Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Steifheit der Seile

urn:nbn:de:bsz:31-270970

$$\sqrt{x^2+y^2} =$$

$$2 \frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} x + 2 \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} y \quad (7)$$

Weiss man, dass $\frac{x}{y} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}\ \varphi$ zwischen 0 und 1 liegt, wass der Fall ist, wenn bekannt wäre, dass $y > x$ ist, so sind die Grenzen von φ, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und dann findet man aus (7):

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin\frac{\pi}{4}} x + 2 \frac{\sin\frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin\frac{\pi}{4}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 0{\cdot}393\ x + 0{\cdot}947\ y$$

Ist man über das Verhältniss $\frac{x}{y}$ gar nicht unterrichtet, kann es also jeden beliebigen positiven Werth haben, so sind die Grenzen von φ, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und dann wird der Annäherungswerth (7):

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 0 + \text{sio}\ \frac{\pi}{2}} x + 2 \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0^0}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin\frac{\pi}{2}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 0{\cdot}777\ (x + y)$$

B. Steifheit der Seile.

Steifheit der Seile. Um eine Rolle A, Fig. 2, Tafel XV., die mit Zapfen versehen ist, ist ein Seil geschlungen, an welchem eine Last Q hängt. Es soll die Kraft P bestimmt werden, die am freien Ende ziehen muss, um die Last zu heben und die Steifheit des Seiles wie auch die Axenreibung zu überwinden. Wegen der Steifheit des Seiles bilden die mit der Rolle nicht in Berührung stehenden Seilstücke keine geraden Linien, sondern krumme Linien, zu welchen die Richtungen von P und Q Assypmtoten sind.

Fällt man von dem Mittelpunkt der Rolle aus Perpentikel auf die nach aufwärts verlängerten Richtungen von Q und P, so ist das erstere (q) grösser, dass letztere (p) kleiner als der Halbmesser der Rolle + der halben Seildicke, denn da wo das Seil sich aufwickelt, muss es krumm gebogen, und da wo es sich abwickelt, muss es gerade gebogen werden. Für den Gleichgewichtszustand ergibt sich nun Folgendes: Nennen wir δ den Durchmesser des Seiles, Δ den Durchmesser des Zapfens der Rolle, D ihren Durchmesser, so ist $(P + Q) f$ die am Umfang des Zapfens wirkende Reibung und $(P + Q) f \frac{\Delta}{2}$ das statische Moment derselben; man hat daher:

$$P p = Q q + (P + Q) f \frac{\Delta}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Hieraus findet man:

$$P - Q = Q \left(\frac{\frac{q}{p} - 1 + f \frac{\Delta}{p}}{1 - f \frac{\Delta}{2p}} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dieser genaue Ausdruck würde die zur Bewältigung der Steifheit und der Zapfenreibung erforderliche Kraft $P - Q$ bestimmen, wenn p und q bekannt wäre, allein diese Grössen lassen sich für ein so complizirtes Gebilde wie ein Seil ist und bei seinem unvollkommenen Elastizitätszustand nicht wohl durch Rechnung verlässlich bestimmen; man muss daher zu Annäherungen und Experimenten seine Zuflucht nehmen. Derlei Versuche zur Bestimmung von $\frac{p}{q}$ sind von *Eitelwein* und *Coulomb* angestellt worden. Die von *Coulomb* sind wohl die genaueren und vermittelst derselben findet man, dass man annähernd nehmen darf:

$$\frac{q}{p} - 1 = 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D}$$

$$\begin{cases} P p = Q \cdot q \\ P = Q + S \\ (Q + S) p = Q q \\ S = \frac{q - p}{p} Q = \left(\frac{q}{p} - 1\right) Q \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass δ wie D in Centimetern ausgedrückt wird. Führt man diesen Werth in (2) ein und erlaubt sich $f \frac{\Delta}{2p}$ gegen 1 ganz zu vernachlässigen, ferner in den Quotienten $f \frac{\Delta}{p}$ statt $p, \frac{D}{2}$ zu setzen, so wird:

$$P - Q = Q \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f \frac{\Delta}{D} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Diese Formel kann freilich nicht sehr genau sein und jedenfalls nur für Seile passen, die sich in jeder Hinsicht in einem gewöhnlichen mittleren Zustand befinden, denn diese Steifheit hängt streng genommen von sehr vielen Verhältnissen ab. Sie richtet sich nach der Beschaffenheit, Festigkeit, Elastizität, Länge der Elementarfasern des Hanfes, nach der Anfertigungsweise des Seiles, namentlich nach der stärkeren oder schwächeren Zwirnung der Schnüre und

Leinen, ferner nach dem Alter des Seiles, nach den Substanzen, von welchen es mehr oder weniger durchdrungen ist, namentlich von Wasser, Seife, Oel, Theer u. s. w., es ist also selbstverständlich, dass von einer genauern Berechnung der Steifheit keine Rede sein kann, und dass aber auch eine genauere Berechnung keinen Werth haben kann, weil man ja doch bei Verwendung eines Seiles keine weitläufigen Prüfungen und Untersuchungen über alle seine Qualitäten anstellen kann noch anstellen will.

