Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Räderwerke

a in a oder in b, c, d

b „ b „ „ a, c, d

c „ c „ „ a, b, d

d „ d „ „ a, b, c

allein es ist klar, dass es möglicher Weise von jeder dieser 16 Arten von Verwandlungen eine nicht bestimmbare Anzahl von Varietäten gibt.

Es werden nun in Folgendem sehr viele von den bis jetzt erfundenen Bewegungsverwandlungen beschrieben, und wo es nöthig ist theoretisch behandelt, allein nicht in der Reihenfolge, welche durch obiges Schema dargestellt ist, sondern in einer für das Verständniss angemessenen Folge. Zwei Arten von Bewegungsverwandlungen sind es, die in der Mechanik vorzugsweise vorkommen, nämlich die Verwandlungen

c in c und c in b

und mit der Erklärung derselben wollen wir beginnen.

Räderwerke.

Zur Verwandlung einer continuirlich drehenden Bewegung einer Axe in eine continuirlich drehende einer zweiten Axe dienen am häufigsten Räderwerke. Da wir die Form der Zähne bereits in der Verzahnungstheorie bestimmt haben, so erübrigt uns nun noch die Beschreibung und Erklärung verschiedener Räderzusammenstellungen für verschiedene Zwecke.

Gewöhnliche Stirnräder zur Verbindung zweier zu einander parallelen Axen.

Fig. 5, Tafel XVIII. Das Charakteristische der Bewegungen solcher Räder ist: 1) die Geschwindigkeiten der Theilrisse der Räder sind gleich gross, 2) die Drehungsrichtungen sind entgegengesetzt, 3) die Umdrehungen der Räder in einer Minute verhalten sich umgekehrt wie die Halbmesser und auch umgekehrt, wie die Anzahl der Zähne.

Gewöhnliche Kegelräder zur Verbindung zweier Axen, die sich schneiden.

Fig. 6, Tafel XVIII. Auch hier gelten die für Stirnräder bestehenden geometrischen Beziehungen.

Uebersetzung mit einem Zwischenrad.

Fig. 7, Tafel XVIII. a und c sind zwei durch ein Zwischenrad b verbundene Räder. Dieses Zwischenrad hat keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsverhältniss der Räder a und c, wohl aber auf ihre Bewegungsrichtungen. Diese sind entgegengesetzt, wenn a und c direkt auf einander wirken, übereinstimmend, wenn ein Zwischenrad vorhanden ist. Das Gleiche findet statt, wenn zwei Räder durch eine ungerade Anzahl von Zwischenrädern verbunden sind.

Uebersetzung mit zwei Zwischenrädern.

Fig. 8, Tafel XVIII. a und d sind zwei Stirnräder, die durch zwei Zwischenräder b und c in Verbindung gesetzt sind. Hier ist sowohl das Geschwindigkeitsverhältniss der Räder a und d, als auch ihre Bewegungsrichtung genau so, wie wenn a und d unmittelbar auf einander wirkten. Diese Anwendung mehrerer Zwischenräder wird nur in solchem Falle Vortheil gewähren, wenn die Entfernung der zu verbindenden Axen gross und die Anwendung von sehr grossen Rädern nicht wohl zulässig ist. Aehnlich verhält es sich auch, wenn eine beliebige, jedoch gerade Anzahl von Zwischenaxen angewendet wird.

Verbindung zweier Axen, deren Richtungen sich nicht schneiden durch eine Zwischenaxe.

Fig. 1, Tafel XIX. a und b sind zwei Axen, deren Richtungen einen Winkel bilden, sich aber nicht schneiden. c ist eine Zwischenaxe, deren Richtung sowohl a als b schneidet. d und e sind zwei Kegelräder, welche die Axen a und c verbinden, *f* und g sind zwei andere Kegelräder, durch welche die Axen c und b in Verbindung gesetzt werden.

Räderzählwerk.

