ setzt, folgenden Ausdruck:

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \text{cotg}\,\alpha + \frac{2\,p\,a}{b\,\sin\alpha}\,(n+1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Die Differenz der Gleichungen (4) und (3) gibt:

$$\text{tang}\,\varphi_1 - \text{tang}\,\varphi = \frac{2\,p\,a}{b\,\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

Da für eine bestimmte Anordnung $\frac{2\,p\,a}{b\,\sin\alpha}$ eine constante Grösse ist, so folgt aus Gleichung (5), dass für jede Aenderung der Garnnummer um eine Einheit die Aenderung der trigonometrischen Tangente des Winkels φ constant ist.

Hieraus ergibt sich für die Construktion der Bogeneintheilung folgendes Verfahren. Fig. 18, Tafel XXIV.

Man verfertige eine solche Zeigerwage, indem man eine bereits existirende aus einer Spinnerei als Muster nimmt. Stelle die Wage auf, lege an den Bogen ein Lineal an, so dass seine Kante vertikal steht. Hänge einen schweren Strehn an, dessen Gewicht und Nummer bereits durch eine andere empfindliche Wage bestimmt worden ist (n_1 sei die Nr. dieses Strehnes), beobachte die Gleichgewichtsstellung $c\,A_1$ des Zeigers, verlängere die Richtung $c\,A_1$ bis an die Linealkante und bemerke sich den Punkt a_1. Hierauf hänge man statt des schweren Strehnes einen bedeutend leichteren von Nr. n_2 an, bemerke die Gleichgewichtsposition $c\,A_2$ des Zeigers, verlängere $c\,A_2$ bis an die Kante des Lineals und bemerke den Punkt a_2. Hierauf theile man den Abstand $a_2\,a_1$ in $n_2 - n_1$ gleiche Theile, ziehe aus den Theilungspunkten Radien nach c und bemerke die Stellen, wo diese Radien den Kreisbogen schneiden durch Striche, so hat man eine richtige Bogeneintheilung, d. h. eine solche Eintheilung, bei welcher die Aenderungen der trigonometrischen Tangenten des Winkels φ für jede Aenderung der Garnnummer um eine Einheit gleich gross sind, wie es die entwickelte Theorie verlangt.

Aber gleichwohl wird eine auf diese Weise angefertigte Garnwage sehr ungenaue Gewichtsbestimmungen geben, wenn nicht der Winkelhebel gewissen Bedingungen entspricht. Angenommen, n_1 sei die niedrigste, n_2 die höchste Garnnummer, die durch die Wage bestimmt werden soll, dann können die Winkel β_1 und β_2, welche diesen Nummern entsprechen, entweder sehr klein oder sehr gross ausfallen, je nachdem der Winkelhebel beschaffen ist, und beides ist für die Genauigkeit der Gewichtsbestimmungen nachtheilig. Fallen beide Winkel klein aus, so erhält überhaupt die ganze Bogentheilung eine geringe Ausdehnung, fallen daher sämmtliche Intervalle der Eintheilung sehr klein aus, wird daher der geringste Grad von Schwerbeweglichkeit des Wagebalkens zur Folge haben, dass man sich um mehrere Nummern irrt. Fallen dagegen beide Winkel (β_1 und β_2) sehr gross aus, so würden zwar die Intervalle auf der Tangententheilung alle sehr gross ausfallen, würden aber gleichwohl die äussersten Intervalle der Bogentheilung sehr klein, so dass mit einer solchen Wage wohl die mittleren Garnnummern genau, die niedrigsten und höheren dagegen nur ungenau bestimmt werden können. Es ist hieraus zu ersehen, dass eine solche Garnwage dann die grösste Genauigkeit geben wird, wenn der Winkelhebel so angeordnet wird, dass das erste und das letzte Intervall der Bogeneintheilung möglichst gross ausfällt. Unter welchen Umständen dies der Fall ist, wollen wir nun ausfindig zu machen suchen.

Nennt man:

e das constante Intervall der Tangenteneintheilung,

μ diejenige Garnnummer, welche der Horizontalstellung des Zeigers entspricht,

n_2 die höchste, n_1 die niedrigste von den Garnnummern, die durch die Wage zu bestimmen sind,

β_2, β_1 die Winkel des Zeigers gegen den Horizont, welche den Nummern n_2 und n_1 entsprechen,

$\beta_2 - \varDelta\beta_2$, $\beta_1 - \varDelta\beta_1$ die Winkel des Zeigers gegen den Horizont, welche den Nummern $n_2 - 1$, $n_1 + 1$ entsprechen,

so ist zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\beta_2 &= e\,(n_2 - \mu) \\ \operatorname{tang}(\beta_2 - \varDelta\beta_2) &= e\,(n_2 - \mu - 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta_2 - \varDelta\beta_2)}{\operatorname{tang}\beta_2} = \frac{n_2 - \mu - 1}{n_2 - \mu} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{n_2 - \mu - 1}{n_2 - \mu} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta_2 - \varDelta\beta_2)}{\operatorname{tang}\beta_2} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Nun entspricht $\varDelta\beta_2$ dem untersten Intervall der Bogeneintheilung, welches Intervall nach der oben gegebenen Erklärung möglichst gross ausfallen soll; wir müssen demnach β_2 selbst so zu bestimmen suchen, dass $\varDelta\beta_2$ ein Maximum wird. Diesen vortheilhaftesten Werth von β_2 finden wir, wenn wir die Gleichung (9) in Bezug auf β_2 und $\varDelta\beta_2$ differenziren, jedoch $d\,(\varDelta\beta_2) = 0$ setzen, dann findet man:

