Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Hin- und Hergang

oder:

$$\tang \varphi = \tang \psi \cos \alpha$$

Es ist sehr zu bedauern, dass dieses Universalgelenk für eine allgemeine Anordnung zu kostspielig ist, sonst würde es unstreitig jeder andern Wellenkupplung vorzuziehen sein, und überhaupt in sehr vielen Fällen angewendet werden.

Hin- und Hergang.

„Hin- und Hergang" nennen wir jeden Mechanismus, der zur Verwandlung einer rotirenden Bewegung in eine hin- und hergehende, oder zu einer umgekehrten Verwandlung dient. Diese Mechanismen spielen im Maschinenwesen eine wichtige Rolle und es gibt deren sehr viele, aber doch nur wenig allgemein anwendbare. Die beachtenswertheren von diesen Mechanismen sind folgende.

Die Sinus- oder Sinus-Versus-Bewegung.

Fig. 15, Tafel XXI. a ist eine in Führungen b b laufende, mit einer Schleife c versehene Stange. d eine gewöhnliche Kurbel, an deren Zapfen ein Gleitstückchen gesteckt ist, das in der Schleife c hin- und hergleiten kann. Wird die Axe der Kurbel gleichförmig gedreht, so oscillirt die Stange a mit periodischer Geschwindigkeit auf und ab.

Nennt man r den Halbmesser der Kurbel, x den Weg, den die Stange nach aufwärts zurücklegt, während die Kurbel aus der horizontalen Stellung um einen Winkel φ nach aufwärts abgelenkt wird, so hat man, wie ein Blick auf die Figur zeigt,

$$x = r \sin \varphi$$

Die Weglängen der Stange a representiren also die Sinuse der Drehungswinkel der Kurbelaxe. Diese Bewegung ist die einfachste Schwingung, auf welche die meisten in der Natur vorkommenden Schwingungen zurückgeführt werden können. Diese Anordnung ist der compendiöseste Mechanismus zur Verwandlung einer rotirenden Bewegung in eine periodisch hin- und hergehende, und kann zur Uebertragung von schwächeren Kräften wohl gebraucht werden, wenn das Sinusgesetz der Natur der Sache nicht widerspricht. Zur Uebertragung stärkerer Kräfte ist jedoch dieser Mechanismus wegen der beträchtlichen Reibung des Gleitstückes in der Schleife nicht wohl zu verwenden.

Sinus-Bewegung mit Excentrum.

Fig. 16, Tafel XXI. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass statt einer Kurbel eine excentrische Scheibe angewendet ist. Die Bewegung, welche in der Stange entsteht, ist identisch mit jener, welche der vorhergehende Mechanismus hervorbringt, wenn die Excentricität ε gleich ist dem Kurbelhalbmesser der vorhergehenden Vorrichtung. Diese Excentrik-Bewegung verursacht noch mehr Reibung als der Kurbelmechanismus, gewährt jedoch den Vortheil, dass die Axe nach beiden Seiten ohne Unterbrechung oder Krümmung fortgesetzt werden kann.

Excentrum mit veränderlicher Excentricität.

Fig. 17, Tafel XXI. a ist eine Axe, b eine damit verbundene excentrische Scheibe. c eine zweite um b drehbare aber mit b feststellbare excentrische Scheibe. g ein die Scheibe c umfassender, in eine Stange h übergehender Zaum. i eine in Lagern auf- und abschleifende Stange, die durch h bewegt wird. Wird c gegen b festgestellt und a gedreht, so wirkt der Mechanismus wie eine Kurbel, deren Halbmesser gleich a f ist. Nennt man $a\,e = \varepsilon$ die Excentricität der Sneibe b gegen a. $e\,f = \varepsilon_1$ die Excentricität der Scheibe c gegen b. $\widehat{e\,a\,f} = \varphi$ den Winkel, um welchen c gegen b verstellt ist, so hat man:

$$\overline{a\,f} = \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^\circ$ fallen die drei Punkte a, e, f in eine gerade Linie und es wird für $\varphi = 0$, $\overline{a\,f} = \varepsilon_1 + \varepsilon$, für $\varphi = 180^\circ$, $\overline{a\,f} = \varepsilon_1 - \varepsilon$. Durch die Verstellung der Scheibe c gegen b kann also die Bewegungslänge der Stange i innerhalb der Grenzen $2\,(\varepsilon_1 - \varepsilon)$ und $2\,(\varepsilon_1 + \varepsilon)$ verändert werden. Die Wirkungen dieses für die Ausführung complizirten Mechanismus stimmen also mit der einer Kurbel von veränderlichem Halbmesser überein. Praktisch anwendbar ist diese Anordnung nur dann, wenn die Welle a nicht unterbrochen werden darf.