Für den Steifheitswiderstand der Drahtseile habe ich aus einigen Versuchen gefunden, dass derselbe durch

$$0{\cdot}58\ Q\ \frac{\delta^2}{D} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

ausgedrückt werden kann. Da bei gleicher Festigkeit der Durchmesser eines Drahtseiles halb so gross ist, als der eines Hanfseiles, so stellt sich heraus, dass der Steifheitswiderstand des Drahtseiles kleiner ist, als der eines Hanfseiles, vorausgesetzt, dass beide Seile gleich fest sind.

Theoretische Bestimmung des Steifheitswiderstandes der Seile. Denkt man sich das Material, aus welchem das Seil besteht, gleichförmig im Innern vertheilt (was bei einem Hanfseil nahe, bei einem Drahtseil weniger genau richtig ist), so kann man ein Seil als einen elastischen Stab ansehen und der Steifheitswiderstand wird dann durch die Kraft bestimmt, welche erforderlich ist, um das anfänglich gerade Seil nach dem Umfang der Rolle krummlinig zu biegen.

Im ersten Abschnitt haben wir Seite 53 für die Wirkungsgrösse W, welche erforderlich ist, um einen anfänglich geraden Stab kreisbogenförmig zu biegen, folgenden Ausdruck gefunden:

$$W = \frac{\varepsilon\ \mu\ l}{2\ R^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

wobei bedeutet: ε den Modulus der Elastizität des Materials, l die Länge des Stabstückes, das krummlinig gebogen worden ist, μ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf eine Drehungsaxe, die durch den Schwerpunkt des Stabquerschnittes geht und auf der Biegungsebene senkrecht steht, R den Halbmesser des Kreises, nach welchem der Stab gebogen wird.

Bezeichnet man den Steifheitswiderstand mit S, so wirkt derselbe durch einen Weg l, wenn sich ein Seilstück von der Länge l aufwickelt, also krumm gebogen wird, die Arbeit ist demnach $S\ l$ und sie ist gleich zu setzen obigem Werth von w, d. h. man hat $w = s\,l$. Setzt man für w seinen Werth und lässt l weg, so findet man:

$$s = \frac{\varepsilon\,\mu}{2\,R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für ein rundes Seil vom Durchmesser δ ist $\mu = \frac{\pi}{64}\,\delta^4$.

Nennt man D den Durchmesser der Rolle, so ist $D = 2\,R$, und dann wird:

$$s = \frac{\pi}{32}\,\varepsilon\,\frac{\delta^4}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für ein flaches Seil von einer Dicke δ und Breite β ist $\mu = \frac{1}{12}\,\beta\,\delta^3$ und dann wird:

$$s = \frac{1}{6}\,\varepsilon\,\beta\,\frac{\delta^3}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nach diesen theoretischen Ergebnissen (welche von den empirischen Regeln, die *Prony* und *Eitelwein* aufgestellt haben, total abweichen) ist der Steifheitswiderstand von der Seilspannung ganz unabhängig, dem Quadrat des Rollendurchmessers verkehrt, und bei einem runden Seil der vierten Potenz des Seildurchmessers direkt proportional. Dieser Widerspruch zwischen den theoretischen und empirischen Regeln deutet darauf hin, dass die Voraussetzung, von welcher wir in unserer Theorie ausgegangen sind, dass nämlich das Seil wie ein homogener elastischer Stab angesehen werden dürfe, nicht ganz naturgemäss ist. Es mag aber auch sein, dass die empirischen Regeln unrichtig sind. Wahrscheinlich ist es nicht wahr, dass der Steifheitswiderstand der Seilspannung proportional ist.

Genauere Versuche werden in der Folge entscheiden, ob die Empirie oder ob die Theorie der Wahrheit näher liegt.

Bestimmung der Seilkurve. Wir wollen uns noch die Aufgabe vorlegen, die Gestalt eines sich auf einer Rolle aufwickelnden Seiles zu bestimmen.

