Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Vierte Verzahnung mit Kreisevolventen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

schnitte ist also für die Ausführung zu empfehlen, und wird auch thatsächlich vorherrschend angewendet.

Dritte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden.

Es seien, Fig. 3, Tafel XVII., $K\,k$ die Theilkreise der Räder, $K_1\,k_1$ zwei andere Kreise von ganz beliebigen Halbmessern. Alle vier Kreise berühren sich in a, ihre Mittelpunkte liegen daher in der Verbindungslinie $C\,c$. Machen wir $\widehat{ac_1} = \widehat{ae_2} =$ einer Zahntheilung, und rollen den Kreis k_1 auf K und in k, ferner den Kreis k_1 auf k und in K, so beschreibt der Punkt c_1 (beim Rollen auf K) die Epicycloide $c_1\,a_1$ und (beim Rollen in k) die Hipocycloide $c_1\,d_1$ und dann beschreibt ferner der Punkt e_2 (beim Rollen auf k) die Epicycloide $e_2\,d_2$ und (beim Rollen in K) die Hypocycloide $e_2\,a_2$.

Offenbar ist $\widehat{ac_1} = \widehat{ad_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{aa_2} = \widehat{ad_2}$, berühren sich die Bogen $c_1\,d_1$ $c_1\,a_1$ in e_1 und die Bogen $a_2\,c_2$ $e_2\,d_2$ in e_2, denn die Sehne $\overline{c_1 a}$ ist sowohl die Normale zu dem Punkte c_1 der Hypo- wie der Epicycloide und die Sehne $a\,e_2$ ist die Normale zu dem Punkte e_2 der Hypo- wie Epicycloide. Vervollständigt man die Zeichnung durch Wiederholung der Formen, so entsteht die in Fig. 3, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass dieselbe die richtigen geometrischen Eigenschaften besitzt. Denn nicht nur für die in der Zeichnung dargestellte Position der Zähne, sondern auch für jede andere ist es wahr, dass $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{ad_2}$.

Die ganze Wirkung zweier Zähne während der Dauer ihres Eingriffs ist nun folgende. Von Z_2 bis Z wirkt die Hypocycloide $\overline{a_2\,e_2}$ auf die Epicycloide $e_2\,d_2$ ein; von z bis z_1 hingegen wirkt die Epicycloide $a\,c$ auf die Hypocycloide $a\,b$.

In Betreff der Abnützung ist diese Verzahnung ungefähr so gut wie die vorhergehende.

Will man die Construktion so anordnen, dass sich die Zähne nicht durch zwei Theilungen, sondern durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie bewegen können, so hat man nur die Construktion in der Weise durchzuführen, dass man $a\,c_1 = \beta$ $\widehat{a\,e_2} = \alpha$ macht und im Uebrigen verfährt, wie früher angegeben wurde.

Vierte Verzahnung mit Kreisevolventen.

Man erhält auch eine richtige Verzahnung, wenn man die Zähne nach den Evolventen zweier Kreise abrundet, deren Halbmesser sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder verhalten.

Hiervon überzeugt man sich vermittelst Fig. 4, Tafel XVII., auf folgende Weise. In dieser Figur sind K k zwei Kreise, deren Halbmesser sich verkehrt verhalten wie die Winkelgeschwindigkeiten, c C die Verbindungslinie der Mittelpunkte, T t die den beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente. Werden die beiden Kreise mit Zahnformen versehen, die mit den Kreisevolventen übereinstimmen, welche sich ergeben, wenn man die beiden Kreise K und k nach entgegengesetzter Richtung abwickelt, und werden hierauf die Zähne in Berührung gebracht, so fällt der Berührungspunkt stets in die gemeinschaftliche Tangente T t. Denn zieht man durch den Berührungspunkt der Evolventen die Normallinien, so müssen diese in eine gerade Linie fallen und jede derselben muss einen der beiden Kreise berühren; dies ist aber nur dann möglich, wenn der Berührungspunkt in einen Punkt der Geraden T t fällt.

Sind also e b, e_1 b_1 zwei auf einander folgende Positionen eines Zahnes von k, *f* g, f_1 g_1 die correspondirenden Positionen des Zahnes von K, so sind d und d_1 die Berührungspunkte der Zähne. Nun sind b b_1 und *f* f_1 die Wege, um welche die Zähne gleichzeitig vorrücken und diese sind gleich gross, denn es ist sowohl b b_1 als auch *f* f_1 gleich d d_1.

Die Bewegung der Kreise erfolgt also durch die Einwirkung der Zähne so, dass ein Punkt in der Peripherie von K einen eben so grossen Weg zurücklegt, als ein Punkt in der Peripherie von k oder die Peripheriegeschwindigkeiten der Kreise K und k sind gleich gross, und daher entsteht in der That eine Bewegung, bei der sich die Winkelgeschwindigkeiten verkehrt wie die Halbmesser K k verhalten. Oder die Bewegung erfolgt so, wie wenn die Kreise K k sich berührten und auf einander rollten.

Fig. 5, Tafel XVII. stellt eine Evolventenverzahnung vor, bei welcher sich je zwei Zähne durch zwei Theilungen bewegen.

Es ist t a = a b = einer Theilung; die Evolventenbögen der Zähne z z_1 z_2 .. entsprechen also der Abwicklung eines Bogens von k gleich der Länge von zwei Theilungen. Die Evolventenbögen der Zähne Z Z_1 Z_2 dagegen entsprechen der Abwicklung einer Bogenlänge des Kreises K gleich der Länge T t. Erfolgt die Bewegung nach den Richtungen der Pfeile, so treten zwei Zähne in Berührung, wenn sie die Positionen Z und z erreicht haben, und verlassen sich wiederum, wenn sie nach Z_2 und z_2 gekommen sind. Die Zwischenposition Z_1 z_1 ist diejenige, wobei der Berührungspunkt in den Durchschnittspunkt a der Linie C c und T t fällt. Dieser Punkt a theilt die Linie C c im Verhältniss der Halbmesser der Kreise K und k.

Damit die Einwirkung zweier Zähne genau durch zwei Theilungen stattfindet, müssen die Halbmesser der Kreise k und K ganz bestimmte Längen haben, die auf folgende Weise gefunden werden können.

Man verzeichnet einen Theilungswinkel x c y der Verzahnung des Kreises k, beschreibt mit einem willkürlichen Halbmesser c u = c v einen Bogen, zieht an u die Tangente u s und schneidet auf derselben von u an ein gerades Stück u w ab so lange als der Bogen u v. Nun zieht man c w, verlängert diese Linie, trägt von c aus die Entfernung c C der Axen auf, theilt diese Linie in dem Punkt a im umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen, fällt von a aus auf c y den Perpendikel a t, verlängert denselben nach rückwärts, und fällt endlich von C aus den Perpendikel C T, dann sind c t = k und C T = K die Halbmesser der Kreise, von welchen die Evolventen gebildet werden müssen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erkennt man durch Vergleichung der Figuren 5 und 6, Tafel XVII., denn es ist Figur 5 die fertige, Figur 6 dagegen die im Entstehen befindliche Construktion.

Da der Winkel x c a jederzeit sehr klein ist und gegen a c t vernachlässigt werden kann, so findet man auch die Halbmesser k und K mit hinreichender Genauigkeit durch folgende einfache Construktion. Man ziehe die Centrumlinie C c, Fig. 7, theile dieselbe bei a im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten der Räder, zeichne den Winkel C c y_1 gleich einem Theilungswinkel einer Zahntheilung von k, fälle von a auf c y_1 den Perpendikel a t_1, verlängere denselben nach rückwärts und fälle von C aus den Perpendikel C T_1, so ist annähernd C T_1 = K, c t_1 = k; setzt man mit diesen etwas unrichtigen Halbmessern die Construktion fort, so erhält man schliesslich eine geometrisch vollkommen richtige Verzahnung, bei welcher aber die Einwirkung zweier Zähne nicht genau durch zwei Theilungen erfolgt, sondern nur annähernd, was durchaus keine praktischen Nachtheile hat.

Wollte man die Construktion so einrichten, dass sich zwei Zähne durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie zu bewegen im Stande wären, so müsste man die Construktion, welche für die Einwirkung durch zwei Theilungen beschrieben wurde, wiederholen, dabei aber a t = α und $\widehat{x c t}$ gleich dem Winkel machen, der dem Bogen α entspricht, dann aber muss ferner die Zahnlänge von z_2 dadurch bestimmt werden, indem man $ab = \beta$ macht.

Diese Evolventenverzahnung hat folgende praktisch wichtige Eigenschaften.

1) Alle Räder, die mit Evolventenzähnen versehen sind und gleiche Theilung haben, können einander richtig bewegen. Die Richtigkeit dieses Satzes wird man leicht erkennen, wenn man bedenkt, dass die Form eines Evolventenzahnes nur allein von dem Kreis abhängt, durch dessen Abwicklung die Evolvente gebildet wird. Den epicycloidischen Zähnen kommt diese Eigenschaft nicht zu, denn die epicycloidische Form eines Zahnes hängt nicht nur von der Grösse des Theilrisses des Rades, sondern auch von dem Theilriss des Getriebes ab. Wenn also ein Stirnrad mehrere Getriebe von ungleicher Grösse bewegen soll, so kann dies mit Evolventenzähnen, nicht aber mit epicycloidischen Zähnen bewerkstelligt werden.

