Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Zweite Verzahnung. Epicycloiden und radiale Einschnitte

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Lücken zwischen zwei Zähnen sind kreisbogenförmig, was übrigens nicht wesentlich ist, indem die Fläche der Aushöhlung mit dem Triebstock nicht in Berührung kommt. Die Lückenweite ist etwas grösser als der Durchmesser eines Triebstockes, damit nicht leicht eine Einklemmung eintritt. Bei mathematisch richtiger Form würde aber auch das Einklemmen nicht statt finden, wenn die Zahnlücke genau so weit wäre, als der Durchmesser eines Triebstockes.

Fragen wir nach dem praktischen Werth dieser Construktion, so können wir diesen nicht hoch anschlagen, weil der Triebstock nothwendig sehr bald seine runde Form verliert. Während ein Zahn aus der Position z_2 in die Position z_1 fortrückt, streicht der Triebstock auf der Zahnfläche hinaus, und zwar mit zunehmender relativer Geschwindigkeit. Dabei ist aber der Druck zwischen dem Zahn und dem Triebstock nicht constant, sondern fortwährend zunehmend. In der Position z_1 z. B. drückt der Zahn z_1 den Triebstock nach der Richtung $a\,\gamma_1\,c_1$. Fällt man von C aus auf die Verlängerung von $c_1\,a$ den Perpendikel $C\,D$, so ist die Länge desselben $R \cos \varphi$, wobei R der Halbmesser des Kreises K und $\varphi = \widehat{a\,C\,D}$. Nennt man also M das constante Moment der Kraft, welche das Rad K treibt, so ist $\frac{M}{R \cos \varphi}$ der Druck des Zahnes gegen den Triebstock in der Position z_1. Da nun φ von 0 an fortwährend wächst, je mehr sich der Zahn von der Position z_2 entfernt, so erkennt man daraus, dass die Pressung zwischen dem Zahn und Triebstock ebenfalls fortwährend zunimmt. Dies hat nun zunächst zur Folge, dass der Zahn nach aussen zu mehr abgenützt wird und daher allmählig eine Form annimmt, bei der er gegen das Ende seiner Einwirkung hin zu wenig vorschiebt, dass also die Bewegung des Triebstockrades nicht eine gleichförmige, sondern eine verzögerte wird. Dann aber hat der Theil des Triebstockumfanges, mit welchem der Zahn während seiner Einwirkung in Berührung kommt, nur eine äusserst geringe Ausdehnung, der Triebstock wird also nur an einer Stelle abgenützt und flacht sich daselbst ab, ändert also den eigentlich wirksamen Theil seiner Form sehr beträchtlich. Hieraus geht also hervor, dass diese Verzahnung mit Triebstöcken sehr starken Abnützungen unterliegt, daher nur von geringem praktischem Werth ist.

Zweite Verzahnung. Epicycloiden und radiale Einschnitte.

Es seien, Fig. 8, Tafel XVI., K und k die Theilrisse der beiden Räder, a der gemeinschaftliche Berührungspunkt derselben, $a\,b$ ein in dem Rade k angebrachter geradliniger radialer Einschnitt.

Betrachtet man diesen als die Form des Zahnes vom Rade k, so erhält man die correspondirende Zahnform für das Rad K; wenn man eine Epicycloide a c verzeichnet, die entsteht, wenn ein Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ r auf dem Theilriss K fortgerollt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich auf folgende Weise.

Man denke sich, der Zahn werde aus der Position a c nach a_1 c_1 gebracht und wirke dabei auf den geradlinigen Einschnitt a b ein, so wird dieser fort und fort die Epicycloide berühren. Wir werden also die Position des geradlinigen Einschnittes finden, wenn wir von o aus an die Epicycloide eine Tangente ziehen. Allein weil der Voraussetzung gemäss a c durch Rollen des Kreises $\frac{1}{2}$ r auf K entstanden ist, so geht die Tangente, welche man von o aus nach der Epicycloide ziehen kann, durch den Punkt c_1, in welchen die Epicycloide durch den Erzeugungskreis $\frac{1}{2}$ r geschnitten wird. Wenn nun die Zahnformen richtig sind, muss $\widehat{ad} = \widehat{aa_1}$ sein. Dies ist aber wirklich der Fall, denn aus den Voraussetzungen folgt: $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1}$, dann aber ist: $\widehat{ac_1} = \frac{1}{2} r \times \widehat{c_1 o_1 a}$, $\widehat{ad} = r \times \widehat{d o a}$ aber $\widehat{d o a} = \frac{1}{2} \widehat{c_1 o_1 a}$, demnach $\widehat{ac_1} = \widehat{ad}$ folglich auch $\widehat{ad} = \widehat{aa_1}$ was zu beweisen war.

