

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Der Maschinenbau**

**Redtenbacher, Ferdinand**

**Mannheim, 1862**

Annäherungsausdruck für  $\sqrt{x^3+y^2}$

[urn:nbn:de:bsz:31-270970](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270970)

die Welle einwirkt, für alle richtig proportionirten Transmissionen einerlei Werth hat, dass also hinsichtlich der Reibung dünne und schnell laufende Transmissionen eben so viel Verlust verursachen, wie dicke und langsam laufende.

Bestimmung eines Annäherungsausdruckes von der Form  $\alpha x + \beta y$  für die irrationale Formel  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Die Berechnung der Reibungswiderstände zusammengesetzter Maschinengliederungen werden meistens sehr complizirt, weil die zwischen den Bestandtheilen herrschenden Pressungen durch irrationale Formeln von der Form  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ausgedrückt erscheinen. Es ist daher sehr wünschenswerth, statt eines solchen irrationalen Ausdruckes einen rationalen von der Form  $\alpha x + \beta y$  substituiren zu dürfen, und es bietet sich demnach die Frage dar, wie die Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  genommen werden sollen, damit der Rechnungsfehler, den man begeht, wenn man nach der rationalen, statt nach der irrationalen Formel rechnet, im Allgemeinen möglichst klein ausfällt. *Poncelet* hat diese Aufgabe zuerst gestellt und für gewisse spezielle Fälle durch geometrische Betrachtungen gelöst. Wir werden diese Aufgabe allgemein und auf analytische Weise so lösen, dass wir die absolut besten Werthe von  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen.

Wir nehmen an, man wisse nicht wie gross  $x$  und  $y$  sind, wohl aber innerhalb welcher Grenzen das Verhältniss  $\frac{x}{y}$  liege. Weiss man z. B., dass in allen speziellen Fällen eines vorliegenden Problems  $y > x$  ist, so weiss man, dass alle möglichen Werthe von  $\frac{x}{y}$  zwischen 0 und 1 liegen, dass also 0 und 1 die Grenzen sind, innerhalb welchen der Quotient  $\frac{x}{y}$  liegt.

Schreiben wir  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r \cos \varphi$ , so wird  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  und  $\alpha x + \beta y = r (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)$  und dann ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (\alpha x + \beta y) = r \left[ 1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right] = f$$

der Fehler, den man begeht, wenn man statt der irrationalen Formel die rationale gebraucht.

Nun ist  $\frac{x}{y} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tan \varphi$ , wir können daher die gegebenen Grenzen von  $\frac{x}{y}$  ausdrücken durch die Tangenten  $\tan \varphi_1$  und  $\tan \varphi_0$ , gewisser Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_0$ .

Die absolut besten Werthe von  $\alpha$  und  $\beta$  sind nun diejenigen, für welche der mittlere Werth des Fehlerquadrates ein Minimum wird. Nun ist

$$f^2 = r^2 \left[ 1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right]^2 \dots \dots (1)$$

Ferner der mittlere Werth  $T$  von dem Quadrat dieses Fehlers innerhalb der Grenzen  $\varphi_1$  und  $\varphi_0$ :

$$\frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \left[ 1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right]^2 d\varphi = T$$

Die Entwicklung dieses Ausdruckes gibt:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \times \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[ 1 + \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + 2\alpha\beta \sin \varphi \cos \varphi - 2\alpha \sin \varphi - 2\beta \cos \varphi \right] d\varphi (2)$$

Wegen

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

ist

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$$

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$$

und dann ist noch:

$$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi)$$

Vermittelst dieser Formeln wird nun:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 - \varphi_0 + \alpha^2 \left[ \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0) \right] \\ + \beta^2 \left[ \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(2\sin \varphi_1 - \sin 2\varphi_0) \right] \\ + \frac{1}{2} \alpha \beta \left[ \cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1 \right] \\ - 2\alpha \left[ \cos \varphi_0 - \cos \varphi_1 \right] \\ - 2\beta \left[ \sin \varphi_1 - \sin \varphi_0 \right] \end{array} \right\} (3)$$

Die vortheilhaftesten Werthe von  $\alpha$  und  $\beta$  sind nun diejenigen, für welche  $\frac{dT}{d\alpha} = 0$  und  $\frac{dT}{d\beta} = 0$  wird.

