Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Krummlinige Schwingungen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Um Complikationen zu vermeiden, die von keinem praktischen Werth sind, wollen wir die Rechnung so machen, wie wenn die Schubstangen unendlich lang wären. Dann stimmen die Vertikalbewegungen der Endpunkte von d mit den Vertikalbewegungen der Kurbelzapfen überein. Bei einer Drehung des Rades b um einen Winkel φ beträgt die Vertikalbewegung des Kurbelzapfens $r \sin \varphi$. Wenn sich b um φ dreht, macht gleichzeitig b_1 eine Wendung um einen Winkel $\varphi \frac{m}{m_1}$, beträgt demnach die Vertikalbewegung des Kurbelzapfens von b_1 $r_1 \sin\left(\frac{m}{m_1}\varphi\right)$. Weil nun die Bewegung von e halb so gross ist als die Bewegung der Endpunkte von d, so hat man:

$$x = \frac{1}{2}\left[r \sin \varphi + r_1 \sin\left(\frac{m}{m_1}\varphi\right)\right]$$

Es werden also durch diesen Mechanismus zwei Sinusschwingungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die beiden Sinuse gleiche oder ungleiche Zeichen haben, oder es wird eine Bewegung hervorgebracht ähnlich derjenigen, auf welcher die Interferenzerscheinungen des Lichtes beruhen.

Krummlinige Schwingungen.

Wird ein Punkt durch zwei Ursachen angeregt nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen geradlinig zu schwingen, so entsteht in demselben eine krummlinige Schwingung. Diese Zusammensetzung von krummlinigen Schwingungen aus geradlinigen kann durch folgenden Mechanismus hervorgebracht werden. Fig. 2, Tafel XXII. a a_1 zwei Axen. c c_1 zwei Kurbeln. b b_1 zwei Zahnräder. e e_1 zwei Schubstangen. f ein Balancier. g eine Verbindungsstange zwischen f und e. Eine Drehung von a bewirkt durch c und e eine Horizontalschwingung von m, bewirkt aber durch b b_1 c_1 e_1 f g gleichzeitig eine Vertikalschwingung von m. Daher macht dieser Punkt eine krummlinige Schwingung, die aus zwei geradlinigen unter rechtem Winkel erfolgenden Schwingungen zusammengesetzt wird.

Nennen wir $r\, r_1$ die Halbmesser der Kurbeln c und c_1, α und α_1 die Winkel, welche die Kurbelrichtungen mit der vertikalen und mit der horizontalen Richtung in dem Moment bilden, wenn die Bewegung des Mechanismus beginnt, und nehmen wir an, die Bewegung werde vermittelst eines Rades b_2 veranlasst und es sei das Verhältniss der Halbmesser der Räder b_2 und b wie $n:1$, dagegen das Verhältniss der Halbmesser der Räder b_2 und b_1 wie $n_1 : 1$, dann sind $\alpha + n\,\varphi$, $\alpha_1 + n_1\,\varphi$ die Winkel, welche die Kurbeln mit der Vertikal- und mit der Horizontalrichtung bilden, wenn das Rad b_2 um den Winkel φ gedreht worden ist.

Nimmt man als Anfangspunkt der Coordinaten diejenige Position des Punktes m, nach welcher er geführt wird, wenn die Kurbel c vertikal und die Kurbel c_1 horizontal steht, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \sin(\alpha + n\,\varphi) \\ y = r_1 \sin(\alpha_1 + n_1\,\varphi) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Durch Elimination von φ aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich die Gleichung der Bahn von m. Diese Elimination kann auf folgende Weise geschehen.

