Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Zapfenreibung

urn:nbn:de:bsz:31-270970

keine verlässlichen Versuche, durch welche der numerische Werth von $\frac{4\,h\,p}{P} f$ für verschiedene Kolbenanordnungen bestimmt wäre; man ist daher heut zu Tage noch nicht im Stande, eine Kolbenreibung mit Zuverlässigkeit zu berechnen. Indessen ist der aus dieser Unkenntniss entstehende Nachtheil in praktischer Hinsicht doch von keiner Bedeutung, denn was man zu thun hat, um die Kolbenreibung klein zu machen, weiss man ja doch, und diese Reibung wird durch eine genaue Berechnung weder grösser noch kleiner.

Zapfenreibungen.

Umfangsreibung eines continuirlich rotirenden cylindrischen Zapfens. Es sei P der Druck, mit welchem die Umfangsfläche eines Zapfens gegen sein Lager gepresst wird, f der Reibungscoeffizient, v die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens in Metern und in einer Sekunde, d der Durchmesser des Zapfens in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute, so ist: $P f$ die Umfangsreibung und $P f v$ der in Kilogramm-Metern ausgedrückte Effekt der Zapfenreibung. Nun ist $v = \frac{d\,\pi\,.\,n}{100 \times 60}$, daher wird dieser Effekt auch:

$$e = \frac{n\,d\,P\,f}{1910} \text{ Kilogramm-Met.} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Der Betrag einer solchen Zapfenreibung ist in der Regel nicht sehr von Belang im Verhältniss zur Kraft, die durch eine Welle übertragen wird. Auch ist die Abnutzung, in so ferne als sie ringsum stattfindet, daher eine Formänderung nicht hervorbringt, von keinem Belang. Nur allein das Warmlaufen ist bei schnell sich drehenden Zapfen zu befürchten, daher ist für derlei Zapfen ein grosser Durchmesser und eine beträchtliche Länge zu empfehlen, man muss aber auch für ein gleichmässiges Aufliegen des Zapfens im Lager Sorge tragen.

Bodenreibung bei stehenden cylindrischen Zapfen. Vorausgesetzt dass die Grundfläche eines stehenden Zapfens ganz gleichmässig gegen die Pfanne gepresst wird, ergibt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise. Nennt man P_1 den Druck der Zapfengrundfläche gegen die Pfanne, d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute, so ist $\frac{P_1}{\frac{1}{4}\,d^2\,\pi}$

der Druck jedes Quadratcentimeters der Grundfläche gegen den Boden. Verzeichnet man auf die Grundfläche mit zwei Halbmessern x und $x + \delta x$ concentrische Kreise (wobei δ das Differentialzeichen bedeutet), so ist der Druck der zwischen diesen Kreisen enthaltenen ringförmigen Fläche gegen den Boden der Pfanne:

$$2 x \pi \delta x \frac{P_1}{\frac{1}{4} d^2 \pi} = \frac{8 P_1}{d^2} x \delta x$$

Die daraus entstehende Reibung ist demnach:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f x \delta x$$

Das Moment des ganzen Reibungswiderstandes ist demnach:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \delta x = \frac{1}{3} P_1 f d$$

Die Kraft, welche am Umfange des Zapfens wirken muss, um dieses Reibungsmoment zu bewältigen ist demnach:

$$\frac{\frac{1}{3} P_1 f d}{\frac{1}{2} d} = \frac{2}{3} P_1 f$$

und der zur Bewältigung der Reibung erforderliche Effekt e_1 ist folglich:

$$e_1 = \frac{2}{3} \frac{n d P_1 f}{1910}$$

Wird die Umfangsfläche eines stehenden Zapfens mit einer Kraft P, die Grundfläche mit einer Kraft P_1 gedrückt, so ist der zur Bewältigung beider Reibungen erforderliche Effekt:

$$e_2 = \frac{n d f}{1910} \left(P + \frac{2}{3} P_1\right)$$

Umfangsreibung bei Zapfen, die sich hin und her drehen. Bei Zapfen, die nicht rund umlaufen, sondern sich nur um einen gewissen Winkel α hin und her drehen, ist der Reibungseffekt offenbar im Verhältniss $\frac{2 \alpha}{360}$ kleiner als bei continuirlich rund umlaufenden. Man hat daher für hin und her drehende Zapfen:

$$e = \frac{n\,d\,P\,f}{1910}\,\frac{2\,\alpha}{360}$$

wobei n die Zahl ist, welche ausdrückt, wie viel mal der Zapfen in einer Minute hin und her gedreht wird. Eine Hin- und Herdrehung als Eins gerechnet.