$$\frac{d\,\beta_2}{\cos^2(\beta_2 - \varDelta\beta_2)} = \lambda\,\frac{d\,\beta_2}{\cos^2\beta_2}$$

oder

$$\cos^2\beta_2 = \lambda\cos^2(\beta_2 - \varDelta\beta_2)$$

oder

$$1 + \mathrm{tang}^2 (\beta_2 - \Delta \beta_2) = \lambda (1 + \mathrm{tang}^2 \beta_2)$$

oder endlich, wenn man vermittelst (9) $\mathrm{tang} (\beta_2 - \Delta \beta_2)$ durch $\mathrm{tang}\, \beta_2$ ausdrückt:

$$1 + \lambda^2 \mathrm{tang}^2 \beta_2 = \lambda + \lambda \mathrm{tang}^2 \beta_2$$

Hieraus folgt:

$$\mathrm{tang}\, \beta_2 = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda(1-\lambda)}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\frac{n_2 - \mu}{n_2 - \mu - 1}} \quad . \ (10)$$

Nun ist in allen Fällen der Anwendung $n_2 - \mu$ gegen die Einheit sehr gross, daher $\frac{n_2 - \mu}{n_2 - \mu - 1}$ sehr nahe gleich der Einheit, demnach $\mathrm{tang}\, \beta_2$ ebenfalls nahe gleich Eins, also β_2 nahe gleich 45°.

Ganz auf die gleiche Weise wie dieser vortheilhafteste Werth von β_2 gefunden wurde, kann man auch den vortheilhaftesten Werth von β_1 bestimmen, und findet für denselben selbstverständlich ebenfalls 45°.

Aus dieser Untersuchung geht also hervor, dass der Winkelhebel in solcher Weise angeordnet werden soll, dass der Zeiger, wenn ein Strehn von der niedrigsten Nummer angehängt wird um 45° aufwärts, und wenn ein Strehn von der höchsten Nummer angehängt wird, um 45° abwärts von der horizontalen Lage abweicht.

Wir werden sogleich erfahren, was zu thun ist, um dem Winkelhebel diese Eigenschaft zu ertheilen.

Für die vortheilhafteste Einrichtung ist

für $n = n_1, \quad \varphi = -45^\circ$

„ $n = n_2, \quad \varphi = +45^\circ$

Die Gleichung (3) gibt demnach für die vortheilhafteste Einrichtung folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= \mathrm{cotg}\, \alpha + 2 \frac{p\, a}{b \sin \alpha} n_1 \\ +1 &= \mathrm{cotg}\, \alpha + 2 \frac{p\, a}{b \sin \alpha} n_2 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

wodurch zwei Grössen bestimmt werden.

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst durch Elimination von $\frac{2\, p\, a}{b \sin \alpha}$:

$$\frac{1 - \text{cotg}\ \alpha}{1 + \text{cotg}\ \alpha} = - \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$\frac{1 + \text{tang}\ \alpha}{1 - \text{tang}\ \alpha} = + \frac{n_1}{n_2}$$

oder auch

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = + \frac{n_1}{n_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Differenz der Gleichungen (11) gibt ferner:

$$\frac{p\ a}{b} = \frac{\sin \alpha}{n_2 - n_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die Gleichung (12) bestimmt den vortheilhaftesten Werth des Winkels $\alpha = \widehat{A\ C\ B}$, Fig. 17, Tafel XXIV., und die Gleichung (13) bestimmt ferner, wenn einmal α bekannt ist, den besten Werth des Quotienten $\frac{p\ a}{b}$.

Da $\frac{n_1}{n_2}$ positiv und kleiner als Eins ist, ferner $n_2 - n_1$ positiv ist, so liegt α nothwendig im dritten Quadranten, denn nur wenn dies der Fall ist, kann $\sin \alpha$ positiv ausfallen, wie die Gleichung (13) fordert, und demnach $\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ kleiner als Eins werden, wie es Gleichung (12) vorschreibt.

Wir wollen von dieser Theorie eine Anwendung machen, um deutlich zeigen zu können, wie man sich zu benehmen hat, um den Anforderungen der Rechnung zu entsprechen.

Es sei eine Garnwage herzustellen, vermittelst welcher Garne von Nummer $n_1 = 20$ bis zu Nummer $n_2 = 60$ gut sortirt werden können.

Dann erhalten wir vermöge (12):

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0{\cdot}333 = \text{tang}\,(\pi + 18^\circ + 26')$$

demnach

$$45^\circ + \alpha = 180^\circ + 18^\circ + 26'$$

$$\alpha = 153^\circ + 26'$$

$$\sin \alpha = 0{\cdot}4472$$

Und nun folgt aus Gleichung (13):

$$p\ \frac{a}{b} = \frac{0{\cdot}4472}{40} = \frac{1}{89{\cdot}4}$$

Fig. 1, Tafel XXV. zeigt in einfachen Linien die Einrichtung der Garnwage. Tafel LXXIV. der „Bewegungsmechanismen" zeigt die constructive Durchführung.