Setzt man:

$$\alpha + n\,\varphi = \psi, \quad \alpha_1 + n_1\,\varphi = \psi_1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + n\,\varphi) = \sin\psi = \frac{x}{r}, \quad \cos\psi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \\ \sin(\alpha_1 + n_1\,\varphi) = \sin\psi_1 = \frac{y}{r_1}, \quad \cos\psi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} \end{array}\right\} \ . \quad (3)$$

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen (2) folgt:

$$n_1\,\alpha - n\,\alpha_1 = n_1\,\psi - n\,\psi_1$$

oder:

$$n\,\psi_1 = n_1\,\psi - (n_1\,\alpha - n\,\alpha_1)$$

demnach ist:

$$\sin n\,\psi_1 = \sin n_1\,\psi \cos(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1) - \cos n_1\,\psi \sin(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1). \quad (4)$$

Nun ist bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{l} \sin n\,\psi_1 = \binom{n}{1} \sin\psi_1 (\cos\psi_1)^{n-1} - \binom{n}{3} (\sin\psi_1)^3 (\cos\psi_1)^{n-3} + \ldots \\ \sin n_1\,\psi = \binom{n_1}{1} \sin\psi (\cos\psi)^{n_1-1} - \binom{n_1}{3} (\sin\psi)^3 (\cos\psi)^{n_1-3} + \ldots \\ \cos n_1\,\psi = (\cos\psi)^{n_1} - \binom{n_1}{2} (\sin\psi)^2 (\cos\psi)^{n_1-2} + \binom{n_1}{4} (\sin\psi)^4 (\cos\psi)^{n_1-4} \end{array}\right\} (5)$$

wobei die Symbole $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ .... $\binom{n_1}{1}$ $\binom{n_1}{2}$ .... die Binomial-

Coeffizienten bedeuten. Setzt man für $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\psi_1$ $\cos\psi_1$ die Werthe, welche die Gleichungen (3) darbieten und substituirt die sich für $\sin n\,\psi_1$, $\sin n_1\,\psi$, $\cos n_1\,\psi$ ergebenden Reihen in die Gleichung (4), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \binom{n}{1}\frac{y}{r_1}\,Y^{n-1} - \binom{n}{3}\left(\frac{y}{r_1}\right)^3 Y^{n-3} + \binom{n}{5}\left(\frac{y}{r_1}\right)^5 Y^{n-5} - \ldots\ldots = \\ + \cos(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1)\left[\binom{n_1}{1}\left(\frac{x}{r}\right) X^{n_1-1} - \binom{n_1}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^3 X^{n_1-3} + \ldots\ldots\right] \\ - \sin(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1)\left| X^{n_1} - \binom{n_1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 X^{n_1-2} + \binom{n_1}{4}\left(\frac{x}{r}\right)^4 X^{n_1-4} - \ldots\right| \end{array}\right\} \quad (6)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = Y, \quad \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} = X, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Reihen brechen ab, wenn n und n_1 ganze Zahlen sind, und dies muss immer der Fall sein, wenn die Axen a und a_1 durch Zahnräder verbunden sind. Aber wenn die Reihen abbrechen, ist die durch (6) ausgedrückte Kurve eine algebraische und mithin geschlossen in sich selbst zurückkehrend.

Wir wollen einige spezielle Fälle betrachten.

Es sei
$$n = n_1 = 1$$

Dies ist der Fall, wenn die Räder b und b_1 gleich gross sind, wenn also gleich viel Horizontal- und Vertikalschwingungen entstehen. Dann gibt die Gleichung (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(\alpha - \alpha_1)\,\frac{x}{r} - \sin(x - \alpha_1)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad . \; . \; (8)$$

dies ist aber die Gleichung einer Ellypse.

Ist überdies $\alpha = \alpha_1$, so wird

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dies ist aber eine schiefe gerade Linie.

Ist $\alpha = 0$, α_1 aber von Null verschieden, so wird aus (7):

$$\frac{y}{r_1} = \cos\alpha_1 \frac{x}{r} + \sin\alpha_1 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad \ldots . \quad (10)$$

Ist $\alpha_1 = 90^\circ$, so wird dieser Ausdruck:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Schwingung erfolgt also in einer Ellypse, deren Axen horizontal und vertikal gerichtet sind. Die vertikale Halbaxe ist r_1, die horizontale Halbaxe r. Ist $r = r_1$, so wird (11) ein Kreis.

Es sei ferner $n = 1$, $n_1 = 2$, in welchem Falle während einer Horizontalschwingung zwei Vertikalschwingungen geschehen. Dann gibt die Gleichung (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(2\alpha - \alpha_1)\left[2 \frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$
$$- \sin(2\alpha - \alpha_1)\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

oder

$$\frac{y}{r_1} = 2\cos(2\alpha - \alpha_1)\frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} - \sin(2\alpha - \alpha_1)\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (12)$$

dies ist eine algebraische Linie der vierten Ordnung. Ist überdies $\alpha = \alpha_1 = 0$, also auch $2\alpha - \alpha_1 = 0$, so wird:

$$\frac{y}{r_1} = 2\frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

oder

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 = 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Für $n = 1$, $n_1 = 3$ (Octave und Quinte) folgt aus (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1)\left\{3\left(\frac{x}{r}\right)\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] - \left(\frac{x}{r}\right)^3\right\}$$
$$- \sin(3\alpha - \alpha_1)\left\{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]\right\}$$

oder:

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1)\frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$- \sin(3\alpha - \alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese Gleichung wird wiederum am einfachsten, wenn $3\alpha - \alpha_1 = 0$ ist, und nimmt dann die Form an

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

stellt also eine algebraische Linie der dritten Ordnung dar.

Ist dagegen $3\alpha - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\frac{y}{r_1} = -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

die Bahn ist demnach in diesem Falle eine algebraische Linie der sechsten Ordnung.

Für $n = 2$, $n_1 = 3$ (Grundton und Quinte) gibt die Gleichung (6)

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2}$$

$$= \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{3\left(\frac{x}{r}\right)\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^3\right\}$$

$$- \sin(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right\}$$

oder:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left(\frac{x}{r}\right)\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$- \sin(3\alpha - 2\alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ist überdies $3\alpha - 2\alpha_1 = 0$, so wird:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ist dagegen $3\alpha - 2\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2}=-\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (19)$$

die Gleichungen (17), (18), (19) sind Linien der sechsten Ordnung.

Eine vollständige analytische Interpretation der Gleichung (6) würde zu endlosen Rechnungen und Untersuchungen führen, muss also unterlassen werden, und zwar um so mehr, als durch graphische Darstellungen die Beschaffenheit der Kurven so leicht und so klar vor Augen gestellt werden kann.

Man verzeichne ein Rechteck a b c d, Fig. 3, Tafel XXII., so dass $ab = 2r$, $ac = 2r_1$ ist, beschreibe über ab und ac Halbkreise, theile dieselben in gleiche Theile und zwar den Halbkreis aeb in n_1, den Halbkreis afc dagegen in n Theile. Ziehe durch die Theilungspunkte Horizontal- und Vertikallinien, so gibt eine geeignete Verbindung der Durchschnittspunkte die Gestalt der Bahn des Punktes m. In obiger Figur ist z. B. der Halbkreis aeb in 6, der Halbkreis afc in 12 gleiche Theile getheilt, d. h. es ist $\frac{n}{n_1} = \frac{12}{6}$, oder auf eine Vertikalschwingung erfolgen zwei Horizontalschwingungen. Ist $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, so ist offenbar m die Anfangsposition des beschreibenden Punktes und die Bahn ist in diesem Falle die Parabel amc.

Die Schubdublirung.

Fig. 4, Tafel XXII. a ist eine Kurbel, b eine Schubstange, c eine in Führungen schleifende Stange, die von der Schubstange hin und hergezogen wird, d ist ein Stirnrad, das sich um einen Zapfen dreht, der mit der Gliederung von c und b zusammenfällt, e ist eine am Gestell angebrachte unbewegliche Zahnstange, f ist eine in Führungen hin und her schleifende, mit einer Verzahnung versehene Stange, d greift mit seinen Zähnen oben in f, unten in e ein. Es ist klar, dass die Bewegung von f doppelt so gross ist als die Bewegung von c.

Herzbewegungen.

Die Kurbeln können zur Verwandlung einer drehenden Bewegung in eine hin und her gehende nicht angewendet werden, wenn diese letztere nicht nach dem Sinusgesetz, sondern nach irgend einem andern Gesetz erfolgen soll. In diesem Fall muss man soge-