Fig. 2, Tafel XIX. a ist eine rasch laufende Axe, deren Umdrehungen gezählt werden sollen, b ein mit a verbundenes Getriebe, das in zwei grosse Stirnräder c und d eingreift, von welchen c mit der Axe *f* verbunden ist, d hingegen frei um *f* sich dreht. Die Anzahl der Zähne des Rades d ist um eine Einheit grösser, als die Anzahl der Zähne von c. e ist ein mit der Axe *f* verbundener Zeiger, der auf eine an dem Rade d angebrachte Kreistheilung weist. Die Anzahl der Umdrehungen, welche die Axe a macht, wenn der Zeiger e in seiner relativen Bewegung gegen das Rad d einmal herumgegangen ist, beträgt, wie man leicht findet,

$$\frac{Z\,(Z+1)}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wobei Z, $Z+1$ und z die Zahnzahlen der Räder c, d, und b bezeichnen.

Die am Rade d anzubringende Eintheilung muss daher so viele Theilungen erhalten, als der Ausdruck (1) angibt, damit eine Theilung einer einzelnen Umdrehung der Axe a entspricht.

Schraubenräder für Axen, deren Richtungen auf einander senkrecht sind.

Fig. 3, Tafel XIX. Grundriss, Fig. 4 Aufriss.

Schraubenräder für parallele Axen.

Fig. 5, Tafel XIX. Die Zähne dieser Schraubenräder sind die Einhüllungsflächen, welche entstehen, wenn die Schneide eines Meisels nach einer gewissen Richtung geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt wird, während gleichzeitig der cylindrische Körper mit angemessener Geschwindigkeit um seine Axe gedreht wird. Diese Schraubenräder sind von dem Engländer *White* erfunden worden.

Die Schraube ohne Ende.

Fig. 6, Tafel XIX. Bei einer Umdrehung der Axe a geht das Rad b um eine Zahntheilung weiter (vorausgesetzt, dass die Schraube eingewindig ist). Die Uebersetzungszahl ist demnach gleich der Anzahl der Zähne des Rades. Es ist dies der compendiöseste Mechanismus für Uebersetzungen ins Langsame, er consumirt jedoch leider durch Reibung ungemein viel Kraft, kann deshalb zur Uebertragung von mächtigeren Kräften nicht gebraucht werden.

Spiralrad und Zahnrad.

Fig. 7, Tafel XIX. a ist ein Stirnrad, b eine Scheibe, die auf ihrer Fläche mit einer spiraligen Windung versehen ist. Die Entfernung zweier unmittelbar auf einander folgenden Windungen ist gleich der Zahntheilung von a. Wird b einmal umgedreht, so geht das Rad a um eine Zahntheilung weiter. Es wirkt also dieser Mechanismus ähnlich, wie die endlose Schraube, und kann als Zählwerk gebraucht werden; zur Uebertragung grösserer Kräfte aber nicht, weil hier der Reibungswiderstand noch grösser ist, als bei der endlosen Schraube.

Das Differenzialräderwerk mit Kegelrädern.

Fig. 8, Tafel XIX. Dieses Rädersystem dient vorzugsweise bei gewissen Spinnmaschinen zur Fadenaufwicklung. Es ist seiner Wirkung nach ein Mechanismus, durch welchen drehende Bewegungen addirt und subtrahirt werden können. a ist eine Axe, mit welcher das Kegelrad b fest verbunden ist, c, d, e bilden ein Stück, das sich frei auf a dreht, c ist ein Kegelrad, d eine Röhre, e ein Stirnrad. *f* ist ein Stirnrad oder eine Scheibe, es ist frei drehbar auf a, g ist ein sogenanntes Planetenrad, dessen Axe in dem Körper von *f* gelagert ist und dessen Zähne in c und b eingreifen. b, c, g sind von gleicher Grösse. Werden nun b und *f*, wie die Pfeile andeuten, nach entgegengesetzter Richtung bewegt, so veranlasst jede dieser beiden Drehungen eine Drehung von c d e. Dieses Stück macht daher eine zusammengesetzte Bewegung, um deren Bestimmung es sich handelt. Dies kann auf mehrere Arten geschehen.

