Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Abrundung der Zähne nach Kreisbögen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

wirkung wiederum in eine richtige Position gelangen, wenn man die Theilrisse beider Räder um gleich viel fortbewegt, was eben die charakteristische Eigenschaft der wahren Zahnkurven ist.

Man kann auch die Construktion umkehren, indem man von dem convexen Zahn $a\,m_1\,p_1$ ausgeht und die concave Form $a\,m\,p$ sucht, allein dann findet man nicht für jede beliebig angenommene Convexität eine correspondirende Concavität, sondern nur dann, wenn die Convexität so stark gekrümmt ist, dass alle Normalen $m_1\,n_1$ den Kreis K durchschneiden. Nimmt man für $a\,m_1\,p_1$ einen Bogen der Evolvente des Kreises K und zieht sämmtliche Normalen, so berühren dieselben den Kreis K. Diese Kreisevolvente ist daher in dieser Hinsicht eine Grenzform, die bestimmt, wie stark gekrümmt eine Convexität genommen werden muss, damit eine entsprechende Concavität gefunden werden kann.

Abrundung der Zähne nach Kreisbögen.

Zu jeder ganz exakten Verzahnungsart kann man eine Annäherungsconstruktion mit Kreisbögen auffinden, und es gibt eine allgemeine Methode, vermittelst welcher die absolut besten Abrundungshalbmesser gefunden werden können.

Ist nämlich eine mathematisch richtige Zahnkurve und sucht man den wahren mittleren Werth des Krümmungshalbmessers, der der ganzen Zahnkrümmung entspricht, so ist dies der absolut beste Abrundungshalbmesser, wenn man kreisbogenförmige Zähne statt der exakten Form Z machen will. Wir wollen dieses Verfahren anwenden, um für die zweite Verzahnung mit geradlinigen Einschnitten und mit Epicycloiden die beste Kreisbogenverzahnung zu finden. Hierzu ist aber nothwendig, dass wir zuerst die Gleichungen einer Epicycloide aufstellen.

Es sei $\widehat{a\,m}$, Fig. 2, Tafel XVIII., der epicycloidische Bogen, welchen der Punkt m des Kreises k beschrieben hat, während derselbe von a bis b auf dem Kreis K fortgerollt ist.

Nehmen wir $C\,a\,x$ als Abscissenaxe und nennen:

A den Halbmesser des Kreises K, a den Halbmesser des Kreises k, $C\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines Punktes m der Epicycloide. $\frac{A}{a} = i$, $\widehat{a\,C\,b} = \psi$, so findet man leicht für x und y nachstehenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} x &= (A + a) \cos \psi - a \cos (i + 1)\, \psi \\ y &= (A + a) \sin \psi - a \sin (i + 1)\, \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus findet man für den wahren Werth des Krümmungshalbmessers, der dem Punkt m der Epicycloide entspricht, folgenden Ausdruck:

$$\varrho = 4\, a\, \frac{i+1}{i+2} \sin \frac{1}{2}\, i\, \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man findet diesen Ausdruck auch ohne Mühe, wenn man das früher erklärte Verfahren zur Verzeichnung einer Epicycloide beachtet.

Bezeichnet man nun durch ϱ_m den wahren *mittleren* Krümmungshalbmesser, welcher dem Epicycloidenbogen entspricht, der durch Wälzung des Kreises k auf einem Bogen des Kreises K entsteht, der einem Centralwinkel α entspricht, so hat man nach dem Begriff von dem mittleren Werth einer Grösse

$$\varrho_m = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \varrho\, d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Führt man den Werth von ϱ aus (2) ein, so folgt

$$\varrho_m = 4\, \frac{a}{\alpha}\, \frac{i+1}{i+2} \int_0^\alpha \sin \frac{1}{2}\, i\, \psi\, d\psi$$

Das Resultat dieser Integration gibt

$$\varrho_m = 8\, \frac{a}{\alpha}\, \frac{i+1}{i\,(i+2)} \left[1 - \cos \frac{1}{2}\, i\, \alpha\right]$$

oder auch, weil $1 - \cos \frac{1}{2}\, i\, \alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{4}\, i\, \alpha$ ist:

$$\varrho_m = 16\, \frac{a}{\alpha}\, \frac{i+1}{i\,(i+2)} \sin^2 \frac{1}{4}\, i\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Allein bei allen Verzahnungen ist $\frac{i\,\alpha}{4}$ eine kleine Grösse, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn man annähernd

$$\sin \frac{1}{4}\, i\, \alpha = \frac{1}{4}\, i\, \alpha, \quad \sin^2 \frac{1}{4}\, i\, \alpha = \frac{1}{16}\, i^2 \alpha^2$$

setzt, und dann findet man:

$$\varrho_m = a\, i\, \alpha \left(\frac{i+1}{i+2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wenden wir dieses Ergebniss auf eine Verzahnung an mit geradlinigen Einschnitten und mit Epicycloiden.

Es seien R und r die Halbmesser der Theilrisse der Räder, t eine Zahntheilung, $\frac{R}{r} = n$, und nehmen wir eine Construktion an, bei welcher sich je zwei Zähne um eine Theilung vor und um eine Theilung nach der Centrallinie bewegen, so ist in diesem Fall zu setzen für die Zähne des Rades R:

$$i = \frac{R}{\frac{1}{2} r} = 2n, \quad ai\alpha = t$$

Demnach folgt aus (5):

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right) = t \frac{2n + 1}{2n + 2}$$

Dagegen ist für die Zähne des Rades r zu setzen:

$$i = \frac{r}{\frac{1}{2} R} = \frac{2}{n}, \quad ai\alpha = t$$

und wir erhalten:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right) = t \frac{2 + n}{2 + 2n}$$

Dies sind die in den Resultaten Seite 10 angegebenen Regeln für die Bestimmung der Kreisbogen-Verzahnung.

Hat man den Abrundungshalbmesser nach dieser Regel berechnet, so ergibt sich dann die Verzeichnung in ähnlicher Weise, wie bei der zweiten Verzahnungsart. Man verzeichnet, Fig. 3, Tafel XVIII., die vier Kreise K k, $\frac{1}{2}$ K, $\frac{1}{2}$ k, macht $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1} = \widehat{ae_2} = \widehat{ad_2} =$ einer Theilung. Beschreibt man nun mit einer Zirkelöffnung gleich $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ aus den Punkten a_1 und c_1 als Mittelpunkt Kreisbogen und sucht ihren Durchschnittspunkt, so ist dieser der Einsatzpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ die Rundung a_1 c_1 zu verzeichnen ist.

Beschreibt man ferner mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ aus e_2 und d_2 Kreisbogen, so ist der Durchschnittspunkt derselben, der Einsatzpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ die Abrundung e_2 d_2 gezogen werden muss. Die Einsatzpunkte für alle anderen Abrundungen ergeben sich, indem man durch den Einsatzpunkt für a_1 c_1

einen zu K und durch den Einsatzpunkt für c_2 d_2 einen zu k concentrischen Kreis zieht, sodann aus den Punkten a_1 a a_2 . . . mit einer Zirkelöffnung $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ und aus den Punkten d_2 a d_1 . . . mit einer Zirkelöffnung $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ in diese Kreise einschneidet. Die geradlinigen Einschnitte zieht man tangirend an die Kreisbogen und die Kreise, in welchen die Punkte b b_1 b_2, so wie f f_1 f_2 . . . . liegen, ergeben sich durch die Zahnlängen.

Verzahnung der Kegelräder.

Es seien, Fig. 4, Tafel XVIII., S C O und s c O die beiden Axen, die durch Kegelräder in Verbindung gesetzt werden sollen, O ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Denken wir uns von dem Punkt O aus eine Linie O x so gezogen, dass die von einem beliebigen Punkt A dieser Linie auf die Axen O S und O s gefällten Perpendikel A C und A c sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten, mit welchen sich die Axen drehen sollen, und errichten wir ferner in A auf O x und in der Ebene der Axen eine Senkrechte, welche die Axen in S und s schneidet, so entstehen zwei Doppeldreiecke S C A, C A O und A s c, A O c. Werden diese Doppeldreiecke um die Axen O S und O s herumgedreht, so entstehen zwei Doppelkegel E, G und e, g. Wir nennen die Kegel G, g, die sich längs der Linie A O berühren, Grundkegel, dagegen die Kegel E, e, die längs der Linie S A s eine gemeinschaftliche tangirende Ebene haben, Ergänzungskegel.

Werden die Grundkegel gegeneinander gepresst, und wird hierauf einer derselben um seine Axe gedreht, so entsteht auch in dem andern Kegel durch die an der Linie O A statt findende Reibung eine drehende Bewegung, und es ist leicht zu erkennen, dass sich dabei die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen O S und O s verkehrt wie die Halbmesser A C und A c verhalten werden. Versieht man aber die beiden Kegel G und g mit passend geformten Zähnen, so kann durch das Aufeinanderwirken derselben eine Bewegungsmittheilung hervorgebracht werden, die ganz identisch ist mit derjenigen, die durch das Aufeinanderrollen der Grundkegel entsteht. Die mathematisch genaue Form dieser Zähne ist eine äusserst complizirte; eine für praktische Zwecke hinreichend genaue Verzahnung ergibt sich auf folgende Weise.

Der Eingriff der Zähne findet nur in der Nähe der Linie S A s statt. Sieht man den Kegel nach der Richtung x O an und richtet