Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Verzeichnung von krummen Linien

VIERTER ABSCHNITT.

Die Verzahnung.

Einleitung zur Theorie der Verzahnung.

Verzeichnung von krummen Linien.

In der geometrischen Theorie der Bewegungsmechanismen spielen gewisse krumme Linien eine wichtige Rolle, es ist daher angemessen, in Kürze die Verzeichnung dieser Linien vorauszuschicken. Dabei handelt es sich vorzugsweise um solche Methoden, die mit einem Minimum von Hilfslinien zum Ziele führen, damit die Zeichnungsfläche nicht zu sehr leidet.

Verzeichnung einer Parabel.

Es sei der Scheitel A der Parabel, die Richtung $A\,x$ ihrer Hauptaxe und ein Punkt M der Parabel gegeben. Fig. 6, Tafel XV.

Man fälle den Perpendikel $M\,p$, zeichne das Rechteck $A\,p\,M\,b$, theile sowohl $A\,b$ als auch $b\,M$ in gleich viele gleich grosse Theile, ziehe die Radien $A\,1$, $A\,2$, $A\,3$ und durch 1_1, 2_1, 3_1 Parallellinien zu $A\,x$, so sind die Durchschnittspunkte III, II, I dieser Radien mit den Parallelen einzelne Punkte der Parabel.

Die Richtigkeit dieser Construktion ergibt sich auf folgende Weise: Setzen wir $A\,p_1 = x$, $\overline{I\,p_1} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes I, $A\,p = \alpha$, $M\,p = \beta$ die Coordinaten des Punktes M, so hat man:

$$x : y = \overline{b\,1} : \beta$$

Allein nach dem Theilungsgesetz der Linien A b und b M ist:

$$\overline{b\,1} : y = \alpha : \beta$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt durch Elimination von $\overline{b\,1}$:

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\, x$$

Das construktive Verfahren führt also in der That zu einer Parabel.

Verzeichnung einer Ellypse, deren Axen gegeben sind.

Der Methoden, Ellypsen zu zeichnen, gibt es eine grössere Anzahl; für den praktischen Zweck ist es genug, eine derselben zu kennen. Ich wähle folgende:

Es sei, Fig. 7, Tafel XV., O der Mittelpunkt der Ellypse, O a und O b ihre Halbaxen. Man verzeichne aus O als Mittelpunkt drei concentrische Kreise und zwar den ersten β b mit der kleinen Halbaxe, den zweiten a α mit der grossen Halbaxe, den dritten c γ mit der Summe beider Halbaxen. Zieht man nun einen beliebigen Radius O q p r und durch die Punkte q und p, in welchen die Kreise β b und a α geschnitten werden, parallele Linien zu O a und O b, so schneiden sich diese in einem Punkt m der Ellypse, und wenn man diesen Punkt mit r durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese der Richtung nach die zum Punkt m gehörige Normale. Die Richtigkeit dieser Construktion wird auf folgende Art bewiesen.

Nennt man $O\,a = a$, $O\,b = b$ die beiden Halbaxen, $O\,n = x$, $m\,n = y$ die Coordinaten des Punktes m, $\widehat{r\,O\,c} = \varphi$, so ist:

$$m\,n = y = \overline{O\,q} \sin\varphi = b \sin\varphi, \quad x = O\,n = \overline{O\,p} \cos\varphi = a \cos\varphi$$

demnach:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \ldots . \quad (1)$$

Diese Gleichung gehört aber einer Ellypse an, deren Halbaxen a und b sind.

Nennt man Θ den Winkel, den die zum Punkt m gehörige Normale mit der Abscissenlinie bildet, so ist bekanntlich, oder wie man leicht findet:

$$\text{tang}\,\Theta = -\frac{d\,x}{d\,y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aber wegen Gleichung (1) ist auch $\frac{x\,d\,x}{a^2} + \frac{y\,d\,y}{b^2} = o$ demnach $\frac{d\,x}{d\,y} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$ demnach $\text{tang}\ \Theta = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$. Nennt man aber ferner σ den Winkel, den die Linie $r\,m\,s$ mit $O\,c$ bildet, so findet man leicht, dass $\text{tang}\ \sigma = \frac{a\ \sin\ \varphi}{b\ \cos\ \varphi}$, oder weil $\sin\ \varphi = \frac{y}{b}$, $\cos\ \varphi = \frac{x}{a}$ ist,

$$\text{tang}\ \sigma = \frac{a\,\frac{y}{b}}{b\,\frac{x}{a}} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$$

demnach ergibt sich $\text{tang}\ \Theta = \text{tang}\ \sigma$ oder $\Theta = \sigma$, d. h. die Richtung der Linie $r\,m\,s$ stimmt mit der Richtung der Normale überein, was zu beweisen war.

Annäherungs-Construktion einer Ellypse.

Es seien, Fig. 8, Tafel XV., $O\,a = a$, $O\,b = b$ die Halbaxen. Macht man $O\,d = O\,d_1 = 3\,\frac{a-b}{2}$ und $O\,e = O\,e_1 = 4\,\frac{a-b}{2}$, verbindet die Punkte $e\,d\,e_1\,d_1$ durch gerade Linien, beschreibt hierauf aus d und d_1 mit einem Halbmesser $d\,a = d_1\,a_1$ die Kreisbogen $n\,a\,m$ und $n_1\,a_1\,m_1$ und aus e und e_1 mit dem Halbmesser $e\,d\,n = e\,d_1\,n_1$ die Kreisbogen $m\,b\,m_1$, $n\,b_1\,n_1$, so bilden diese vier Kreisbogen zusammen eine Linie, die für ein minder geübtes Auge wie eine Ellypse aussieht. Dieser Schein ist aber nur dann täuschend, wenn die beiden Halbaxen nur wenig verschieden sind.

Verzeichnung der Cycloide.

Wenn ein Kreis k, Fig. 9, Tafel XV., auf einer geraden Linie $a\,x$ von a an fortrollt, findet man einen Punkt m der Cycloide, die dabei beschrieben wird, wenn man in $a\,x$ einen Punkt b annimmt, daselbst den Erzeugungskreis verzeichnet und auf demselben ein Bogenstück $m\,b$ abschneidet, das so lang ist als $\overline{a\,b}$. Verbindet man m mit b, so ist dies die Richtung der zum Punkt m gehörigen Normale. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man in $a\,x$ eine Reihenfolge von Punkten annimmt, so erhält man auch eine Reihe von Punkten der Cycloide, so wie der zugehörigen Normalen. Allein dabei wird das Papier durch die vielen Hilfslinien und Hilfskreise so sehr in Anspruch genommen, dass zuletzt eine reine Zeichnung nicht mehr möglich ist. Nachfolgendes Verfahren ist richtig und schont das Papier.

Man verzeichne, Fig. 1, Tafel XVI., die Hälfte des Erzeugungskreises und die berührende Gerade 0 x. Mache das Bogenstück $\widehat{0\,5}$ gleich der Weglänge $\overline{0\,5_1}$, auf welcher der Erzeugungskreis fortrollen soll, theile $\widehat{0\,5}$ und $\overline{0\,5_1}$ in gleich viele, gleich grosse Theile, ziehe die Sehnen 0 1, 0 2, 0 3, 0 4, 0 5 und dann durch 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, parallele Geraden zu diesen Sehnen, so schneiden sich je zwei von diesen auf einander folgenden Linien in gewissen Punkten I_1, II, III, IV . . ., und es ist leicht zu erkennen, dass die durch die Punkte 1_1, 2_1, 3_1 zu den Sehnen 0 1, 0 2 . . . parallel gezogenen Geraden das Normalensystem der Cycloide und I_1, II, III, IV . . . eine Reihenfolge von Krümmungsmittelpunkten dieser Linie darstellen.

Beschreibt man also aus I_1 mit dem Halbmesser $\mathrm{I}_1\,0$ den Bogen 0 a, sodann aus II mit dem Halbmesser II a den Bogen a b u. s. f., so erhält man mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit das ganze Bogenstück 0 e der Cycloide.

Verzeichnung der Epicycloide.

Die Epicycloide ist diejenige Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, wenn derselbe auf einem anderen Kreis fortgerollt wird. Der bewegliche Kreis wird Erzeugungskreis, der ruhende dagegen Grundkreis genannt.

Es sei, Fig. 2, Tafel XVI., a der Anfangspunkt eines epicycloidischen Bogens, a b der unbewegliche Bogen, auf welchem der Erzeugungskreis fortgerollt ist, k die Position des Erzeugungskreises. Macht man $\widehat{bm} = \widehat{ba}$, so ist m ein Punkt der Epicycloide und ist m b der Richtung nach die Normale, welche dem Punkt m entspricht. Wiederholt man diese Construktion mehrere Male, indem man in K eine Reihenfolge von Punkten annimmt, jedesmal den Erzeugungskreis verzeichnet und auf demselben die geeigneten Bogenlängen abschneidet, so erhält man eine Reihenfolge von Punkten der Epicycloide, so wie die zugehörigen Normalen. Jede solche Normale wie m b schneidet, wenn sie verlängert wird, den Grundkreis noch ein zweites Mal bei e, und dieser Punkt kann leicht gefunden werden. Es ist $\widehat{b\,C\,e} = \widehat{m\,c\,b}$, demnach $\widehat{be} = \frac{R}{r}\,\widehat{ab}$, wobei R und r die Halbmesser der Kreise K und k bezeichnen. Setzt man $\frac{R}{r} = n$, so wird:

$$\widehat{be} = n\,\widehat{ab}$$

Man findet also den Punkt e, in welchem eine Normale den Grundkreis zum zweiten Mal schneidet, wenn man von dem Punkt b an, wo sie den Grundkreis zum ersten Mal schneidet, eine Bogenlänge $\widehat{be}$ abschneidet, die n-mal so gross ist, als die Bogenlänge $\widehat{ab}$. Hierdurch hat man ein sehr einfaches Verfahren zur Verzeichnung des Normalensystems einer Epicycloide und mithin auch ein Verfahren zur Verzeichnung der Linie selbst.

Es sei z. B. Fig. 3, Tafel XVI., K der Grundkreis und $n = 2$, d. h. der Halbmesser des Erzeugungskreises sei halb so gross als jener des Grundkreises. Macht man vom Anfangspunkt 0 an eine Eintheilung $01 = 12 = 23 = \ldots.$ und verbindet dann 1 mit 3, ferner 2 mit 6, 3 mit 9, 4 mit 12, so bilden diese Linien das Normalensystem der Epicycloide und die Punkte I, II, III, IV . . ., in welchen sich diese Linien schneiden, sind die Krümmungsmittelpunkte, aus welchen die Bogen $0\,1_1$, $1_1\,2_1$, $2_1\,3_1$ . . . . beschrieben werden können. Auch diese Construktion ist einfach und schont das Papier.

Verzeichnung einer Hypocycloide.

Die Hypocycloide ist diejenige Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, der in einem andern Kreis fortgerollt wird.

Es sei, Fig. 4, Tafel XVI., K der Grundkreis, in welchem der Erzeugungskreis k von a an bis b fortgerollt worden ist. Macht man $\widehat{bm} = \widehat{ab}$, so ist m ein Punkt der Hypocycloide und verbindet man m mit b, so ist diese Linie die Richtung der durch m gehenden Normale. Diese Normale schneidet den Kreis noch einmal im Punkte e und dieser kann leicht gefunden werden. Denn verbindet man die Mittelpunkte c und C der Kreise k und K mit m und e, so bilden sich die zwei ähnlichen Dreiecke cmb und eCb, es ist folglich $\widehat{eCb} = \widehat{mcb}$, demnach:

$$\widehat{eb} = \frac{R}{r}\,\widehat{mb} = \frac{R}{r}\,\widehat{ab} = n\,\widehat{ab}$$

wobei $\frac{R}{r} = n$ gesetzt wurde. Man findet also den Punkt e, in welchem eine durch b gehende Normale den Grundkreis zum zweiten Mal schneidet, wenn man den Bogen $\widehat{ab}$ von a an $(n-1)$-mal nach entgegengesetzter Richtung aufträgt. Hieraus folgt ein einfaches Verfahren zur Verzeichnung der Hypocycloide.

Es sei z. B. Fig. 5, Tafel XVI. $n = \frac{R}{r} = 3$.

Trägt man von 0 aus eine Theilung $01 = 12 = 23 \ldots$ auf, macht

$$\widehat{01_{,}} = (3-1)\,\widehat{01} = 2 \times \widehat{01}$$

$$\widehat{02_{,}} = (3-1)\,\widehat{02} = 2 \times \widehat{02}$$

$$\widehat{03_{,}} = (3-1)\,\widehat{03} = 2 \times \widehat{03}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

verbindet die Punkte $1_{,}$, $2_{,}$, $3_{,}$ . . . mit 1, 2, 3, verlängert diese Linien bis sie sich in II, III, IV schneiden, so hat man das Normalensystem und die Krümmungsmittelpunkte der Hypocycloide. Diese kann also durch kleine Kreisbogenstücke $0a$, ab, bc . . . zusammengesetzt werden.

Nimmt man $n = 2$, so gibt dieses Verfahren parallele Normalen und als Hypocycloide den durch 0 gehenden Durchmesser, was auch ganz richtig ist.

Evolventen.

Nimmt man eine krummlinig begrenzte Scheibe, befestiget an ihrem Umfang einen vollkommen biegsamen, aber unausdehnsamen Faden, wickelt denselben um die Scheibe und zwar so, dass der Faden stets geradlinig gespannt bleibt, so beschreibt der Punkt, an welchem der Faden gefasst wurde, eine krumme Linie, welche die Evolvente der Scheibengrenzlinie ist, welche letztere auch Evolute genannt wird.

Es ist klar, dass der Faden in jeder seiner Positionen einerseits Tangente zu einem Punkt der Evolute und andererseits Normale zu einem Punkt der Evolvente ist. Man findet also das System der Normalen einer zu verzeichnenden Evolvente, wenn man zu der gegebenen Linie das Tangentensystem darstellt, was praktisch mit hinreichender Genauigkeit mit einem Lineal leicht geschehen kann.

Geometrische Theorie der Verzahnung.

Allgemeine Erklärungen. Versieht man zwei der Richtung nach parallel gelagerte Axen mit cylindrischen Scheiben, presst diese gegen einander und dreht hierauf eine der beiden Axen mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so entsteht dadurch auch in der zweiten Axe und ihrer Scheibe eine gleichförmige drehende Bewegung, vorausgesetzt, dass der Widerstand, welcher etwa der Bewegung der zweiten Axe entgegen wirkt, nicht zu gross ist.

Wenn die beiden Scheiben nur aufeinander rollen und nicht glitschen, sind ihre Umfangsgeschwindigkeiten gleich gross, müssen