Das Planetenrad.

Fig. 18, Tafel XXI. b ist ein mit einer Axe a verbundenes Stirnrad, c ein zweites Stirnrad von der Grösse von b. Es ist mit einer

Stange e so verbunden, dass es seine relative Lage gegen dieselbe nicht ändern kann, und die Axe von c ist vermittelst einer Stange d an die Axe von a gehängt, so dass sich die Entfernung der Mittelpunkte der Räder b und c nicht ändern kann. Die Schubstange e ist mit der Stange *f*, die auf und ab bewegt werden soll, zusammengegliedert. Das Bewegungsgesetz dieser Anordnung lässt sich in folgender Weise bestimmen.

Wenn das Rad c seine Lage gegen d nicht änderte, würde das Rad b und die Axe a um einen Winkel g a h $= \varphi$ gedreht, während das Gehänge d aus der vertikalen Stellung in diejenige übergeht, die in der Zeichnung dargestellt ist. Allein während der Winkel φ beschrieben wird, wird das Rad c durch die Stange e um den Winkel ψ gedreht, wodurch das Rad b abermals um ψ fortrückt. Die ganze Drehung des Rades b beträgt daher $\varphi + \psi = \varphi + \varphi + \Theta = 2\,\varphi + \Theta$, denn es ist $\psi = \Theta + \varphi$. Nennt man r den Halbmesser eines der Räder c und b und l die Länge der Stange e, so ist, wie die Figur lehrt:

$$\sin \Theta = \frac{2\,r}{l} \sin \varphi$$

oder

$$\Theta = \text{Arc}\sin\left(\frac{2\,r}{l}\sin\varphi\right)$$

Der Winkel ω, um welchen das Rad b gedreht wird, während der Winkel φ beschrieben wird, ist demnach:

$$\omega = 2\,\varphi + \Theta = 2\,\varphi + \text{Arc}\sin\left(\frac{2\,r}{l}\sin\varphi\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Für $\varphi = 2\,\pi$, d. h. bei einer Umdrehung von d oder bei einem Auf- und Niedergang von *f* wird $\omega = 2 \times 2\,\pi$. Die Axe a macht mithin zwei Umdrehungen, während die Stange *f* einmal auf und nieder geht.

Auch dieser von *Watt* ausgedachte sinnreiche Mechanismus ist wegen seiner Zusammengesetztheit von keinem praktischen Werth.

Hypocycloidischer Hin- und Hergang.

Fig. 19, Tafel XXI. a ist ein unbeweglicher Ring mit innerer Verzahnung. b ein Stirnrädchen, dessen Durchmesser gleich ist dem Halbmesser von a. Seine Zähne greifen in die innere Verzahnung von a ein und es dreht sich frei auf dem Zapfen einer Kurbel c, deren Halbmesser gleich ist dem Halbmesser von b und die an einer mit a concentrisch gelagerten Axe *f* befestigt ist. In dem Durchschnittspunkt g des vertikalen Durchmessers mit dem Theilriss von b ist an den Körper des Rades b ein Zapfen angebracht und in denselben eine vertikale Stange k eingehängt, die oben bei h geführt wird.

Wird die Axe *f* gedreht, so nimmt die Kurbel c das Rad b mit sich fort. Dieses bleibt mit seinen Zähnen an den Zähnen des Ringes hängen, was zur Folge hat, dass es in dem Ring herumrollt, und dabei bewegt sich der Zapfen g und mit ihm auch die Stange k längs des vertikalen Durchmessers von a auf und ab. Auch dieser Mechanismus ist nur ein sinnreiches Spielwerk und von keinem praktischen Werth.

Hin- und Hergang mit zwei Kurbeln.

Fig. 20, Tafel XXI. $a\ a_1$ sind zwei mit gleichen Rädern $b\ b_1$ versehene Axen. Die Zähne dieser Räder greifen in einander ein und an den Körpern der Räder sind Kurbelzapfen angebracht. $c\ c_1$ sind zwei Schubstangen. Sie umfassen mit ihren unteren Enden die Kurbelzapfen und sind oben in den Enden einer Traverse d eingehängt. Diese letztere befindet sich an der Stange e, die auf und ab bewegt werden soll.

