Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Unrunde Räder

urn:nbn:de:bsz:31-270970

würde der genannte Körper nur eine gemeinsame drehende Bewegung mit der Axe e erhalten. Allein weil das Rad g unbeweglich ist, bleibt das Rad i mit seinen Zähnen in den Zähnen des Rades g hängen, was zur Folge hat, dass i auf g herumrollt. Dadurch entsteht nun eine drehende Bewegung von k und f und endlich der Axe b mit der Kugel. Diese erhält also 1) eine drehende Bewegung um die Axe e und 2) eine drehende Bewegung um die darauf senkrechte Axe b. Bei einer Umdrehung von e macht die Kugel a eine Umdrehung um e und $\frac{g}{i} \frac{k}{f}$ Umdrehungen um b.

Unrunde Räder.

Theorie derselben. Es seien, Fig. 14, Tafel XIX., S und S_1 zwei mit den Axen A, A_1 verbundene nicht kreisförmige Scheiben von solcher Gestaltung, dass dieselben ähnlich wie die Theilkreise gewöhnlicher Stirnräder auf einander rollen, wenn jede dieser Axen nach einem gewissen Gesetz gedreht wird. Die Linien, nach welchen derlei Scheiben gestaltet werden müssen, um aufeinander rollen zu können, werden Roll-Linien genannt. Das charakteristische Merkmal dieser Linien ist 1) dass sie sich in jedem Augenblick der Bewegung der Axen in einem Punkt berühren, 2) dass die Bogenlängen, um welche die Berührungspunkte auf beiden Scheiben in einer bestimmten Zeit fortschreiten, gleich gross sind. Versieht man solche nach Rolllinien gebildete Scheiben mit Zähnen, so entstehen unrunde Zahnräder, die die Eigenschaft besitzen, dass durch die nach einem bestimmten Gesetz erfolgende Drehung einer Axe A eine drehende Bewegung nach einem bestimmten andern Gesetz in der zweiten Axe A_1 eintritt. Derlei Räder können also namentlich gebraucht werden, um durch eine gleichförmig drehende Bewegung einer Axe A eine nach einem vorgeschriebenen Gesetz erfolgende ungleichförmige Drehung einer zweiten Axe A_1 hervorzubringen. Diese Rollungslinie kann auf folgende Weise bestimmt werden. Es seien, Fig. 15, Tafel XIX., A, A_1 die Axen der Räder, $D E, D_1 E_1$ die Rollungslinien in einer bestimmten Position, in der sich dieselben in dem in $A A_1$ liegenden Punkt B berühren. Schneidet man von B aus auf $B D$ und $B D_1$ zwei unendlich kleine Bogenlängen $B C$ und $B C_1$ von gleicher Länge ab und zieht die Radien $A C$ und $A_1 C_1$, so sind C und C_1 die Punkte, welche in Berührung treten müssen, wenn die beiden Räder um die Winkel $C A B = d\varphi$ und $C_1 A_1 B_1 = d\varphi_1$ niederwärts gedreht werden, damit aber die Berührung in den Punkten C und C_1 möglich ist, muss sein: 1) $\overline{A C} + \overline{A_1 C_1} = \overline{A A_1}$, 2) müssen die Winkel, welche die Radien AC und $A_1 C_1$ mit den Tangenten bilden, die durch C und C_1 an die Rolllinien gezogen werden können, gleich gross sein. Diesen Bedingungen wird entsprochen, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho + \varrho_1 &= D \\ \varrho\, d\varphi &= \varrho_1\, d\varphi_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei $\overline{AC} = \varrho$, $\overline{A_1 C_1} = \varrho_1$, $\overline{AA_1} = D$.

Wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem sich die Axe A_1 drehen soll, wenn A gleichförmig gedreht wird, kennt man φ_1 als Funktion von φ. Drückt man dieses Gesetz durch

$$\varphi_1 = \text{funkt.}\,(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

aus, so kann man vermittelst der Gleichungen (1) und (2) jederzeit die Rolllinien bestimmen, denn es folgt aus (1):

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{D}{1 + \dfrac{d\varphi}{d\varphi_1}} \\ \varrho_1 &= \frac{D}{1 + \dfrac{d\varphi_1}{d\varphi}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Differenzirt man die Gleichung (2), so erhält man einen Differenzialausdruck, aus welchem $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ als Funktion von φ gefunden wird, und wenn man in demselben vermittelst (2) φ durch φ_1 ausdrückt, so erhält man den Quotienten $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ durch φ_1 ausgedrückt. Substituirt man diese Werthe von $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ und von $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ in die Gleichungen (3), so bestimmt die erstere ϱ als Funktion von φ und letztere ϱ_1 als Funktion von φ_1 und dies sind eben die in Polarcoordinaten ausgedrückten Gleichungen der beiden Rolllinien.

Anwendung dieser Theorie. Legen wir uns die Aufgabe vor, zwei unrunde Räder so zu construiren, dass denselben folgende Eigenschaften zukommen.

1) Das Rad, welchem die Elemente ϱ und φ entsprechen, soll m, jenes, dem die Elemente ϱ_1 und φ_1 zukommen, soll m_1 Polygonseiten erhalten. Es sei $m_1 > m$, so dass der Quotient $\frac{m_1}{m} = i$ die Uebersetzungszahl ausdrückt.
2) Das Bewegungsgesetz für das Rad $\varphi_1\ \varrho_1$ sei

$$\varphi_1 = \mathfrak{A}\,\varphi + \mathfrak{B} \sin k\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ k$ die vorläufig noch unbestimmten Constanten bezeichnen.

Bei diesem Gesetz ist die Bewegung des zweiten Rades eine schwingend fortschreitende, wenn die Bewegung des ersten Rades mit Gleichförmigkeit erfolgt.

Aus (4) folgt

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Führt man diesen Werth in die zweite der Gleichungen (3) ein, so erhält man

$$\varrho_1 = \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vermöge der oben ausgesprochenen Bedingung muss für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ werden, muss ferner der Werth von ϱ_1 für $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ oder für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ gleich werden dem Werth von ϱ_1 für $\varphi = 0$. Dies ist vermöge (4) und (6) der Fall, wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{m_1} &= \mathfrak{A}\,\frac{2\pi}{m} + \mathfrak{B} \sin k\,\frac{2\pi}{m} \\ \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k} &= \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\frac{2\pi}{m}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned} k &= m \\ \mathfrak{A} &= \frac{m}{m_1} = \frac{1}{i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hiermit sind nun zwei von den drei Constanten $k\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ bestimmt. Die dritte Constante $\mathfrak{B}$ kann man so bestimmen, dass das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des mit ungleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Rades einen gewissen Werth γ hat.

Für die grösste Winkelgeschwindigkeit ist vermöge (5) $\cos k\,\varphi = 1$, für die kleinste $\cos k\,\varphi = -1$, man hat daher:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,k}$$

Führt man hier für k und $\mathfrak{A}$ den Werth aus (8) ein, sucht hierauf $\mathfrak{B}$ und berücksichtigt, dass $m\,i = m_1$ ist, so findet man:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{m_1}\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Führt man diese Werthe von $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ k$, welche die Gleichungen (8) und (9) darbieten in (4) und (6) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{i}\left(\varphi + \frac{1}{m}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sin m\,\varphi\right) \\ \varrho_1 &= \frac{i\,D}{1 + i + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cos m\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Um vermittelst dieser Gleichungen die beiden Rolllinien der Räder zu verzeichnen, verfährt man wie folgt: Man nimmt eine Reihe von Werthen von φ an und berechnet vermittelst (10) den entsprechenden Werth von φ_1 und ϱ_1, wodurch zunächst die zweite Rolllinie gezeichnet werden kann. Nimmt man dann die Differenz $D - \varrho_1 = \varrho$, so erhält man auch die den Werthen von φ entsprechenden Radienvektoren der ersten Rolllinie.

Nimmt man z. B. an $m = m_1 = 1,\ i = 1,\ \gamma = 4$, so gibt die Gleichung (10):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{3}{5}\sin\varphi \\ \varrho_1 &= \frac{5\,D}{10 + 3\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Fig. 16, Tafel XIX. zeigt die Räder, welche sich für diese Annahmen ergeben.

Von der Richtigkeit der Construktion überzeugt man sich bald, wenn man die Rolllinien genau verzeichnet und sodann nachsieht, ob die Peripherielängen der beiden Räder genau gleich gross sind. Dies wird der Fall sein, wenn die Verzeichnung sorgfältig durchgeführt worden ist.

Nimmt man an $m = m_1 = 4,\ i = 1,\ \gamma = 2$, Fig. 1, Tafel XX., so gibt die Gleichung (10):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{1}{8}\sin 4\,\varphi \\ \varrho_1 &= \frac{3\,D}{6 + \cos 4\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$