2) Die Entfernung der Axen der Räder kann unbeschadet des richtigen Zahneingriffes innerhalb gewisser Grenzen verändert werden, nur wird durch eine solche Veränderung der Axendistanz die Dauer des Eingriffs verändert. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus dem Seite 320 geführten Beweis, welcher von der Entfernung der Axen nicht abhängt. Diese Eigenschaft ist von praktischem Werth, weil dadurch die Aufstellung des Räderwerkes erleichtert wird, indem eine kleine Aenderung in der Axendistanz keine fehlerhafte Bewegung verursacht. Räder, die mit epicycloidischen Zähnen versehen sind, müssen dagegen äusserst genau in der Weise aufgestellt werden, dass sich die Theilrisse berühren, indem nur bei einer solchen Gegeneinanderstellung der Räder eine richtige Bewegung eintreten kann.

3) Evolventenzähne werden durch Abnützung nur äusserst wenig deformirt. Diese praktisch wichtige Eigenschaft beruht darauf, dass bei einer Evolventenverzahnung die wechselseitige Pressung zwischen den im Eingriff befindlichen Zähnen während der ganzen Dauer des Eingriffs stets den gleichen Werth hat, indem die Richtung dieser Pressung stets in die Tangente Tt fällt, folglich ihr numerischer Werth gleich $\frac{M}{R}$ ist, wobei M das statische Moment der Kraft bezeichnet, welche die Axe C treibt und R den Halbmesser des Kreises K ausdrückt. Wegen dieses constanten Druckes ist die Form, welche durch Abnützung entsteht, eine äquidistante Linie, zur ursprünglichen Form daher von dieser letzteren nur äusserst wenig und in allen Punkten um gleich wenig abweichend.

4) Alle Evolventenzähne sind geometrisch ähnliche Formen und können deshalb am leichtesten durch Maschinen richtig geschnitten werden. Diese Eigenschaft wird einstens von sehr grosser praktischer Wichtigkeit werden, wenn man einmal ernstlich die Aufgabe in Angriff nehmen wird, Räderschneidemaschinen herzustellen, die unfehlbar richtige Zahnformen liefern.

Ausser diesen vier Eigenschaften besitzen die Evolventenzähne noch mehrere andere, die ebenfalls von Werth sind, deren Richtigkeit jedoch nicht so leicht nachgewiesen werden kann. Ungünstige Eigenschaften sind nicht bekannt; die Evolventenverzahnung verdient daher für die Ausführung bestens empfohlen zu werden.

Fünfte Verzahnung. Allgemeine Methode.

Wenn die Zahnform des einen Rades beliebig angenommen wird, kann man immer eine entsprechende Zahnform für das zweite Rad ausfindig machen, und zwar auf folgende Weise.

Es seien, Fig. 1, Tafel XVIII., $C\ c$ die Mittelpunkte der Räder, K und k ihre Theilkreise, a der Berührungspunkt derselben, $a\,m\,p$ ein im Rade k angebrachter krummliniger Einschnitt von irgend einer Form. Nimmt man in $a\,p$ einen beliebigen Punkt m an, verzeichnet die zum Punkt m der Kurve $a\,p$ gehörige Normale $m\,n$, schneidet auf K von a an ein Bogenstück $a\,n_1$ gleich dem Bogen $a\,n$ ab, zieht durch n_1 eine gerade Linie, welche den Kreis K unter einem Winkel schneidet, der gleich ist dem Winkel, unter welchem der Kreis k durch die Normale $m\,n$ geschnitten wird, und macht endlich $\overline{m_1 n_1} = \overline{m\,n}$, so ist m_1 ein Punkt der Kurve $a\,m_1\,p_1$, nach welcher der Zahn des Rades K geformt werden muss, um auf die Höhlung $a\,m\,p$ richtig einwirken zu können. Wiederholt man die so eben beschriebene Construktion, indem man in der Kurve $a\,m\,p$ mehrere Punkte annimmt, so erhält man eine Reihenfolge von Punkten der Kurve $a\,m_1\,p_1$.

Die Richtigkeit dieser Construktion erkennt man auf folgende Weise. Denken wir uns, dass die Räder $K\ k$ um ihre Axen gedreht werden, bis n und n_1 in a zusammen fallen, so werden auch die Linien $m\,n$ und $m_1\,n_1$ zusammen fallen, denn diese Linien sind gleich lang und die Winkel, unter welchen sie die Kreise k und K durchschneiden, sind gleich gross gemacht worden.

Allein wenn die Linien $m\,n$ und $m_1\,n_1$ zusammenfallen, berühren sich die Kurven in den Punkten m und m_1, d. h. die beiden Zähne befinden sich in einer Position ihrer Wechselwirkung. Nun ist aber $\widehat{a\,n} = \widehat{a\,n_1}$ und folglich haben die verzeichneten Zähne die Eigenschaft, dass sie aus einer richtigen Position ihrer Wechsel-