Werden die Kurbeln aus der horizontalen Lage um einen Winkel φ gedreht und nennt man x den Weg, den gleichzeitig ein Punkt der Stange e nach aufwärts zurücklegt, so findet man leicht, dass

$$x = r \sin \varphi + l \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \varphi} - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \right]$$

Das Bewegungsgesetz ist also nicht das reine Sinusgesetz, sondern weicht von demselben etwas ab, und zwar um so mehr, je kürzer die Schubstangen im Verhältniss zu den Kurbeln sind.

Die Interferenz-Bewegung.

Fig. 1, Tafel XXII. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass die Räder und die Kurbeln ungleich gross sind.

Nennt man m und m_1 die Anzahl der Zähne der Räder, $r\ r_1$ die Kurbelhalbmesser, x den Weg, den die Stange nach aufwärts zurücklegt, wenn das Rad b um einen Winkel φ nach der Richtung des Pfeiles gedreht wird, so ergibt sich x auf folgende Weise.

Um Complikationen zu vermeiden, die von keinem praktischen Werth sind, wollen wir die Rechnung so machen, wie wenn die Schubstangen unendlich lang wären. Dann stimmen die Vertikalbewegungen der Endpunkte von d mit den Vertikalbewegungen der Kurbelzapfen überein. Bei einer Drehung des Rades b um einen Winkel φ beträgt die Vertikalbewegung des Kurbelzapfens $r \sin \varphi$. Wenn sich b um φ dreht, macht gleichzeitig b_1 eine Wendung um einen Winkel $\varphi \frac{m}{m_1}$, beträgt demnach die Vertikalbewegung des Kurbelzapfens von b_1 $r_1 \sin\left(\frac{m}{m_1}\varphi\right)$. Weil nun die Bewegung von e halb so gross ist als die Bewegung der Endpunkte von d, so hat man:

$$x = \frac{1}{2}\left[r \sin \varphi + r_1 \sin\left(\frac{m}{m_1}\varphi\right)\right]$$

Es werden also durch diesen Mechanismus zwei Sinusschwingungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die beiden Sinuse gleiche oder ungleiche Zeichen haben, oder es wird eine Bewegung hervorgebracht ähnlich derjenigen, auf welcher die Interferenzerscheinungen des Lichtes beruhen.

Krummlinige Schwingungen.

Wird ein Punkt durch zwei Ursachen angeregt nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen geradlinig zu schwingen, so entsteht in demselben eine krummlinige Schwingung. Diese Zusammensetzung von krummlinigen Schwingungen aus geradlinigen kann durch folgenden Mechanismus hervorgebracht werden. Fig. 2, Tafel XXII. a a_1 zwei Axen. c c_1 zwei Kurbeln. b b_1 zwei Zahnräder. e e_1 zwei Schubstangen. *f* ein Balancier. g eine Verbindungsstange zwischen *f* und e. Eine Drehung von a bewirkt durch c und e eine Horizontalschwingung von m, bewirkt aber durch b b_1 c_1 e_1 *f* g gleichzeitig eine Vertikalschwingung von m. Daher macht dieser Punkt eine krummlinige Schwingung, die aus zwei geradlinigen unter rechtem Winkel erfolgenden Schwingungen zusammengesetzt wird.

Nennen wir r r_1 die Halbmesser der Kurbeln c und c_1, α und α_1 die Winkel, welche die Kurbelrichtungen mit der vertikalen und mit der horizontalen Richtung in dem Moment bilden, wenn die Bewegung des Mechanismus beginnt, und nehmen wir an, die Bewegung werde vermittelst eines Rades b_2 veranlasst und es sei das Verhältniss der Halbmesser der Räder b_2 und b wie $n:1$, dagegen das Verhältniss der Halbmesser der Räder b_2 und b_1 wie $n_1 : 1$, dann sind $\alpha + n\,\varphi$, $\alpha_1 + n_1\,\varphi$ die Winkel, welche die Kurbeln mit der Vertikal- und mit der Horizontalrichtung bilden, wenn das Rad b_2 um den Winkel φ gedreht worden ist.

Nimmt man als Anfangspunkt der Coordinaten diejenige Position des Punktes m, nach welcher er geführt wird, wenn die Kurbel c vertikal und die Kurbel c_1 horizontal steht, so ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin(\alpha + n\,\varphi) \\ y &= r_1 \sin(\alpha_1 + n_1\,\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Durch Elimination von φ aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich die Gleichung der Bahn von m. Diese Elimination kann auf folgende Weise geschehen.

Setzt man:

$$\alpha + n\,\varphi = \psi,\quad \alpha_1 + n_1\,\varphi = \psi_1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha + n\,\varphi) &= \sin\psi = \frac{x}{r},\quad \cos\psi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \\ \sin(\alpha_1 + n_1\,\varphi) &= \sin\psi_1 = \frac{y}{r_1},\quad \cos\psi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen (2) folgt:

$$n_1\,\alpha - n\,\alpha_1 = n_1\,\psi - n\,\psi_1$$

oder:

$$n\,\psi_1 = n_1\,\psi - (n_1\,\alpha - n\,\alpha_1)$$

demnach ist:

$$\sin n\,\psi_1 = \sin n_1\,\psi \cos(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1) - \cos n_1\,\psi \sin(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1). \quad (4)$$

Nun ist bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \sin n\,\psi_1 &= \binom{n}{1} \sin\psi_1 (\cos\psi_1)^{n-1} - \binom{n}{3} (\sin\psi_1)^3 (\cos\psi_1)^{n-3} + \ldots \\ \sin n_1\,\psi &= \binom{n_1}{1} \sin\psi\,(\cos\psi)^{n_1-1} - \binom{n_1}{3} (\sin\psi)^3 (\cos\psi)^{n_1-3} + \ldots \\ \cos n_1\,\psi &= (\cos\psi)^{n_1} - \binom{n_1}{2} (\sin\psi)^2 (\cos\psi)^{n_1-2} + \binom{n_1}{4} (\sin\psi)^4 (\cos\psi)^{n_1-4} \end{aligned}\right\} (5)$$

wobei die Symbole $\binom{n}{1}\ \binom{n}{2} \ldots \binom{n_1}{1}\ \binom{n_1}{2} \ldots$ die Binomial-

Coeffizienten bedeuten. Setzt man für $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\psi_1$ $\cos\psi_1$ die Werthe, welche die Gleichungen (3) darbieten und substituirt die sich für $\sin n\psi_1$, $\sin n_1\psi$, $\cos n_1\psi$ ergebenden Reihen in die Gleichung (4), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \binom{n}{1}\frac{y}{r_1}\,Y^{n-1} - \binom{n}{3}\left(\frac{y}{r_1}\right)^3 Y^{n-3} + \binom{n}{5}\left(\frac{y}{r_1}\right)^5 Y^{n-5} - \dots = \\ + \cos(n_1\alpha - n\alpha_1)\left[\binom{n_1}{1}\left(\frac{x}{r}\right) X^{n_1-1} - \binom{n_1}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^3 X^{n_1-3} + \dots\right] \\ - \sin(n_1\alpha - n\alpha_1)\left[X^{n_1} - \binom{n_1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 X^{n_1-2} + \binom{n_1}{4}\left(\frac{x}{r}\right)^4 X^{n_1-4} - \dots\right] \end{array}\right\} \quad (6)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = Y, \quad \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} = X, \quad \dots\dots \quad (7)$$

Diese Reihen brechen ab, wenn n und n_1 ganze Zahlen sind, und dies muss immer der Fall sein, wenn die Axen a und a_1 durch Zahnräder verbunden sind. Aber wenn die Reihen abbrechen, ist die durch (6) ausgedrückte Kurve eine algebraische und mithin geschlossen in sich selbst zurückkehrend.

Wir wollen einige spezielle Fälle betrachten.

Es sei
$$n = n_1 = 1$$

Dies ist der Fall, wenn die Räder b und b_1 gleich gross sind, wenn also gleich viel Horizontal- und Vertikalschwingungen entstehen. Dann gibt die Gleichung (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(\alpha - \alpha_1)\,\frac{x}{r} - \sin(x - \alpha_1)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad \dots (8)$$

dies ist aber die Gleichung einer Ellypse.

Ist überdies $\alpha = \alpha_1$, so wird

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

dies ist aber eine schiefe gerade Linie.

Ist $\alpha = 0$, α_1 aber von Null verschieden, so wird aus (7):

$$\frac{y}{r_1} = \cos \alpha_1 \frac{x}{r} + \sin \alpha_1 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Ist $\alpha_1 = 90^\circ$, so wird dieser Ausdruck:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Die Schwingung erfolgt also in einer Ellypse, deren Axen horizontal und vertikal gerichtet sind. Die vertikale Halbaxe ist r_1, die horizontale Halbaxe r. Ist $r = r_1$, so wird (11) ein Kreis.

Es sei ferner $n = 1$, $n_1 = 2$, in welchem Falle während einer Horizontalschwingung zwei Vertikalschwingungen geschehen. Dann gibt die Gleichung (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos (2\alpha - \alpha_1) \left[2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$
$$- \sin (2\alpha - \alpha_1) \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

oder

$$\frac{y}{r_1} = 2 \cos (2\alpha - \alpha_1) \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} - \sin (2\alpha - \alpha_1) \left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (12)$$

dies ist eine algebraische Linie der vierten Ordnung. Ist überdies $\alpha = \alpha_1 = 0$, also auch $2\alpha - \alpha_1 = 0$, so wird:

$$\frac{y}{r_1} = 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

oder

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 = 4 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Für $n = 1$, $n_1 = 3$ (Octave und Quinte) folgt aus (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos (3\alpha - \alpha_1) \left\{ 3\left(\frac{x}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] - \left(\frac{x}{r}\right)^3 \right\}$$
$$- \sin (3\alpha - \alpha_1) \left\{ \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right] \right\}$$

oder:

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1)\,\frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$-\sin(3\alpha - \alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese Gleichung wird wiederum am einfachsten, wenn $3\alpha - \alpha_1 = 0$ ist, und nimmt dann die Form an

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

stellt also eine algebraische Linie der dritten Ordnung dar.

Ist dagegen $3\alpha - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\frac{y}{r_1} = -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

die Bahn ist demnach in diesem Falle eine algebraische Linie der sechsten Ordnung.

Für $n = 2$, $n_1 = 3$ (Grundton und Quinte) gibt die Gleichung (6)

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2}$$

$$= \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{3\left(\frac{x}{r}\right)\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^3\right\}$$

$$-\sin(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right\}$$

oder:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left(\frac{x}{r}\right)\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$-\sin(3\alpha - 2\alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ist überdies $3\alpha - 2\alpha_1 = 0$, so wird:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ist dagegen $3\alpha - 2\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = -\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (19)$$

die Gleichungen (17), (18), (19) sind Linien der sechsten Ordnung.

Eine vollständige analytische Interpretation der Gleichung (6) würde zu endlosen Rechnungen und Untersuchungen führen, muss also unterlassen werden, und zwar um so mehr, als durch graphische Darstellungen die Beschaffenheit der Kurven so leicht und so klar vor Augen gestellt werden kann.

Man verzeichne ein Rechteck a b c d, Fig. 3, Tafel XXII., so dass $ab = 2r$, $ac = 2r_1$ ist, beschreibe über ab und ac Halbkreise, theile dieselben in gleiche Theile und zwar den Halbkreis aeb in n_1, den Halbkreis afc dagegen in n Theile. Ziehe durch die Theilungspunkte Horizontal- und Vertikallinien, so gibt eine geeignete Verbindung der Durchschnittspunkte die Gestalt der Bahn des Punktes m. In obiger Figur ist z. B. der Halbkreis aeb in 6, der Halbkreis afc in 12 gleiche Theile getheilt, d. h. es ist $\frac{n}{n_1} = \frac{12}{6}$, oder auf eine Vertikalschwingung erfolgen zwei Horizontalschwingungen. Ist $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, so ist offenbar m die Anfangsposition des beschreibenden Punktes und die Bahn ist in diesem Falle die Parabel amc.

Die Schubdublirung.

Fig. 4, Tafel XXII. a ist eine Kurbel, b eine Schubstange, c eine in Führungen schleifende Stange, die von der Schubstange hin und hergezogen wird, d ist ein Stirnrad, das sich um einen Zapfen dreht, der mit der Gliederung von c und b zusammenfällt, e ist eine am Gestell angebrachte unbewegliche Zahnstange, f ist eine in Führungen hin und her schleifende, mit einer Verzahnung versehene Stange, d greift mit seinen Zähnen oben in f, unten in e ein. Es ist klar, dass die Bewegung von f doppelt so gross ist als die Bewegung von c.

Herzbewegungen.

Die Kurbeln können zur Verwandlung einer drehenden Bewegung in eine hin und her gehende nicht angewendet werden, wenn diese letztere nicht nach dem Sinusgesetz, sondern nach irgend einem andern Gesetz erfolgen soll. In diesem Fall muss man soge-