Erste Bestimmung. Es ist klar, dass der Winkel, um welchen c gedreht wird, in dem Fall, wenn man b und *f* gleichzeitig dreht, eben so gross ist, als wenn man zuerst b dreht und *f* stehen lässt, dann aber b stehen lässt und *f* dreht. Dreht man b einmal nach der Richtung des Pfeiles herum und lässt *f* stehen, dann leistet dabei *f* nur allein den Dienst eines Axenlagers; das Rad c wird demnach einmal herumgedreht und zwar nach einer Richtung, die, wie der Pfeil angibt, jener von b entgegengesetzt ist. Lässt man nun b stehen und dreht *f* einmal nach der Richtung des Pfeiles herum, so wird das Planetenrad g die Axe a umlaufen und sich gleichzeitig um seine eigene Axe drehen, oder g rollt auf b einmal herum.

Würde das Planetenrad blos um die Axe a laufen, ohne sich um seine eigene Axe zu drehen, so würde dadurch c *einmal* herumgeführt. Würde sich das Rad g blos einmal um seine Axe drehen, ohne die Axe a zu umlaufen, so würde c abermals *einmal* gedreht. Das Umlaufen und gleichzeitige Drehen um die eigene Axe bewirkt demnach, dass c *zweimal* nach der Richtung des in der Zeichnung angedeuteten Pfeils gedreht wird. Nachdem also eine Umdrehung von b auch eine Umdrehung von c und eine Umdrehung von

f zwei Umdrehungen von c hervorbringt, so ergibt sich die Anzahl $\left(\begin{smallmatrix}n\\c\end{smallmatrix}\right)$ der Umdrehungen, welche c in einer Minute macht, wenn die Räder b und f gleichzeitig während einer Minute $\left(\begin{smallmatrix}n\\b\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}n\\f\end{smallmatrix}\right)$ Umdrehungen machen, durch folgenden Ausdruck

$$\left(\begin{matrix}n\\c\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}n\\b\end{matrix}\right)+2\left(\begin{matrix}n\\f\end{matrix}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Würde man f nach einer Richtung drehen, die mit jener von b übereinstimmt, so muss man $\left(\begin{smallmatrix}n\\f\end{smallmatrix}\right)$ negativ in Rechnung bringen, und dann wird:

$$\left(\begin{matrix}n\\c\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}n\\b\end{matrix}\right)-2\left(\begin{matrix}n\\f\end{matrix}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dreht man f nach der in der Figur angedeuteten Richtung, b hingegen nach entgegengesetzter Richtung, so muss man um $\left(\begin{smallmatrix}n\\c\end{smallmatrix}\right)$ zu finden, in (1) $\left(\begin{smallmatrix}n\\b\end{smallmatrix}\right)$ negativ nehmen, dann wird:

$$\left(\begin{matrix}n\\c\end{matrix}\right)=-\left(\begin{matrix}n\\b\end{matrix}\right)+2\left(\begin{matrix}n\\f\end{matrix}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Im Fall (1) summirt, in den Fällen (2) und (3) subtrahirt der Apparat. Fällt $\left(\begin{smallmatrix}n\\c\end{smallmatrix}\right)$ negativ aus, so ist dies ein Zeichen, dass die Bewegung von c entgegengesetzt ist derjenigen, welche in der Figur durch den Pfeil angedeutet ist.

Zweite Bestimmung. Eine zweite Bestimmung der Bewegung des Rades c gründet sich auf den Satz, dass die relativen Bewegungen sämmtlicher Räder nicht geändert werden, wenn man dem ganzen Apparat noch eine gemeinsame rotirende Bewegung ertheilt.

Es seien $\left(\begin{smallmatrix}n\\b\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}n\\f\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}n\\c\end{smallmatrix}\right)$ die Umdrehungen der Räder b, f, c in einer Minute nach den Richtungen, welche die Pfeile in der Figur andeuten. Fügt man zu diesen Drehungen noch eine Drehung des ganzen Apparates um die Axe a hinzu und zwar mit einer Geschwindigkeit, die der des Rades f gleich aber entgegengesetzt ist, so kommt das Rad f ganz in Ruhe und die Räder b und c machen dann in einer Minute $\left(\begin{smallmatrix}n\\b\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}n\\f\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}n\\c\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}n\\f\end{smallmatrix}\right)$ Umdrehungen. Allein wenn f ruht, sind die Geschwindigkeiten von b und c gleich gross, man hat daher:

$$\binom{n}{b} + \binom{n}{f} = \binom{n}{c} - \binom{n}{f}$$

oder

$$\binom{n}{c} = \binom{n}{b} + 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

eine Formel, die mit (1) übereinstimmt.