Es sei, Fig. 3, Tafel XV., $A\,B\,m\,m_1$ die Axenkurve des Seiles, B_1 der Ort, wo das Anlegen des Seiles an die Rolle beginnt. Nennen wir $\widehat{A\,O\,B} = \alpha$, $\overline{AO} = \overline{OB} = R$, $\overline{O\,p} = x$, $\overline{m\,p} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m der Axenkurve, $\overline{AC} = a$ die Länge des Perpentikels, das vom Mittelpunkt O auf die Richtung der Spannungskraft Q gefällt werden kann, ϱ den Krümmungshalbmesser, welcher dem Punkt m der Axenkurve entspricht, μ das Trägheitsmoment eines

Seilquerschnittes in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und auf der Ebene der Figur senkrecht steht. Setzt man zur Abkürzung

$$m = \frac{Q}{\varepsilon \mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so ist vermöge Gleichung 4, Seite 50, die Differenzialgleichung der Axenkurve

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = m (y - a) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = a + \mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x} + \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Hieraus folgt durch Differenziation:

$$\frac{d y}{d x} = \sqrt{m} \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

In diesen Gleichungen (3) und (4) sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die zwei Constanten der Integration.

Da die Kurve durch den Punkt B gehen muss, ist

$$\text{für } x = - R \cos \alpha, \; y = R \sin \alpha, \; \frac{d y}{d x} = \operatorname{cotg} \alpha, \; - \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{R}$$

Demnach erhalten wir vermöge (2), (3), (4):

$$\left.\begin{aligned} & m (a - R \sin \alpha) = \frac{1}{R} \\ & \operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{m} \left(\mathfrak{B}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} - \mathfrak{C}\, e^{+\sqrt{m}\, R \cos \alpha}\right) \\ & R \sin \alpha = a + \mathfrak{B}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} + \mathfrak{C}\, e^{+\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Nennt man x_1 die Abscisse des Punktes m_1, in welchem die Last angehängt ist, β den in der Regel sehr kleinen Winkel, den die zum Punkt m_1 gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet, so ist:

$$\text{für } x = x_1, \; y = a, \; \frac{d y}{d x} = \operatorname{tang} \beta$$

Demnach hat man noch:

$$\left.\begin{aligned} a &= a + \mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} + \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ \operatorname{tang} \beta_1 &= \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1}\right) \sqrt{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (5) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left[\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} + (R \sin \alpha - a)\right] \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left[\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} - (R \sin \alpha - a)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

oder wenn man für $R \sin \alpha - a$ den aus der ersten der Gleichungen (5) folgenden Werth $-\frac{1}{m R}$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}\right) \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = - \frac{\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}}{\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}}\, e^{2 \sqrt{m}\, R \cos \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (6) folgt dagegen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sqrt{m}}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sqrt{m}}\, e^{+\sqrt{m}\, x_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = - e^{-2 \sqrt{m}\, x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Setzt man die Werthe von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, welche die Ausdrücke (9) und (11) darbieten, einander gleich, so folgt:

$$e^{-2\sqrt{m}\,x_1} = e^{2\sqrt{m}\,R\cos\alpha}\,\frac{\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m\,R}}{\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m\,R}} \quad . \; . \; (12)$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel α oder den Anlegepunkt B_1.

Nachdem α bestimmt ist, ergeben sich die übrigen unbekannten Constanten des Problems auf folgende Weise:

Die Gleichungen (6) geben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \left(\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m\,R}\right) \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \left(\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m\,R}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (13)$$

Die erste der Gleichungen (5) gibt:

$$a = R\sin\alpha + \frac{1}{m\,R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Die zweite der Gleichungen (6) gibt endlich:

$$\tang\beta = \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\,x_1} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\,x_1}\right)\sqrt{m} \quad . \; . \; . \; (15)$$

Diese Resultate werden bedeutend einfacher, wenn wir annehmen, dass das Seil, an welchem die Last hängt, sehr lang ist. In diesem Falle ist x_1 sehr gross, und wenn auch m einen beträchtlichen Werth hat (was voraussetzt, dass das Seil biegsam und ziemlich stark gespannt ist), so wird $e^{-\sqrt{m}\,x_1}$ verschwindend klein oder annähernd gleich Null.

Setzt man aber in den Ausdrücken (12) bis (15) $e^{-\sqrt{m}\,x_1} = 0$, so erhält man:

wegen (12) $\quad \frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m\,R} = 0$

oder

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{R\sqrt{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} = \frac{R\sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Ferner wegen (13):

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B} = o \\ &\mathfrak{C} = -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \times \frac{2}{m R} = -\frac{1}{m R} e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Gleichung (14) gibt, wenn man für $\sin \alpha$ obigen Werth (17) einführt:

$$a = \frac{R^2 \sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} + \frac{1}{m R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Endlich wird wegen $\mathfrak{B} = o$ und $e^{-\sqrt{m}\, x_1} = o$:

$$\operatorname{tang} \beta = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Da für ein ziemlich biegsames und stark gespanntes Seil $R^2 m$ gegen die Einheit eine kleine Grösse ist, so kann man setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 m + 1}} = \frac{1}{R\sqrt{m}\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 m}}} = \frac{1}{R\sqrt{m}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R^2 m}\right)$$

Dann wird:

$$a = R\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R^2 m}\right] + \frac{1}{m R} = R + \frac{1}{2}\,\frac{1}{m R} \quad \ldots \quad (21)$$

Nennen wir S den Steifigkeitswiderstand, so ist:

$$Q\, a = (Q + S)\, R$$

demnach:

$$S = Q\,\frac{a - R}{R}$$

oder wegen (21):

$$S = \frac{Q}{2\, m\, R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Setzt man für m seinen Werth aus (1), so folgt:

$$S = \frac{\varepsilon\, \mu}{2 R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

welcher Ausdruck mit dem Seite 297 auf anderem Wege gefundenen übereinstimmt.

Vermöge (1) und (2) wird:

$$a = R + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \mu}{R Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Endlich wird wegen (17) annähernd:

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \mu}{Q R^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Diese zwei letzteren Gleichungen bestimmen das Hinaushängen a der Last und den Anlegewinkel α.

Kettenaufwicklung. Die Aufwicklung so wie auch die Abwicklung einer im gespannten Zustande befindlichen Kette auf eine Welle oder von einer Welle verursacht einen Widerstand, ähnlich wie die Biegung eines Seiles.

Nennt man, Fig. 4, Tafel XV., δ den Durchmesser des Ketteneisens, D den Durchmesser der Welle, auf welche die Kette aufgewickelt wird, e die innere Länge eines Kettengliedes, α den Winkel, den die Richtungen zweier unmittelbar auf einander folgenden Kettenglieder des aufgewickelten Theils der Kette mit einander bilden, Q die Last, welche an dem Kettenstück hängt, das aufgewickelt wird, f_1 den Reibungscoeffizienten für die Reibung zwischen je zwei Kettengliedern, d den Durchmesser des Zapfens der Rolle oder Welle, f den Coeffizienten für die Zapfenreibung, P die Kraft, welche an dem sich abwickelnden Kettenstück wirken muss, um die Last und die Widerstände zu überwinden.

Nun ist $e = \left(\frac{D}{2} + \frac{\delta}{2}\right) \alpha$, oder $\alpha = \frac{2 e}{D + \delta}$. Ist ferner $\alpha \frac{\delta}{2} = \frac{2 e}{D + \delta} \times \frac{\delta}{2} = \frac{e \delta}{D + \delta}$ der Weg, durch welchen die Reibung $Q f_1$ überwunden werden muss, wenn ein Kettenglied gegen das benachbarte um den Winkel α verstellt werden soll, ist demnach $Q f_1 \frac{e \delta}{D + \delta}$ die Wirkungsgrösse, welche der Ueberwindung dieser Reibung entspricht. Nennt man für einen Augenblick X die Kraft, welche in der Entfernung $\frac{D}{2} + \frac{\delta}{2}$ von der Axe continuirlich durch den Weg e wirken muss, um jene Wirkung hervorzubringen, so hat man:

$$X e = Q f_1 \frac{e \delta}{D + \delta}$$

demnach $X = Q f_1 \frac{\delta}{D + \delta}$. Dies ist also die Kraft, welche zur Aufwicklung der Kette nothwendig ist.

Wenn das eine Ende einer Kette aufgewickelt, das andere Ende aber gleichzeitig abgewickelt wird, ist der Widerstand doppelt so gross, als in dem Fall, wenn nur Aufwicklung stattfindet.

Da jederzeit δ gegen D vernachlässigt werden kann, so erhalten wir zur Berechnung des Kettenwiderstandes folgende Ausdrücke:

a. Wenn die Kette nur aufgewickelt wird . . . . $Q f_1 \frac{\delta}{D}$

b. Wenn das eine Ende der Kette aufgewickelt, das andere Ende aber gleichzeitig abgewickelt wird $2 Q f_1 \frac{\delta}{D}$

Diese Widerstände sind klein, und von der Länge der Kettenglieder nicht abhängig.

Vergleichen wir diesen Widerstand mit dem Steifheitswiderstand eines Hanfseiles von gleicher Tragkraft, so ist für letzteres der Widerstand gleich

$$0{\cdot}26 \frac{\delta_1^2}{D_1} Q$$

Allein es ist (Resultate S. 38) $\delta_1 = 0{\cdot}113 \sqrt{Q}$, und (Resultate S. 39) $\delta = 0{\cdot}028 \sqrt{Q}$, demnach verhält sich das Seil zur Kette wie $0{\cdot}26 \frac{Q}{D_1} (0{\cdot}113)^2 Q : 2 Q f_1 \frac{0{\cdot}028 \sqrt{Q}}{D} = 0{\cdot}59 \frac{D}{D_1} \sqrt{Q} : 1$. Sind die Rollen gleich gross, d. h. ist $D = D_1$, so fällt der Seilwiderstand grösser aus, als der Kettenwiderstand wenn $\sqrt{Q} > \frac{1}{0{\cdot}59}$, d. h. wenn $Q > 3$ Kilogramm. In allen Fällen der Anwendung ist aber Q bedeutend grösser als 3, fällt demnach der Seilwiderstand bedeutend grösser aus, als der Kettenwiderstand.

Berücksichtigt man bei einer Kette, die sich um eine Rolle auf- und abwickelt nebst dem Kettenwiderstand auch die Axenreibung der Rolle, so ist die Kraft P, welche am Kettenende wirken muss, das sich abwickelt:

$$P = Q \left(1 + 2 f_1 \frac{\delta}{D} + 2 f \frac{d}{D}\right)$$

Verlangt man, dass $\frac{P}{Q}$ einen gewissen Werth $\mathfrak{p}$ erhalten soll, so ist:

$$\mathfrak{p} = 1 + 2 f_1 \frac{\delta}{D} + 2 f \frac{d}{D}$$

und hieraus folgt:

$$D = \frac{2\, f_1\, \delta + 2\, f\, d}{p - 1}$$

Allein es ist (Resultate Seite 39) $\delta = 0.028 \sqrt{Q}$, (Resultate Seite 46) $d = 0.12 \sqrt{Q}$ und wenn $f = f_1 = 0.1$ gesetzt wird, so folgt:

$$D = 0.0296 \frac{\sqrt{Q}}{p - 1}$$

Diese Gleichung gibt:

für	$p =$	1·04	1·06	1·08	1·10
	$\frac{D}{\sqrt{Q}} =$	0·74	0·43	0·37	0·30

Der Wälzungswiderstand. Unter Wälzungswiderstand versteht man denjenigen Widerstand, welcher sich zu erkennen gibt, wenn man auf einer ebenen aber mehr oder weniger weichen und nicht elastischen Bahn einen cylindrischer Körper fortrollen will.

Auf einer vollkommen elastischen Bahn, die immer wiederum sich selbst aufrichtet, nachdem sie zusammengedrückt worden ist, kann ein derartiger Widerstand gar nicht vorkommen.

Es sei, Fig. 5, Tafel XV., C der Mittelpunkt des fortrollenden Körpers, $E\ A\ B\ F$ die Bahn. Bis A hin ist sie bereits durch den rollenden Körper zusammengedrückt, $B\,F$ ist die noch im natürlichen Zustand befindliche Bahn, K die Kraft, welche nach horizontaler Richtung gegen die Axe der Rolle drücken muss, um den Widerstand zu bewältigen, R der Halbmesser $CA = Cm = CB$ des rollenden Körpers, $\widehat{A\ C\ B} = \alpha$ der Winkel, welcher dem Einsenken ($\xi = AD$) des Körpers in das Bahnmaterial entspricht. Da jedenfalls in allen Fällen der Anwendung der Bogen AB oder der Winkel α eine sehr kleine Grösse ist, so wird man sich der Wahrheit so ziemlich nähern, wenn man annimmt, dass das Bahnmaterial an irgend einer Stelle m dem Eindringen des Cylinders einen Widerstand entgegensetzt, welcher der Tiefe des Punktes m unter $B\,F$ proportional ist.

Nennt man $\widehat{ACm} = \varphi$, so ist:

$$\overline{mn} = \xi - R(1 - \cos\varphi)$$

Behandelt man α und φ wie unendlich kleine Grössen, so darf man

$$1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$$

setzen und dann wird: