Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Reibung der Zahnräder

urn:nbn:de:bsz:31-270970

um den Widerstand Q und die daraus entstehende Reibung zu überwinden, α den Winkel, den die äussere Schraubenlinie des Wurmes mit einer auf der Axe senkrecht stehenden Ebene bildet, β die Hälfte des Kantenwinkels des Gewindes, falls dasselbe dreieckig ist. Es ist selbstverständlich, dass diese Rechnungsweise nur eine Annäherung ist und strenge genommen nur gilt, 1) wenn die Gewindtiefe unendlich klein ist, 2) wenn der Halbmesser des Schraubenrades sehr gross oder gar unendlich gross ist.

Auch die Schraube ohne Ende ist zur Transmittirung grösserer Kräfte nicht zu empfehlen, indem fast in allen Fällen der Anwendung die Hälfte der Kraft durch Reibung verloren geht und diese verlorne Kraft nothwendig bei continuirlicher Bewegung eine rasche Abnützung der Gewinde und Zähne zur Folge hat. Handelt es sich aber überhaupt nur um sanfte feine Bewegungen, die nur von schwachen Kräften begleitet sind, so ist dagegen die Schraube ohne Ende wie die gewöhnliche Schraube ein vortrefflicher Mechanismus, denn es ist diese Schraube ohne Ende der compendiöseste Mechanismus, um mit einer schwachen Kraft einen grossen Widerstand zu bewältigen, und sie gewährt den in vielen Anwendungen sehr nützlichen Vortheil, dass eine rückgängige Bewegung nicht von selbst, d. h. auch dann nicht eintritt, wenn auf die Schraube keine drehende Kraft einwirkt, was für Winden und Aufzüge eine sehr wünschenswerthe Eigenschaft ist.

Reibung einer Stirnräderverzahnung. Bei allen Verzahnungen, welche wir in der Folge für Stirnräder werden kennen lernen, geht die dem Berührungspunkt zweier Zähne entsprechende Normale durch den Berührungspunkt der Theilkreise. Wir wollen daher auch der nachfolgenden Rechnung eine Verzahnung zu Grunde legen, welcher diese Eigenschaft hinsichtlich der Richtung der Normale zukommt.

Es seien K k die im Punkt a sich berührenden Theilkreise der beiden Räder, Z ein Zahn des Rades K, z ein Zahn des Rades k, b der Punkt, in welchem sich die beiden Zähne in irgend einem Augenblick ihrer wechselseitigen Einwirkung berühren, c b a E die dem Punkt b der beiden Zähne gemeinschaftliche Normale, Q der am Umfang von k wirkende Widerstand, P die am Umfang von K nothwendige Kraft, um den Widerstand Q und die zwischen den Zähnen statt findende Reibung zu überwinden, R und r die Halbmesser der Theilkreise K und k, N die wechselseitige Pressung der Zähne. Diese Pressung wirkt nach der Richtung $b\,n_1$ auf den Zahn z und nach der Richtung b n auf den Zahn Z. Aus diesem Druck entspringt ein Reibungswiderstand $N f$ und dieser wirkt auf den

Zahn z nach der Richtung $b\,t_1$, auf den Zahn Z nach der Richtung $b\,t$. Das Gleichgewicht zwischen P, Q und der Reibung erfordert nun 1) dass P (am Umfang von K wirkend) mit N nach der Richtung $b\,n$ wirkend und mit $N f$ nach der Richtung $b\,t$ wirkend im Gleichgewicht ist, 2) dass Q am Umfang von k wirkend mit N nach $b\,n_1$ wirkend und mit $N f$ nach der Richtung $b\,t_1$ wirkend im Gleichgewicht ist. Wir erhalten daher, wenn wir $\overparen{a\,C\,E} = \varphi$ und $a\,b = p$ setzen, folgende Momentengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P\,R &= N\,R\cos\varphi + N f\,(R\sin\varphi + p) \\ Q\,r &= N\,r\cos\varphi + N f\,(r\sin\varphi - p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi + \frac{p}{R}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Berechnet man hieraus $\frac{P-Q}{Q} = \frac{P}{Q} - 1$, so findet man:

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Allein $P - Q$ ist offenbar der Betrag des Reibungswiderstandes, setzt man denselben F, so hat man:

$$\frac{F}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Diese Gleichung ist streng richtig und man kann vermittelst derselben den Reibungswiderstand für jede Verzahnungsart berechnen, wenn man nach der Form der Zähne den Werth von p als Funktion von φ ausdrückt.

Wir wollen uns jedoch nicht damit befassen, die Reibungswiderstände für die verschiedenen Verzahnungsarten ganz genau zu berechnen, sondern begnügen uns mit einer Annäherungsrechnung, die auf alle Verzahnungsarten anwendbar ist. Da nämlich in allen Fällen der Anwendung die Zahntheilung klein ist, so darf man φ

als einen sehr kleinen Winkel ansehen, und dann wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man den Nenner des Ausdruckes (4) gleich Eins setzt, denn $\cos \varphi$ ist beinahe 1 und $f\left(\sin \varphi - \frac{p}{R}\right)$ ist jedenfalls eine äusserst kleine Grösse, denn f ist klein, φ und $\frac{p}{R}$ sind es ebenfalls. Wir erhalten demnach für alle Verzahnungen annähernd:

$$\frac{F}{Q} = f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Der Reibungswiderstand ist also mit p, demnach mit der Stellung, in welcher sich die Zähne während ihrer Aufeinanderwirkung befinden, veränderlich. Suchen wir daher den mittleren Werth von F, so werden wir diesen erhalten, wenn wir für p den mittleren Werth setzen. Bewegen sich die Zähne durch eine Theilung von a an, so ist der kleinste Werth von p gleich Null und der grösste Werth von p sehr nahe gleich der Länge eines Theilungsbogens t, daher der mittlere Werth von p gleich $\frac{1}{2}$ t, gleich der Hälfte einer Theilung. Der mittlere Werth F_m des Reibungswiderstandes ist demnach:

$$\frac{F_m}{Q} = \frac{1}{2} f t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Nennt man M und m die Anzahl der Zähne der Räder K und k, so ist $t = \frac{2 R \pi}{M}$ und $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$, daher wird:

$$\frac{F_m}{Q} = f \pi \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und somit ist annähernd der Reibungswiderstand für Stirnräder berechnet und zwar für jede Verzahnungsform.

Hieraus geht zunächst hervor, dass der Reibungswiderstand bei allen Verzahnungen sehr nahe gleich gross ist, wenn die Zahntheilungen klein sind. Sodann folgt aus (7), dass der Reibungswiderstand mit der Anzahl der Zähne der Räder abnimmt, dass also eine grosse Zahnzahl oder eine feine Theilung vortheilhaft ist. Endlich folgt aus (7), dass dieser Reibungswiderstand von sehr geringem Belang ist, wenn die Zahnzahlen gross sind, denn ist z. B. $f = \frac{1}{8}$, $M = m = 12$, so wird:

$$\frac{F_m}{Q} = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{15}$$

Es beträgt also dieser Reibungswiderstand selbst dann, wenn der Reibungscoeffizient $\frac{1}{8}$ beträgt und jedes Rad nur 12 Zähne hat, dennoch nur $\frac{1}{15}$ von dem am Umfang des getriebenen Rades wirkenden Widerstande.

$$\text{für } f = \frac{1}{10}, \quad M = 48, \quad m = 48$$

$$\text{wird } F_m = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{10}\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{48}\right) Q = \frac{1}{76} Q$$

also sehr klein.

Die Verzahnungen müssen daher hinsichtlich des Reibungswiderstandes vortreffliche Anordnungen genannt werden.

Reibung konischer Räder. Wir werden in der Folge zeigen, dass richtige Zahnformen für Kegelräder gefunden werden, wenn man die Zähne von zwei Stirnrädern verzeichnet, deren Halbmesser gleich sind den Seiten der Ergänzungskegel der Kegelräder. Wir werden daher auch sagen dürfen, dass der Reibungswiderstand der Kegelräder so gross ist, als der Reibungswiderstand zweier Stirnräder, deren Halbmesser so gross sind, als die Seiten der Ergänzungskegel und deren Theilung mit jener der Kegelräder übereinstimmt.

Es seien, Fig. 1, Tafel XV., $O\,A$ und $O\,a$ die Axen der Räder, $\widehat{A\,O\,a} = \alpha$ der Winkel, den ihre Richtungen einschliessen, R und r die Halbmesser der Räder, S und s die Seiten der Ergänzungskegel, M und m die Anzahl der Zähne der beiden Kegelräder, $M_1\, m_1$ die Anzahl der Zähne der oben erwähnten idealen Stirnräder.

Dies vorausgesetzt bestehen zunächst wegen der Gleichheit der Zahntheilungen der realen und idealen Räder die Beziehungen:

$$\frac{2\,R\,\pi}{M} = \frac{2\,r\,\pi}{m} = \frac{2\,S\,\pi}{M_1} = \frac{2\,s\,\pi}{m_1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1} &= \frac{R}{M\,s} \\ \frac{1}{M_1} &= \frac{R}{M\,S} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die idealen Räder Stirnräder sind, so ist nach Gleichung (7), Seite 286 der Reibungswiderstand derselben:

$$F = Q\,\pi\,f\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{M_1}\right)$$

oder wenn man für $\frac{1}{m_1}$ und $\frac{1}{M_1}$ die Werthe aus (2) einführt:

$$F = Q \pi f \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{S} \right) \frac{R}{M} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Es handelt sich also nur noch um die Berechnung der Seiten der Ergänzungskegel aus r, R und α.

Nun ist:

$$\frac{1}{S} = \frac{\cos \beta}{R}, \qquad \frac{1}{s} = \frac{\cos \gamma}{r}$$

wobei β und γ die Winkel sind, welche die Berührungslinie O B der Grundkegel mit den Axen bildet. Führt man diese Werthe in (3) ein, so erhält man, mit Berücksichtigung dass $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$ ist:

$$F = Q \pi f \left(\frac{\cos \beta}{M} + \frac{\cos \gamma}{m} \right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Winkel β und γ hat man:

$$\left. \begin{aligned} \beta + \gamma &= \alpha \\ \frac{R}{r} = \frac{M}{m} &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{m}{M}} \\ \operatorname{tang} \gamma &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{M}{m}} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und daraus folgt wegen $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \gamma}}$

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\frac{\cos \alpha}{m} + \frac{1}{M}}{\sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha}} \\ \cos \gamma &= \frac{\frac{\cos \alpha}{M} + \frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha}} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Führt man diese Werthe in (4) ein, so findet man nach einigen ganz gewöhnlichen Reduktionen:

$$F = Q \pi f \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha} \quad \ldots \quad (8)$$

Der Werth der Wurzelgrösse ist kleiner als $\frac{1}{M} + \frac{1}{m}$ so lange α nicht gleich Null ist. Hieraus folgt nun, dass die Reibung einer Kegelräder-Verzahnung noch kleiner ist, als die einer Stirnräder-Verzahnung. Der Unterschied ist jedoch von keiner praktischen Bedeutung, weil überhaupt die grössten Beträge dieser Reibung (für $\alpha = 0$) sehr klein sind.

Dieser geringe Zahn-Reibungswiderstand ist von sehr grosser praktischer Wichtigkeit, nicht allein wegen des Kraftverlustes, sondern insbesondere wegen der geringen Abnützung. Versieht man also die Räder mit hinreichend vielen, richtig geformten, glatt bearbeiteten Zähnen und fettet dieselben noch überdies reichlich ein, so werden solche Räder einen kaum merklichen Kraftverlust verursachen, werden sich die Zähne lange conserviren und wird man also eine andauernde sanfte Bewegung erhalten.

Widerstände eines Rollentriebes. Bei einem Riementrieb werden die Axen der Rollen durch die Riemenspannungen heftig in die Lager gedrückt, wodurch eine nicht unbeträchtliche Reibung entsteht. Wir haben Seite 188 gezeigt, dass die Spannung im führenden Riemenstück in der Regel zweimal, und im geführten Riemenstück genau so gross ist, als die auf den Rollenumfang reduzirte Kraft Q, welche übertragen wird.

Nennt man nun $D\, D_1$ die Durchmesser der Rollen, $d\, d_1$ die Durchmesser der Wellen, f den Reibungscoeffizienten, so wird jede der beiden Axen mit einer Kraft $2\,Q + Q = 3\,Q$ in die Lager gepresst, ist demnach die Kraft, welche an dem Rollenumfang wirken muss, um die aus diesen Pressungen entstehende Reibung zu überwinden

$$3\,Q f \left(\frac{d}{D} + \frac{d_1}{D_1}\right)$$

Wird durch die Rolle die ganze Kraft übertragen, die in der treibenden Welle vorhanden ist, so sind die Werthe von $\frac{d}{D}$ und $\frac{d_1}{D_1}$ mindestens $\frac{1}{7}$, wird nur ein Theil dieser Kraft übertragen, so sind diese Quotienten noch grösser. Nehmen wir $f = 0{\cdot}1$, so wird