Dieser Reibungswiderstand ist insbesondere von keinem Belang, wenn $2\,\alpha$ gegen 360° klein ist, z. B. bei den Zapfen an einem Dampfmaschinenbalancier. Allein ein Umstand ist bei derlei Zapfen sehr nachtheilig, nämlich das Unrundwerden dieser Zapfen, weil nicht die ganze Oberfläche, sondern nur ein Theil derselben dem Abschleifen ausgesetzt ist.

Reibung eines stehenden Zapfens, der nach einer Rotationsfläche geformt ist. Nehmen wir an, der Zapfen einer vertikalen Welle sei nach einer Rotationsfläche geformt und eben so auch die Pfanne, in der er sich dreht, Fig. 6, Tafel XIV. Der Zapfen werde mit einer Kraft Q nach vertikaler Richtung in die Pfanne gedrückt. Nehmen wir einen beliebigen Punkt O der Axe als Anfangspunkt eines Coordinatensystems; die geometrische Axe des Zapfens als Abscissenaxe. $O\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m des Meridianschnittes der Rotationsfläche, $O\,p_1 = x + d\,x$, $m_1\,p_1 = y + d\,y$ die Coordinaten eines von m unendlich wenig entfernten Punktes m_1, $\overline{m\,m_1} = d\,s$. Nennt man N die auf die Flächeneinheit bezogene Pressung, welche nach normaler Richtung gegen jeden Punkt des zwischen den Ebenen $m\,p$ und $m_1\,p_1$ befindlichen Theiles der Oberfläche des Zapfens wirkt, so ist $2\,\pi\,y\,d\,s\,N$ der gesammte Normaldruck gegen diesen Flächentheil und $2\,\pi\,y\,d\,s\,N \sin\varphi$ die Kraft, mit welcher der Zapfen vermöge dieses Normaldruckes nach vertikaler Richtung aufwärts gedrückt wird. In diesem Ausdruck bedeutet φ den Winkel, den die zum Punkte m gezogene Berührungslinie mit der Axe des Zapfens bildet.

Es ist also $\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N \sin\varphi$ der aus sämmtlichen Normalpressungen entspringende, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkende Druck. Man hat daher:

$$\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N \sin\varphi = Q \;\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In diesem Ausdruck sind r_0 und r die Halbmesser $B\,B_1$ und $A\,A_1$. Allein es ist $\sin\varphi = \frac{d\,y}{d\,s}$, daher findet man:

$$Q = 2\,\pi \int_{r_0}^{r} y\,N\,d\,y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Axe, so ist $\omega\,y$ die Geschwindigkeit, mit der die Reibung überwunden wird, die aus dem Normaldruck $2\,\pi\,y\,d\,s\,N$ entsteht. Der Effekt e, welcher der Ueberwindung der totalen Reibung entspricht, ist demnach:

$$e = \int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N\,f\,y\,\omega = \omega\,2\,\pi\,f \int_{r_0}^{r} y^2\,N\,d\,s \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Der im Allgemeinen variable Normaldruck N richtet sich nach der Form des Zapfens und muss aus diesem durch statische Betrachtungen ausgemittelt werden, was nunmehr geschehen soll.

Nehmen wir an, der Zapfen werde zuerst so in die Pfanne gesetzt, dass zwischen den Berührungsflächen nur eine geometrische Berührung und keine Pressung statt findet. Lässt man hierauf die Kraft Q einwirken, so entstehen zwischen den Berührungsflächen Normalpressungen, die so lange zunehmen, bis sie der Kraft Q das Gleichgewicht halten. Dabei wird die Zapfenfläche, so wie auch die Fläche der Pfanne deformirt, aber in der Weise, dass Zapfen und Pfanne in jedem Augenblick übereinstimmende Formen haben. Diese Formen werden aber auch entstehen, wenn wir sowohl die Axe als auch die Pfanne festhalten und sowohl gegen die Fläche des Zapfens als auch gegen die Fläche der Pfanne Normalpressungen einwirken lassen, die jenen gleich sind, welche eintreten, wenn der Zapfen mit einer Kraft Q in die Pfanne gedrückt wird. Durch die Normalpressungen gegen den Zapfen geht derselbe aus der Form A B in die Form C D über, Fig. 7, Tafel XIV., und durch die Normalpressungen gegen die Pfanne geht dieselbe aus der Form A B in die Form E F über. Diese Formen C D und E F müssen aber nothwendig übereinstimmen, wenn die Entfernung $\overline{s\,t}$ der Punkte, in welchen die Linien C D und E F durch irgend eine vertikal gezogene Linie s m t geschnitten werden, von gleicher Grösse ist, denn ist dies der Fall, so wird die Fläche C D mit E F zusammen fallen, wenn man die deformirte Zapfenfläche um die constante Länge s t niederbewegt.

Zieht man durch m die Normale n m q u, so sind $\overline{m\,q}$ und $\overline{m\,n}$ die Zusammenpressungen des Zapfens und der Pfanne durch den Normaldruck N, man darf daher setzen $\overline{m\,q} = \varepsilon\,N$, $\overline{m\,n} = \varepsilon_1\,N$, wobei $\varepsilon\,\varepsilon_1$ constante Grössen bezeichnen, die von der Elastizität des Materials abhängen, aus welchem Zapfen und Pfanne gefertiget sind.

Da die Zusammendrückungen sehr klein sind, so darf man $m s q$ und $m n t$ als unendlich kleine, geradlinige Dreiecke ansehen, es ist demnach:

$$\overline{m q} = \overline{m s} \sin \varphi, \quad \overline{m n} = \overline{m t} \sin \varphi$$

oder:

$$\overline{m q} + \overline{m n} = \sin \varphi \left(\overline{m s} + \overline{m t}\right)$$

Setzt man für $\overline{m q}$ und $\overline{m n}$ die oben aufgestellten Werthe und bezeichnet die constant sein sollende Länge $\overline{m s} + \overline{m t} = s t$ mit λ, so erhält man:

$$\varepsilon N + \varepsilon_1 N = \lambda \sin \varphi$$

und hieraus folgt:

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Hierdurch ist nun der Normaldruck N berechnet und man erhält, wenn man denselben in (2) und (3) einführt:

$$Q = 2 \pi \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \, y \, d y = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin \varphi \, d y$$

$$e = 2 \pi f \omega \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \, y^2 \, d s = 2 \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin \varphi \, d s$$

oder auch weil $\sin \varphi = \frac{d y}{d s}$ ist:

$$Q = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \frac{d y}{d s} \, d y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$e = 2 \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y^2 \, d y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

oder weil $\int_{r_0}^{r} y^2 \, d y = \frac{1}{3} (r^3 - r_0^3)$ ist:

$$e = \frac{2}{3} \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} (r^3 - r_0^3) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

auch findet man durch Division von (7) und (5):

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega \frac{r^3 - r_0^3}{\int_{r_0}^{r} y \frac{d y}{d s} \, d y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Beispiele. Wir wollen diese Formeln auf spezielle Zapfenformen anwenden.

Für einen Zapfen mit ebener kreisförmiger Grundfläche ist $r_0 = o$, $ds = dy$, daher vermöge (5):

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^r y\, dy = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

$$\lambda = (\varepsilon + \varepsilon_1) \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ferner vermöge (4) und (8):

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin 90^\circ = \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f \omega r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Für einen konischen oder Spitzzapfen, Fig. 8, Tafel XIV., ist $r_0 = o$, $ds \sin \beta = dy$, $\sin \varphi = \sin \beta$, man findet also:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^r y \sin \beta\, dy$$

$$Q = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$N = \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f \omega \frac{r}{\sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Für einen halbkugelförmigen Zapfen darf man mit Berücksichtigung von Fig. 9, Tafel XIV setzen:

$$x = r(1 - \cos \psi), \quad y = r \sin \psi, \quad ds = r\, d\psi, \quad r_0 = o$$

und dann wird:

$$dx = r \sin \psi\, d\psi, \quad dy = r \cos \psi\, d\psi$$

demnach:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^{\frac{\pi}{2}} r \sin \psi \cos \psi\, r \cos \psi\, d\psi$$

$$Q = \frac{2}{3} \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{e}{Q} = f \omega r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$N = \frac{3}{2} \frac{Q}{r^2 \pi} \cos \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Zapfenform, welche die geringste Erwärmung verursacht. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Form eines Zapfens so zu bestimmen, dass die durch die Reibung entstehende Erwärmung an jedem Punkt der Berührungsfläche zwischen Zapfen und Pfanne einen gleichen aber geringen Werth erhält. Durch einen Zapfen, welcher diese Eigenschaft besitzt, wird man sich wohl am besten gegen das so nachtheilige Abnutzen und Warmlaufen schützen.

Die an einer Stelle der Oberfläche des Zapfens in Folge der Reibung entstehende Erwärmung muss wahrscheinlich nach der Arbeit beurtheilt werden, welche der Ueberwindung der Reibung entspricht, die auf der Einheit der Fläche stattfindet. Diese Arbeit muss also für jeden Punkt der Oberfläche des Zapfens constant sein.

Nun ist für eine Stelle des Zapfens, welche einem Halbmesser y entspricht, Fig. 6, $N f$ der Reibungswiderstand auf der Flächeneinheit und ωy die Geschwindigkeit, mit welcher die Reibung überwunden wird, wir haben daher zu setzen:

$$N f \omega y = \text{const} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wobei k eine durch Erfahrung zu bestimmende constante Grösse bedeutet.

Setzen wir für N seinen Werth aus (4), so wird:

$$\frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi f \omega y = k$$

oder:

$$y \sin \varphi = \frac{k (\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega}$$

Das Produkt $y \sin \varphi$ muss also für jeden Punkt des Zapfens einen und denselben Werth haben. Nennen wir α den Werth von φ, welcher dem grössten Halbmesser $y = r$ entspricht, so haben wir:

$$y \sin \varphi = r \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\frac{k (\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega} = r \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Die Gleichung (19) bestimmt die Form des Zapfens. Es ist nämlich $\sin \varphi = \frac{d y}{d s}$, daher erhalten wir aus (19):

$$y\,dy = r \sin\alpha\,ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{1}{2}\,y^2 = r\,s\,\sin\alpha + \text{const}$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkt B_1, Fig. 6, Tafel XIV, so ist für $y = r_0$, $s = 0$, demnach:

$$\frac{1}{2}\,r_0^2 = 0 + \text{const}$$

demnach:

$$\frac{1}{2}\,(y^2 - r_0^2) = r\,s\,\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Dies ist die Gleichung der Zapfenform, ausgedrückt durch y und s. Suchen wir aber auch die Gleichung der Zapfenlinie durch x und y darzustellen.

Es ist $ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Führt man diesen Werth von ds in (21) ein, so findet man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$dx = dy\sqrt{\left(\frac{y}{r\sin\alpha}\right)^2 - 1}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$x = +\frac{1}{2}\,y\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1} - \frac{r\sin\alpha}{2}\,\text{lognat}\left(\frac{y}{r\sin\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1}\right) + \text{const}$$

y kann nie kleiner werden als $r\sin\alpha$, weil sonst die Wurzelgrösse $\sqrt{\left(\frac{y}{r\sin\alpha}\right)^2 - 1}$ imaginär würde. Der kleinste zulässige Zapfenhalbmesser ist demnach gleich $r\sin\alpha$ oder:

$$r_0 = r\sin\alpha$$

Für $y = r_0 = r\sin\alpha$ wird aber $x = 0$, daher findet man $\text{const} = 0$ und die Gleichung der Zapfenkurve wird:

$$x = \frac{1}{2}\,y\sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1} - \frac{r\sin\alpha}{2}\,\text{lognat}\left(\frac{y}{r\sin\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1}\right) \quad (23)$$

Der grösste Halbmesser ist $y = r$. Nennt man h die Höhe des Zapfens, setzt also $A_1 B_1 = h$, Fig. 6, so muss für $y = r$, $x = h$ werden, daher hat man:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2} \operatorname{lognat}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \quad . \; . \; . \quad (24)$$

Hierdurch ist das Verhältniss zwischen der Höhe des Zapfens und seinem grössten Halbmesser r bestimmt. Berechnen wir nun auch den Werth von Q und von e.

Vermöge (19) und (20) wird:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} \frac{k(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega} d y = 2\pi \frac{k}{f\omega}(r - r_0)$$

oder weil $r_0 = r \sin\alpha$ ist:

$$Q = 2\pi \frac{k}{f\omega}(1 - \sin\alpha)\, r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Hieraus ergibt sich der Zapfenhalbmesser:

$$r = \frac{f\omega}{2\pi k} \frac{Q}{(1 - \sin\alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Führt man in (7) für $\frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$ den Werth ein, welcher aus (20) folgt, so findet man:

$$e = \frac{2}{3} \pi k r^2 \frac{1 - \sin^3\alpha}{\sin\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

oder endlich, wenn man vermittelst (26) den Werth von r wegbringt:

$$e = \frac{1}{6\pi} \frac{1}{k} f^2 \omega^2 Q^2 \frac{1 - \sin^3\alpha}{\sin\alpha(1 - \sin\alpha)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Auch ist:

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega r \frac{1 - \sin^3\alpha}{\sin\alpha(1 - \sin\alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Um für die Constante k einen angemessenen Werth zu finden, können wir von der Thatsache ausgehen, dass für einen gewöhnlichen cylindrischen Zapfen mit kreisrunder Grundfläche ein Durchmesser von 12 Centimeter hinreichend ist, wenn der Druck auf einen Quadratcentimeter der Grundfläche 20 Kilogramm beträgt und die Welle in einer Minute 150 Umdrehungen macht. Setzen wir für einen solchen Zapfen auf analoge Weise

$$\frac{Q}{r^2 \pi} f \omega r = k$$

und nehmen

$$\frac{Q}{r^2 \pi} = 20, \quad f = 0{\cdot}08, \quad \omega = \frac{2 \pi \times 150}{60} = 15{\cdot}7, \quad r = 6 \text{ Centimeter}$$

so wird:

$$k = 20 \times 0{\cdot}08 \times 15{\cdot}7 \times 6 = 154 \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Um zur Einsicht zu kommen, was man von dieser Art Zapfen erwarten darf, dienen folgende numerische Rechnungen.

Setzen wir in die Formeln $k = 154$, $f = 0{\cdot}054$ (sorgfältige continuirliche Oelung) $\pi = 3{\cdot}142$, so findet man:

für	$\alpha = 20^0$	30^0	40^0
aus (26) $\frac{r}{Q \omega}$	$= \frac{1}{11844}$	$\frac{1}{9000}$	$\frac{1}{6426}$
aus (28) $\frac{e}{Q^2 \omega^2}$	$= \frac{1}{154700}$	$\frac{1}{142860}$	$\frac{1}{111111}$

oder wenn man statt der in Centimetern ausgedrückten Winkelgeschwindigkeit die Anzahl n der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute einführt, also $\omega = \frac{2 \pi}{60} n$ setzt:

$\frac{r}{Q n}$	$= \frac{1}{113086}$	$\frac{1}{85732}$	$\frac{1}{61355}$
$\frac{e}{Q^2 n^2}$	$= \frac{1}{14077700}$	$\frac{1}{13000260}$	$\frac{1}{10111101}$

auch wird:

$\frac{e}{r^2}$	$=$ 906	567	372

Nennt man e_1 den Reibungseffekt für einen gewöhnlichen Zapfen mit ebener kreisförmiger Basis, so ist:

$$e_1 = \frac{2}{3} Q f r \omega$$

Aus dieser und der Formel (29) folgt:

$$\frac{e_1}{e} = \frac{2}{\frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)}}$$

und man findet für

$$\alpha = \quad 20^\circ \qquad 30^\circ \qquad 40^\circ$$

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{3\cdot 23} \qquad \frac{1}{3\cdot 50} \qquad \frac{1}{4\cdot 5}$$

Hinsichtlich des Reibungsverlustes ist demnach dieser künstlich geformte Zapfen gar nicht empfehlenswerth. Ob man sich in der That mit diesem künstlichen Zapfen gegen das Warmlaufen schützen kann, müsste die Erfahrung entscheiden, denn die ganze Theorie beruht doch auf zwei Annahmen, deren Richtigkeit von vornherein nicht unbedingt behauptet werden kann.