Durch Differenziation des Ausdruckes für T nach  $\alpha$  und  $\beta$  findet man:

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha \left[ \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0) \right] \\ + \frac{1}{2} \beta \left[ \cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1 \right] \\ - 2 \left[ \cos \varphi_0 - \cos \varphi_1 \right] \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\beta} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta \left[ \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0) \right] \\ + \frac{1}{2} \alpha \left[ \cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1 \right] \\ - 2 \left[ \sin \varphi_1 - \sin \varphi_0 \right] \end{array} \right\} \quad (5)$$

Berücksichtigt man die bekannten Formeln für die Summe und Differenzen der Sinuse und Cosinuse, so erhalten die Ausdrücke (4) und (5) folgende Formen:

$$\begin{aligned} & \alpha \left[ (\varphi_1 - \varphi_0) - \cos (\varphi_1 + \varphi_0) \sin (\varphi_1 - \varphi_0) \right] \\ & + \beta \sin (\varphi_1 + \varphi_0) \sin (\varphi_1 - \varphi_0) = 4 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \\ & \beta \left[ (\varphi_1 - \varphi_0) + \cos (\varphi_1 + \varphi_0) \sin (\varphi_1 - \varphi_0) \right] \\ & + \alpha \sin (\varphi_1 + \varphi_0) \sin (\varphi_1 - \varphi_0) = 4 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \end{aligned}$$

und hieraus findet man durch gewöhnliche Auflösung und Reduktion:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 2 \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin (\varphi_1 - \varphi_0)} \\ \beta = 2 \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin (\varphi_1 - \varphi_0)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

• und somit sind die besten Werthe von  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt und wir erhalten demnach für  $\sqrt{x^2 + y^2}$  die Annäherungsformel:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} x + 2 \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} y \quad (7)$$

Weiss man, dass  $\frac{x}{y} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$  zwischen 0 und 1 liegt, wass der Fall ist, wenn bekannt wäre, dass  $y > x$  ist, so sind die Grenzen von  $\varphi$ ,  $\varphi_0 = 0$  und  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$  und dann findet man aus (7):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^\circ - \cos \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin \frac{\pi}{4}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin \frac{\pi}{4}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0.393 x + 0.947 y$$

Ist man über das Verhältniss  $\frac{x}{y}$  gar nicht unterrichtet, kann es also jeden beliebigen positiven Werth haben, so sind die Grenzen von  $\varphi$ ,  $\varphi_0 = 0$  und  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  und dann wird der Annäherungswerth (7):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^\circ - \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin \frac{\pi}{2}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0^\circ}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin \frac{\pi}{2}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0.777 (x + y)$$

### B. Steifheit der Seile.

**Steifheit der Seile.** Um eine Rolle A, Fig. 2, Tafel XV., die mit Zapfen versehen ist, ist ein Seil geschlungen, an welchem eine Last Q hängt. Es soll die Kraft P bestimmt werden, die am freien Ende ziehen muss, um die Last zu heben und die Steifheit des Seiles wie auch die Axenreibung zu überwinden. Wegen der Steifheit des Seiles bilden die mit der Rolle nicht in Berührung stehenden Seilstücke keine geraden Linien, sondern krumme Linien, zu welchen die Richtungen von P und Q Assymptoten sind.

Fällt man von dem Mittelpunkt der Rolle aus Perpendikel auf die nach aufwärts verlängerten Richtungen von Q und P, so ist das erstere (q) grösser, dass letztere (p) kleiner als der Halbmesser der Rolle + der halben Seildicke, denn da wo das Seil sich aufwickelt, muss es krumm gebogen, und da wo es sich abwickelt, muss es gerade gebogen werden. Für den Gleichgewichtszustand