Differenzialräderwerk mit Stirnrädern.

Fig. 9, Tafel XIX. a ist eine Axe, mit welcher das Getriebe b verbunden ist. f ist ein auf a frei bewegliches Rad, durch dessen Körper eine mit zwei Rädern c und d verbundene Axe g gesteckt ist, die sich in einer Hülse gegen den Radkörper f drehen kann. e ist ein um a frei drehbares Rad. Die Räder b und c, so wie e und d greifen in einander. Werden die von einander unabhängigen Räder b und f gleichzeitig gedreht, so entsteht in e eine zusammengesetzte drehende Bewegung, welche bestimmt werden soll.

Erste Bestimmung. Lässt man f ruhig stehen und dreht a einmal herum, so ist das Ganze eine gewöhnliche Räderübersetzung, macht demnach e, $\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$ Umdrehungen, wobei die Zeichen b, c, d, e die Halbmesser der Räder bezeichnen. Lässt man b stehen und dreht f einmal nach der Richtung des Pfeiles herum, so rollt c auf b herum, und dieses Rollen zerlegt sich in einen Umlauf und in eine Rotation. Ein Umlauf von c um b (ohne Rotation) macht, dass e einmal nach der Richtung des auf e verzeichneten Pfeiles mitgenommen wird.

Bei einem einmaligen Herumrollen von c auf b dreht sich c und mithin auch g und d, $\frac{b}{c}$ mal; dreht sich folglich e, $\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$ mal um seine Axe, jedoch nach einer Richtung, die derjenigen entgegengesetzt ist, welche durch den auf e verzeichneten Pfeil angedeutet wird. *Eine* Umdrehung von f bewirkt also $1 - \frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$ Umdrehungen von e.

Wenn nun b $\binom{n}{b}$ und f $\binom{n}{f}$ Umdrehungen machen, so wird nach diesen Erläuterungen offenbar

$$\binom{n}{e} = \binom{n}{b} \frac{b}{c} \times \frac{d}{e} + \left(1 - \frac{b}{c} \times \frac{d}{e}\right)\binom{n}{f} \quad \ldots \quad (1)$$

oder

$$\left(\frac{n}{e}\right) = \left(\frac{n}{f}\right) + \frac{b}{c}\,\frac{d}{e}\left[\left(\frac{n}{b}\right) - \left(\frac{n}{f}\right)\right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Zweite Bestimmung. Wenn b $\left(\frac{n}{b}\right)$ mal und gleichzeitig f $\left(\frac{n}{f}\right)$ mal nach den Pfeilrichtungen gedreht wird, und sodann der ganze Apparat mit $\left(\frac{n}{f}\right)$ Umdrehungen zurückgedreht wird, so kommt f zum Stillstand und es macht dann

$$b, \left(\frac{n}{b}\right) - \left(\frac{n}{f}\right) \text{ dagegen } e, \left(\frac{n}{e}\right) - \left(\frac{n}{f}\right) \text{ Umdrehungen.}$$

Allein wenn f stille steht, hat man es mit einer gewöhnlichen Uebersetzung zu thun, und ist folglich

$$\left(\frac{n}{e}\right) - \left(\frac{n}{f}\right) = \left[\left(\frac{n}{b}\right) - \left(\frac{n}{f}\right)\right] \frac{b}{c}\,\frac{d}{e} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

eine mit (2) übereinstimmende Gleichung.

Differenzialräderwerk mit veränderlicher Geschwindigkeit.

Die resultirende Bewegung des Differenzialräderwerkes ist eine gleichförmige oder eine ungleichförmige, je nachdem die Elementarbewegungen gleichförmig oder ungleichförmig sind. Zur Anwendung des Differenzialräderwerkes wird man meistens in den Fällen veranlasst, wenn zu einer gleichförmigen Bewegung eine ungleichförmige Bewegung addirt oder abgezogen werden soll. Diese ungleichförmige Elementarbewegung wird dann in der Regel vermittelst der Konusbewegung oder vermittelst Friktionsscheiben hervorgebracht, von welchen Mechanismen in der Folge die Rede sein wird.

Uebersetzungskurbel mit Kegelrädern.

Fig. 10, Tafel XIX. a ist eine Axe, die sich in Lagern dreht und mit welcher ein Schwungrad c und das konische Rad d verbunden sind. e ist ein an das Gestell befestigtes, mithin unbewegliches Kegelrad, f ist eine auf der Axe a frei drehbare Kurbel, deren Körper über diese Axe hinaus verlängert ist. g ist ein konisches Rädchen, dessen Zähne sowohl in d als auch in e eingreifen. Es dreht sich um einen Zapfen, der am Ende der Verlängerung von f angebracht ist. Wird die Kurbel f einmal herumgedreht, so macht die Axe a und das damit verbundene Schwungrad gleichzeitig zwei Umdrehungen. Von einem praktischen Werth ist diese Anordnung nicht.

Uebersetzungskurbel mit Stirnrädern.

Fig. 11, Tafel XIX. a ist eine Axe, die sich in Lagern dreht und mit welcher das Schwungrad c und das Rädchen d verbunden sind. g ist ein an das Gestell geschraubtes unbewegliches Rad. h eine Kurbel, die sich frei auf a dreht. Sie ist über die Axe a hinaus verlängert und diese Verlängerung dient als Lager für eine Axe, mit welcher die Räder e und f verbunden sind. f greift in g, e greift in d ein. Wird die Kurbel einmal herumgedreht, so macht f einen Umlauf und dreht sich gleichzeitig $\frac{g}{f}$ mal um seine Axe. Dadurch wird die Axe a, $\frac{g}{f}\,\frac{e}{d} - 1$ mal gedreht, und die Drehungsrichtungen von h und a sind einander entgegengesetzt. Auch dieser Mechanismus wird wohl kaum jemals einen Nutzen gewähren.

Das Rädergehänge.

Fig. 12, Tafel XIX. Dieser Mechanismus ist bestimmt, die drehende Bewegung von einer fixen Axe a aus auf eine ihren Ort verändernde Axe c zu übertragen. Dies geschieht durch mehrere Stirnräder n, k, l, m, p, deren Axen in Schienen gelagert sind, die gegen einander eine Winkelbewegung machen können. Wird n gedreht und die Axe c gleichzeitig in einer auf die Ebene der Figur senkrechten Lage (innerhalb gewisser Grenzen) bewegt, so entsteht in c eine rotirende Bewegung, die (nahe) so ist, wie wenn n unmittelbar auf p einwirkte. Dieses Rädergehänge ist für die *Banc-à-Broches*-Spinnmaschine ausgedacht worden und leistet da gute Dienste.

Gleichzeitige Drehung eines Körpers um zwei Axen.

Fig. 13, Tafel XIX. a ist eine mit einer Axe b versehene Kugel. Die Axe b ist in einem Ring c gelagert, der mit einer Axe e versehen ist. An den Ring c ist ein Lager h befestigt, in welchem sich eine Axe mit zwei Stirnrädern i und k dreht. g ist ein unbewegliches, an das Gestell des Mechanismus festgeschraubtes Rad. Wird die Axe e gedreht, so nimmt dieselbe den Ring c, die Kugel a, das Lager h und die Räder f k i mit herum, und wenn das Rad g nicht vorhandenen wäre, würde der genannte Körper nur eine gemeinsame drehende Bewegung mit der Axe e erhalten. Allein weil das Rad g unbeweglich ist, bleibt das Rad i mit seinen Zähnen in den Zähnen des Rades g hängen, was zur Folge hat, dass i auf g herumrollt. Dadurch entsteht nun eine drehende Bewegung von k und f und endlich der Axe b mit der Kugel. Diese erhält also 1) eine drehende Bewegung um die Axe e und 2) eine drehende Bewegung um die darauf senkrechte Axe b. Bei einer Umdrehung von e macht die Kugel a eine Umdrehung um e und $\frac{g}{i}\,\frac{k}{f}$ Umdrehungen um b.

Unrunde Räder.

Theorie derselben. Es seien, Fig. 14, Tafel XIX., S und S_1 zwei mit den Axen A, A_1 verbundene nicht kreisförmige Scheiben von solcher Gestaltung, dass dieselben ähnlich wie die Theilkreise gewöhnlicher Stirnräder auf einander rollen, wenn jede dieser Axen nach einem gewissen Gesetz gedreht wird. Die Linien, nach welchen derlei Scheiben gestaltet werden müssen, um aufeinander rollen zu können, werden Roll-Linien genannt. Das charakteristische Merkmal dieser Linien ist 1) dass sie sich in jedem Augenblick der Bewegung der Axen in einem Punkt berühren, 2) dass die Bogenlängen, um welche die Berührungspunkte auf beiden Scheiben in einer bestimmten Zeit fortschreiten, gleich gross sind. Versieht man solche nach Rolllinien gebildete Scheiben mit Zähnen, so entstehen unrunde Zahnräder, die die Eigenschaft besitzen, dass durch die nach einem bestimmten Gesetz erfolgende Drehung einer Axe A eine drehende Bewegung nach einem bestimmten andern Gesetz in der zweiten Axe A_1 eintritt. Derlei Räder können also namentlich gebraucht werden, um durch eine gleichförmig drehende Bewegung einer Axe A eine nach einem vorgeschriebenen Gesetz erfolgende ungleichförmige Drehung einer zweiten Axe A_1 hervorzubringen. Diese Rollungslinie kann auf folgende Weise bestimmt werden. Es seien, Fig. 15, Tafel XIX., A, A_1 die Axen der Räder, $D\,E$, $D_1\,E_1$ die Rollungslinien in einer bestimmten Position, in der sich dieselben in dem in $A\,A_1$ liegenden Punkt B berühren. Schneidet man von B aus auf $B\,D$ und $B\,D_1$ zwei unendlich kleine Bogenlängen $B\,C$ und $B\,C_1$ von gleicher Länge ab und zieht die Radien $A\,C$ und $A_1\,C_1$, so sind C und C_1 die Punkte, welche in Berührung treten müssen, wenn die beiden Räder um die Winkel $C\,A\,B = d\,\varphi$ und $C_1\,A_1\,B_1 = d\,\varphi_1$ niederwärts gedreht werden, damit aber die Berührung in den Punkten C und C_1 möglich ist, muss sein: 1) $\overline{A\,C} + \overline{A_1\,C_1} = \overline{A\,A_1}$, 2) müssen die Winkel, welche die Radien AC und $A_1 C_1$ mit den Tangenten bilden, die durch C und C_1 an die Rolllinien gezogen werden können, gleich gross sein. Diesen Bedingungen wird entsprochen, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho + \varrho_1 = D \\ \varrho \, d\varphi = \varrho_1 \, d\varphi_1 \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (1)$$

wobei $\overline{AC} = \varrho$, $\overline{A_1 C_1} = \varrho_1$, $\overline{AA_1} = D$.

Wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem sich die Axe A_1 drehen soll, wenn A gleichförmig gedreht wird, kennt man φ_1 als Funktion von φ. Drückt man dieses Gesetz durch

$$\varphi_1 = \text{funkt.}\,(\varphi) \dots\dots\dots\dots (2)$$

aus, so kann man vermittelst der Gleichungen (1) und (2) jederzeit die Rolllinien bestimmen, denn es folgt aus (1):

$$\left.\begin{array}{l} \varrho = \dfrac{D}{1 + \dfrac{d\varphi}{d\varphi_1}} \\ \\ \varrho_1 = \dfrac{D}{1 + \dfrac{d\varphi_1}{d\varphi}} \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (3)$$

Differenzirt man die Gleichung (2), so erhält man einen Differenzialausdruck, aus welchem $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ als Funktion von φ gefunden wird, und wenn man in demselben vermittelst (2) φ durch φ_1 ausdrückt, so erhält man den Quotienten $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ durch φ_1 ausgedrückt. Substituirt man diese Werthe von $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ und von $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ in die Gleichungen (3), so bestimmt die erstere ϱ als Funktion von φ und letztere ϱ_1 als Funktion von φ_1 und dies sind eben die in Polarcoordinaten ausgedrückten Gleichungen der beiden Rolllinien.

Anwendung dieser Theorie. Legen wir uns die Aufgabe vor, zwei unrunde Räder so zu construiren, dass denselben folgende Eigenschaften zukommen.

1) Das Rad, welchem die Elemente ϱ und φ entsprechen, soll m, jenes, dem die Elemente ϱ_1 und φ_1 zukommen, soll m_1 Polygonseiten erhalten. Es sei $m_1 > m$, so dass der Quotient $\frac{m_1}{m} = i$ die Uebersetzungszahl ausdrückt.
2) Das Bewegungsgesetz für das Rad $\varphi_1 \, \varrho_1$ sei

$$\varphi_1 = \mathfrak{A}\,\varphi + \mathfrak{B} \sin k\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ k die vorläufig noch unbestimmten Constanten bezeichnen.

Bei diesem Gesetz ist die Bewegung des zweiten Rades eine schwingend fortschreitende, wenn die Bewegung des ersten Rades mit Gleichförmigkeit erfolgt.

Aus (4) folgt

$$\frac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Führt man diesen Werth in die zweite der Gleichungen (3) ein, so erhält man

$$\varrho_1 = \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Vermöge der oben ausgesprochenen Bedingung muss für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ werden, muss ferner der Werth von ϱ_1 für $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ oder für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ gleich werden dem Werth von ϱ_1 für $\varphi = o$. Dies ist vermöge (4) und (6) der Fall, wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{m_1} &= \mathfrak{A}\,\frac{2\pi}{m} + \mathfrak{B} \sin k\,\frac{2\pi}{m} \\ \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k} &= \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\frac{2\pi}{m}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned} k &= m \\ \mathfrak{A} &= \frac{m}{m_1} = \frac{1}{i} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Hiermit sind nun zwei von den drei Constanten k $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ bestimmt. Die dritte Constante $\mathfrak{B}$ kann man so bestimmen, dass das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des mit ungleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Rades einen gewissen Werth γ hat.

Für die grösste Winkelgeschwindigkeit ist vermöge (5) $\cos k\,\varphi = 1$, für die kleinste $\cos k\,\varphi = -1$, man hat daher:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,k}$$

Führt man hier für k und $\mathfrak{A}$ den Werth aus (8) ein, sucht hierauf $\mathfrak{B}$ und berücksichtigt, dass $m\,i = m_1$ ist, so findet man:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{m_1}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Führt man diese Werthe von $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ k, welche die Gleichungen (8) und (9) darbieten in (4) und (6) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{i}\left(\varphi + \frac{1}{m}\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sin m\,\varphi\right) \\ \varrho_1 &= \frac{i\,D}{1 + i + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cos m\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Um vermittelst dieser Gleichungen die beiden Rolllinien der Räder zu verzeichnen, verfährt man wie folgt: Man nimmt eine Reihe von Werthen von φ an und berechnet vermittelst (10) den entsprechenden Werth von φ_1 und ϱ_1, wodurch zunächst die zweite Rolllinie gezeichnet werden kann. Nimmt man dann die Differenz $D - \varrho_1 = \varrho$, so erhält man auch die den Werthen von φ entsprechenden Radienvektoren der ersten Rolllinie.

Nimmt man z. B. an $m = m_1 = 1$, $i = 1$, $\gamma = 4$, so gibt die Gleichung (10):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{3}{5}\sin\varphi \\ \varrho_1 &= \frac{5\,D}{10 + 3\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Fig. 16, Tafel XIX. zeigt die Räder, welche sich für diese Annahmen ergeben.

Von der Richtigkeit der Construktion überzeugt man sich bald, wenn man die Rolllinien genau verzeichnet und sodann nachsieht, ob die Peripherielängen der beiden Räder genau gleich gross sind. Dies wird der Fall sein, wenn die Verzeichnung sorgfältig durchgeführt worden ist.

Nimmt man an $m = m_1 = 4$, $i = 1$, $\gamma = 2$, Fig. 1, Tafel XX., so gibt die Gleichung (10):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{1}{8}\sin 4\,\varphi \\ \varrho_1 &= \frac{3\,D}{6 + \cos 4\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ellyptische Räder.

Zwei congruente ellyptische Räder, Fig. 2, Tafel XX., können sich ebenfalls bewegen, wenn die Drehungsaxen durch die Brennpunkte gehen. Das durch solche Räder entstehende Drehungsgesetz kann auch durch die für unrunde Räder aufgestellte charakteristische Gleichung (3) bestimmt werden; es erfordert jedoch eine ziemlich weitläufige Rechnung, die wir nicht vornehmen wollen. Nennt man a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellypse eines solchen Rades, m das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades bei einer gleichförmigen Geschwindigkeit des treibenden Rades, so ist der grösste Radiusvektor $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ und der kleinste $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Das grösste Uebersetzungsverhältniss ist demnach $\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$ und das kleinste $\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$. Das Verhältniss m dieser Uebersetzungsverhältnisse ist demnach:

$$m = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2$$

demnach:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} - 1}{m^{\frac{1}{2}} + 1}\right)^2}$$

Soll z. B. die grösste Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades viermal so gross sein als die kleinste, so ist $m = 4$ und dann wird:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

Das Einzahnrad.

Fig. 3, Tafel XX. c ist eine mit einer Axe a verbundene Scheibe, an welcher ein einzelner Zahn d angebracht ist. g ist ein Sternrad mit 6 Zahnlücken e und mit 6 bogenförmigen Theilen f. Die Halbmesser dieser Bogen f stimmen mit dem Halbmesser der Scheibe c überein, und die Summe aus dem Halbmesser von c und dem Abstand $b\,h$ ist gleich der Entfernung der Axen a und b. Wird das Rad c gedreht, so schreitet das Rad g bei jeder Umdrehung von c um eine Sternseite weiter, allein diese Bewegung erfogLt nicht stetig, sondern mit Unterbrechungen. Das Rad g bewegt sich nämlich nur dann, wenn der Zahn d in eine Lücke e zu stehen kommt, und bleibt ruhig, wenn einer von den Bogen f mit der Rundung von c zusammenfällt. Dieser Mechanismus kann zu Zählwerken oder auch zu Schaltungen gebraucht werden.

Rollen.

Bei einem Riementrieb kommt es vor allem Anderen darauf an, die Rollen in solche Stellung zu bringen, dass der Riemen auf jede Rolle in richtiger Weise aufläuft. Hierzu ist erforderlich, dass das Mittel eines nach einer Rolle hin laufenden Riemenstückes in der mittlern Ebene dieser Rolle liegt, sodann ist auch noch nothwendig, dass die Rollenumfänge nicht cylindrisch, sondern in der Mitte etwas erhöht gemacht werden, damit die Berührung zwischen dem Riemen und der Rolle nur in der Mitte statt findet, denn so wie der Rand des Riemens mit der Rolle in Berührung kommt, fällt der Riemen jederzeit von der Rolle ab. Es folgen nun mehrere Beispiele über Riementriebe.

Gewöhnlicher Riementrieb.

Fig. 4, Tafel XX. Bei dem gewöhnlichen Riementrieb stimmen die Bewegungsrichtungen der beiden Rollen überein und verhalten sich die Umdrehungen der Rollen in einer Minute verkehrt wie die Halbmesser der Rollen.

Riementrieb mit geschränktem Riemen.

Fig. 5, Tafel XX. Wird der Riemen kreuzweise um die Rollen angelegt, so sind die Bewegungsrichtungen der Rollen entgegengesetzt.

Riementrieb für zwei Axen, die nicht parallel sind und sich nicht schneiden.

Fig. 6, Tafel XX. Aufriss, Fig. 7 Grundriss. Die Ebene des Grundrisses ist mit den beiden Axen parallel. Die Orte, an welchen die Rollen mit den Axen verbunden sind, sind so gewählt, dass die Durchschnittslinie L der mittleren Ebenen der Rollen die mittleren Rollenkreise berührt. Damit der Riemen auf beide Rollen richtig aufläuft, muss die Bewegung nach der Richtung erfolgen, die durch die Pfeile angedeutet ist; auch darf die Entfernung der Axen nicht