Hierauf beruht nun die in Fig. 1, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung, welche mit solchen Verhältnissen verzeichnet ist, dass sich je zwei Zähne durch zwei Theilungen führen.

k und K sind die Theilkreise der beiden Räder, a ihr Berührungspunkt, $\frac{1}{2}$ k und $\frac{1}{2}$ K zwei in a sich berührende Hülfskreise, deren Halbmesser halb so gross sind, als die Halbmesser der Theilkreise, $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1} = \widehat{ae_2} = \widehat{aa_2}$ = einer Zahntheilung, a_1 c_1 Epicycloide, die der Punkt c_1 beschreibt, wenn der Kreis $\frac{1}{2}$ k von a nach a_1 gerollt wird, d_2 e_2 Epicycloide, die der Punkt e_2 beschreibt, wenn der Kreis $\frac{1}{2}$ K von a bis a_2 gerollt wird. a c, a_2 c_2 identisch mit a_1 c_1; a e, d_1 e_1 identisch mit d_2 e_2. Die Dicke jedes Zahnes, gemessen auf den Theilrissen, beträgt etwas weniger als die Hälfte einer Theilung. Dass diese Verzahnung richtig ist, ergibt sich aus der vorhergehenden Theorie.

Zunächst ist klar nach obiger Theorie, dass die Form a c auf a b einwirkend, eine richtige Bewegung gibt, dass also der Zahn Z den Zahn z von a bis d_1 richtig bewegt. Allein ganz auf die gleiche

Weise, wie früher bewiesen wurde, dass a c auf a b richtig von a bis d_1 einwirkt, kann man auch beweisen, dass die mit $\frac{1}{2}$ K beschriebene Epicycloide a e auf den geradlinigen Einschnitt a f richtig von a bis a_2 einwirkt, dass also umgekehrt auch $f_2\,a_2$, auf $e_2\,d_2$ einwirkend, die richtige Bewegung des Zahnes z_2 bis z hervorbringt. Die vollständige Einwirkung zweier Zähne geschieht nun wie folgt. Zwei Zähne z_2 Z_2 treten eine Theilung vor der Centrallinie o O in e_2 in Berührung. Von da an wirkt das geradlinige Stückchen $e_2\,a_2$ auf $e_2\,d_2$ ein bis die Zähne die Position z Z erreichen. Bei dieser Bewegung ist der Berührungspunkt auf den Zahn Z_2 von e_2 bis a_2 hinausgerückt, dagegen auf den Zahn z_2 von e_2 bis d_2 hineingerückt. Von Z z an bis Z_1 z_1 wirkt dann die Epicycloide a c auf den geraden Einschnitt a b ein, und dabei gleitet der Berührungspunkt von a nach c hinaus, dagegen von d_1 bis c_1 hinein.

Wollte man die Verzahnung so construiren, dass sich die beiden Zähne durch einen beliebigen Bogen α vor und durch einen beliebigen Bogen β nach der Centrallinie richtig zu bewegen vermöchten, so hätte man weiter nichts zu thun, als die Construktion, Fig. 1, Tafel XVII., dahin abzuändern, dass man $a\,c_1$ und $a\,e_2$ nicht gleich einer Theilung macht, sondern $\widehat{a c_1} = \alpha$ und $\widehat{a e_2} = \beta$. Damit überhaupt eine continuirliche Bewegung stattfinden kann, ist eigentlich in geometrischer Hinsicht nur nothwendig, dass $\alpha + \beta$ wenigstens gleich einer ganzen Zahntheilung ist, denn die Dauer der Einwirkung zweier Zähne wird durch $\alpha + \beta$ bestimmt, und diese Dauer muss wenigstens gleich sein einer Theilung.

Um den praktischen Werth dieser Verzahnung richtig zu beurtheilen, müssen wir wiederum die Abnützung betrachten.

Auch hier ist, wie bei der Triebstockverzahnung, der Druck der Zähne gegen einander nicht constant, sondern um so grösser, je entfernter sie von der mittleren Position z Z sind. Daraus geht hervor, dass sich die Zähne in der Nähe der Theilrisse nur wenig abnützen werden, demnach allmälig die Form annehmen, welche Fig. 2, Tafel XVII. zeigt, in welcher f a c die ursprünglich richtige Form, f g a h die durch Abnütung entstehende Form darstellt. Allein diese Deformirung der Zahnformen beträgt bei dieser Verzahnung bei weitem nicht so viel, als bei der Verzahnung mit Triebstöcken, indem bei ersterer eine ebene Fläche mit einer schwach gekrümmten Form in Berührung kommt, was zur Folge hat, dass die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung zwischen zwei Zähnen kleiner ausfällt, als bei Triebstockverzahnungen.

Die zweite Verzahnung mit Epicycloide und geradlinigem Einschnitte ist also für die Ausführung zu empfehlen, und wird auch thatsächlich vorherrschend angewendet.

Dritte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden.

Es seien, Fig. 3, Tafel XVII., $K\,k$ die Theilkreise der Räder, $K_1\,k_1$ zwei andere Kreise von ganz beliebigen Halbmessern. Alle vier Kreise berühren sich in a, ihre Mittelpunkte liegen daher in der Verbindungslinie $C\,c$. Machen wir $\widehat{ac_1} = \widehat{ae_2} =$ einer Zahntheilung, und rollen den Kreis k_1 auf K und in k, ferner den Kreis k_1 auf k und in K, so beschreibt der Punkt c_1 (beim Rollen auf K) die Epicycloide $c_1\,a_1$ und (beim Rollen in k) die Hipocycloide $c_1\,d_1$ und dann beschreibt ferner der Punkt e_2 (beim Rollen auf k) die Epicycloide $e_2\,d_2$ und (beim Rollen in K) die Hypocycloide $e_2\,a_2$.

Offenbar ist $\widehat{ac_1} = \widehat{ad_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{aa_2} = \widehat{ad_2}$, berühren sich die Bogen $c_1\,d_1$ $c_1\,a_1$ in e_1 und die Bogen $a_2\,c_2$ $e_2\,d_2$ in e_2, denn die Sehne $\overline{c_1 a}$ ist sowohl die Normale zu dem Punkte c_1 der Hypo- wie der Epicycloide und die Sehne $a\,e_2$ ist die Normale zu dem Punkte e_2 der Hypo- wie Epicycloide. Vervollständigt man die Zeichnung durch Wiederholung der Formen, so entsteht die in Fig. 3, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass dieselbe die richtigen geometrischen Eigenschaften besitzt. Denn nicht nur für die in der Zeichnung dargestellte Position der Zähne, sondern auch für jede andere ist es wahr, dass $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{ad_2}$.

Die ganze Wirkung zweier Zähne während der Dauer ihres Eingriffs ist nun folgende. Von Z_2 bis Z wirkt die Hypocycloide $\overline{a_2\,e_2}$ auf die Epicycloide $e_2\,d_2$ ein; von z bis z_1 hingegen wirkt die Epicycloide $a\,c$ auf die Hypocycloide $a\,b$.

In Betreff der Abnützung ist diese Verzahnung ungefähr so gut wie die vorhergehende.

Will man die Construktion so anordnen, dass sich die Zähne nicht durch zwei Theilungen, sondern durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie bewegen können, so hat man nur die Construktion in der Weise durchzuführen, dass man $a\,c_1 = \beta$ $\widehat{ae_2} = \alpha$ macht und im Uebrigen verfährt, wie früher angegeben wurde.

Vierte Verzahnung mit Kreisevolventen.

Man erhält auch eine richtige Verzahnung, wenn man die Zähne nach den Evolventen zweier Kreise abrundet, deren Halbmesser