Der „Antifrictions"-Zapfen. Der sogenannte „Antifrictions"-Zapfen ist eine Erfindung von *Schiele*. Er ist nach einer Kurve AB, Fig. 10, Tafel XIV., gebildet, die die Eigenschaft hat, dass die Länge des Tangentenstückes mp für jeden Punkt der Kurve constant ist. Nennt man t die Länge mp des Tangentenstückes, so ist $t \sin \varphi = y$, es ist aber $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$, demnach:

$$t \frac{dy}{ds} = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dies ist die Differenzialgleichung der Kurve. Das Integrale gibt

$$t \log y = s + \text{const}$$

Nennt man r_0 den kleinsten Halbmesser und rechnet von da an die Bogenlänge s, so ist für $s = o$, $y = r_0$, demnach:

$$t \log r_0 = o + \text{const}$$

und dann wird:

$$t \log \frac{y}{r_0} = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{y}{r_0} = e^{\frac{s}{t}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Will man die Gleichung der Kurve zwischen x und y ausdrücken, so hat man wegen $ds = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

$$\frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = y, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{t^2 - y^2}}{y}$$

Das Integrale dieses Ausdruckes ist:

$$y = \sqrt{t^2 - y^2} + \frac{1}{2}\, t \text{ lognat } \frac{\sqrt{t^2 - y^2} - t}{\sqrt{t^2 - y^2} + t} + \text{const}$$

Zu dieser Kurve kommt man, wenn man den Normaldruck N nicht, wie wir gefunden haben, dem Sinus des Winkels φ proportional setzt, sondern im Gegentheil

$$N = \frac{\gamma}{\sin \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

setzt, wobei γ eine Constante bezeichnet, und wenn man ferner, wie auch wir gethan haben,

$$N f \omega y = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

nimmt, denn in diesem Falle wird:

$$\frac{\gamma}{\sin \varphi} f \omega y = k, \qquad \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{k}{\gamma f \omega}$$

Allein es ist $\frac{y}{\sin \varphi} = t$, demnach folgt unter den Annahmen (1) und (2), dass $t = \frac{k}{\gamma f \omega}$ sein soll, oder dass t eine constante Grösse sein soll. Allein die Annahme $N = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$ ist offenbar verfehlt, daher beruht der Antifrictions-Zapfen von Herrn *Schiele* auf einem Irrthum und ist zu verwerfen.

Kurbelzapfen und Excentrik. Die Formel, welche wir für den Effekt der Reibung am Umfang von rundumlaufenden Zapfen gefunden haben, nämlich:

$$e = \frac{n\, d\, f\, P}{1910}$$

gilt auch für Kurbelzapfen und für excentrische Scheiben, wenn man d den in Centimetern ausgedrückten Durchmesser des Kurbelzapfens oder den Durchmesser der excentrischen Scheibe bedeuten lässt. Man sieht hieraus, dass diese excentrischen Scheiben sehr krafterschöpfend werden können, indem ihr Durchmesser immer sehr gross ausfällt. Zur Uebertragung grösserer Effekte darf desshalb die excentrische Scheibe nicht gebraucht werden, und wird auch heut zu Tage in solchen Fällen nicht gebraucht.

Reibung an Ringflächen. Ringförmige Flächen, die sich drehen und gegen eine Fläche gepresst werden, kommen bei verschiedenen Maschinentheilen vor.

Nennen wir P den gesammten Druck der Ringfläche gegen die ruhende Fläche, d_0 den inneren, d_1 den äusseren Durchmesser des Ringes, f den Reibungscoeffizienten, so ist zunächst $\frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2-d_0^2)}$ der Druck auf einen Quadratcentimeter der Ringfläche. Beschreibt man mit x und $x+\delta x$ (wobei δ das Differenzialzeichen bedeutet), zwei concentrische Kreise, so ist: $2\pi x\,\delta x \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2-d_0^2)} f$ der Reibungswiderstand auf diesen Ring von der Breite δx. Multiplizirt man diesen Ausdruck mit x und dividirt ihn durch $\frac{d_1}{2}$, so erhält man die Kraft, welche am Umfang des Zapfens wirkend im Stande ist, die an der Fläche $2\pi x\,\delta x$ stattfindende Reibung zu überwinden. Diese Kraft ist demnach:

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} x^2 \delta x$$

Die Kraft, welche am Umfang des Zapfens wirken muss, um die Reibung, welche an der ganzen Ringfläche stattfindet, zu überwinden, ist demnach:

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} \int_{\frac{1}{2} d_0}^{\frac{1}{2} d_1} x^2 \,\delta x = \frac{2}{3} P f \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)}$$

Wird d_0 und d_1 in Centimetern ausgedrückt und nennt man n die Anzahl der Umdrehungen des Ringes in einer Minute, so ist $\frac{d_1 \pi n}{100 \times 60}$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rings in Metern ausgedrückt. Der Effekt e der Ringreibung wird demnach:

$$e = \frac{n P f}{1910} \; \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1^2 - d_0^2}$$

Frictionsrollen. Es sei A ein Wellenzapfen, der nicht in ein Lager, sondern auf eine mit zwei Zapfen B versehene Rolle C gelegt ist, jeder der Zapfen B liege in gewöhnlichen Lagern D, der Zapfen A befinde sich in einer Gabel, so dass er keine Horizontalbewegung machen kann. Eine solche Anordnung wird Friktionsrolle genannt.

Wird der Zapfen gedreht, so rollt derselbe auf der Rolle C und diese dreht sich dabei um ihre Zapfen. Wenn die Zapfen B und der Rollenumfang glatt bearbeitet sind, kann der Wälzungswiderstand ganz vernachlässigt werden, und ist dann bei dieser Einrichtung nur die Reibung an den Zapfen der Friktionsrolle zu überwinden.

Nennt man P den Druck des Zapfens A gegen den Rollenumfang, d den Durchmesser des Zapfens A, D den Durchmesser der Rolle C und Δ den Durchmesser eines der Zapfen B, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens A in einer Minute, so ist $\frac{1}{2}$ P der Druck eines der Zapfen B gegen das Lager, $\frac{1}{2}$ P f der daraus entspringende Reibungswiderstand, welcher mit der Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens B überwunden wird. Diese letztere ist aber im Verhältniss $\frac{\Delta}{D}$ kleiner als die Umfangsgeschwindigkeit von C oder von A, ist demnach $\frac{\Delta}{D} \frac{d \pi n}{60 \times 100}$. Der Effekt e der Reibungen an den beiden Zapfen B ist demnach:

$$e = 2 \times \frac{1}{2} P f \times \frac{\Delta}{D} \frac{d \pi n}{60 \times 100}$$

oder

$$e = \frac{n d P f}{1910} \frac{\Delta}{D}$$

Der Reibungseffekt ist demnach bei einer Friktionsrolle im Verhältniss des Durchmessers des Rollenzapfens und der Rolle selbst kleiner, als bei einer gewöhnlichen Zapfeneinrichtung.

Axenreibung eines Wagens. Bei Strassenwagen sind die Axen mit dem Gestelle verbunden und drehen sich die Räder um die Axen. Bei Eisenbahnwagen sind die Axen mit den Rädern verbunden und liegt das Wagengestelle auf den Axen. Diese Verschiedenheit der Wagenconstruktion hat jedoch auf den Betrag der Axenreibung keinen Einfluss. Wir wollen einen Eisenbahnwagen der Berechnung zu Grunde legen.

Es sei d der Durchmesser eines Zapfens, D der Durchmesser eines Rades, i die Anzahl der Räder des Wagens, Q_1, Q_2, Q_3 die Pressungen gegen die Zapfen der Axen, v die Fahrgeschwindigkeit des Wagens. Dies vorausgesetzt, sind $Q_1 f$, $Q_2 f$, $Q_3 f$ die Reibungswiderstände an den Zapfenumfängen; diese werden aber mit einer Geschwindigkeit v $\frac{d}{D}$ überwunden, daher hat man für den Effekt e sämmtlicher Axenreibungen:

$$e = Q_1 f v \frac{d}{D} + Q_2 f v \frac{d}{D} + \dots$$

oder

$$e = f\,v\,\frac{d}{D}(Q_1 + Q_2 + \ldots)$$

Allein $Q_1 + Q_2 + \ldots$ ist die totale Belastung sämmtlicher Zapfen; bezeichnet man dieselbe mit Q, so erhält man:

$$e = Q\,f\,\frac{d}{D}\,v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Demnach ist die zur Ueberwältigung der Axenreibung erforderliche Zugkraft z:

$$Z = Q\,f\,\frac{d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für Eisenbahnwagen ist in der Regel $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$ und darf man, weil continuirlich geölt wird, $f = 0{\cdot}054$ setzen, dann wird:

$$Z = \frac{Q}{260}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) sieht man, dass es vortheilhaft ist, wenn die Räder im Verhältniss zu den Zapfendurchmessern gross sind. Auch erkennt man leicht, dass es hinsichtlich der Axenreibung auf die Anzahl der Räder nicht ankommt. Allein da bei einer grösseren Räderzahl der Druck auf jeden Zapfen kleiner ausfällt, wodurch die Zapfendurchmesser kleiner sein können, so dürfen auch die Räder kleiner gemacht werden. Wagen mit wenig Rädern erfordern also starke Zapfen und grosse Räder, Wagen mit vielen Rädern dagegen können kleine Zapfen und kleine Räder erhalten.

Bei Lokomotiven mit äusseren Rahmen und äusseren Axenzapfen ist $\frac{d}{D}$ beträchtlich kleiner, als bei Lokomotiven mit inneren auf den Axen selbst aufsitzenden Rahmen. Die Lokomotive der ersten Art verursachen daher einen geringeren Axenreibungswiderstand als die der zweiten Art.

Würde man bei Eisenbahnwagen Frictionsrollen anwenden, so könnte der Axenreibungswiderstand in der That verschwindend klein gemacht werden, denn die Zugkraft für einen solchen mit Frictionsrollen versehenen Zapfen wäre:

$$Z = Q\,f\,\frac{d}{D}\,\frac{d_1}{D_1}$$

wobei D_1 den Durchmesser der Frictionsrolle und d_1 den Zapfen dieser Rolle bezeichnet.

Für $f = 0{,}054$, $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$, $\frac{d_1}{D_1} = \frac{1}{5}$ würde

$$Z = \frac{Q}{1300}$$

Leider ist die Anwendung der Friktionsrollen bei Eisenbahnwagen, so wie überhaupt bei Maschinen, in welchen mächtigere Kräfte wirken, nicht wohl zulässig. Die Construktion ist zu complizirt und die Axenlagerung zu unsicher.

Die Schraube mit flachem Gewinde. Eine genaue Bestimmung des bei einer Schraube vorkommenden Reibungswiderstandes verursacht sehr weitläufige Rechnungen und führt zu so complizirten Formeln, dass es wohl Niemand in den Sinn kommen würde, darnach numerische Rechnungen zu machen. Auch würde die Genauigkeit doch nur illusorisch sein, indem man in den Anwendungen niemals in der Lage ist, den Werth des Reibungscoeffizienten mit Zuverlässigkeit anzugeben. Wir begnügen uns daher mit einer Annäherungsrechnung, die sich ergiebt, wenn man die Gewindtiefe unendlich klein annimmt, in welchem Falle 1) alle Punkte der Schraubenfläche gleiche Geschwindigkeit haben, 2) die Neigung der Schraubenfläche gegen den Horizont für alle Punkte derselben einerlei Grösse hat.

Wird die Mutter festgehalten und die Spindel gedreht, so erhält dieselbe auch eine fortschreitende Bewegung nach der Richtung ihrer Axe und dabei gleitet die Spindelfläche an der Mutterfläche hinauf, wie ein auf einer schiefen Ebene liegender, durch eine Horizontalkraft getriebener Körper.

Wir werden daher die Formel, welche wir Seite 261 für die schiefe Ebene aufgestellt haben, anwenden können und erhalten daher für die Kraft P, welche am Umfang der Spindel horizontal drehend wirken muss, um die an derselben hängende Last aufzuziehen und die zwischen Mutter und Spindel statt findende Reibung zu überwinden, folgenden Ausdruck:

$$P = Q \frac{\tang \alpha + f}{1 - f \tang \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei nun α den Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen eine auf die Axe senkrechte Ebene bedeutet.

Nennt man d den Durchmesser der Spindel, h die Höhe eines Schraubenganges, so darf man setzen: